DE DUPLICI DIFFERENTIALIUM NOTIONE ATQUE INDOLE, TAM AD FORMAM QUAM AD REM PERTINENTE.

math

SPECIMEN PRIMUM
QUOD
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
AUCTORITATE ET CONSENSU
AD
SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES
IN
ACADEMIA GEORGIA AUGUSTA
RITE OBTINENDOS

EDIDIT

AUGUSTUS GUILIELMUS JULIUS UHDE
REGIO-LUTTERANUS.

GOTTINGAE
TYPIS DIETERICHIANIS.
MDCCCXXIX.

"Nullius addictus *jurare in verba* magistri"

HORATIUS.

VIRO DOCTISSIMO CLARISSIMO

J. C. STEGMANN

MATHESEOS ATQUE PHYSICES IN GYMNASIO HELMSTADIENSI MAGISTRO.

PRAECEPTORI, CUI SANCTISSIMO AETERNOQUE PIETATIS OFFICIO OBSTRICTUS EST,

HASCE STUDIORUM SUORUM PRIMITIAS

PIA GRATAQUE MENTE

DEDICAT

AUCTOR.

PRAEFANDA.

Quam tractandam proposuimus, rei natura postulare videtur, ut priusquam ejus disquisitionem ipsam aggrediamur, quo jure hanc potissimum, de qua jam plurimi viri omni, qua possent, diligentia et ingenii acumine disputaverunt, oblata occasione denuo investigare statuerimus, qua par est, observantia exponamus. — Sunt enim, qui postquam viri eruditionis amplissimae, et ingenii sagacitate quam splendidissima praediti, verae differentialium naturae indagationi operam suam navaverint, quae de hac re proferri potuerint, et ad eam illustrandam pertineant, omnia satis soluta dissertaque censeant, atque inutile immo stultum judicent studium, rebus iisdem tributum. Sunt etiam, qui, tot laboribus iterum atque iterum frustra impensis ad removendas disceptationes, quae inde ab inventione calculi differentialis et integralis usque ad nostra tempora clarissimos viros in contrarias sententias distraxerint, nullo tamen detrimento facto doctrinae ipsi, acquiescendum quasi in ista lite sentiant. Utriusque sententiae rationem habendam esse arbitror. — Nam qui operam in hujus rei quaestione collocatam propterea inutilem judicant, quod jam satis sit exhausta, qualibet ratione examinata et tanquam justo saepius vexata; nonne magis in dies accrescere vident numerum illorum, qui, summo ardore inter se dissidentes, suae quisque opinioni ut, quo digna sit, locum vindicet, alterius sententiam funditus evertendam censent, aut qui, veteris alicujus mathematici dictis nimis ardue innixi, istos rerum novarum conatus repellere student? An non tanta discrimina, eademque de principiis et fundamento quasi summae mathesos partis, cujus insignem perspicuitatem et firmitatem non magis quam intimam concordiam admiremur necesse

est, ut sibi quisque, quid sit verum in illis, accuratius perpendat, neve temerius alicujus opinioni indulgeat, studium sollicitent? — At, dixerit quispiam illorum, quos antea, jam desinendum esse ab altercationibus, existimare indicavimus, quae rebus ipsis nullum fructum, iis contra, qui calculi praeceptis imbuti sint, nil nisi taedium afferant, verum, quod quaerimus, fortasse rerum, de quibus agitur, ipsa natura clausum quasi teneri, atque omnino ingenio humano propius ad id accedere vetitum esse. Quis vero credat, modo ne omni calculi differentialis cognitione careat, rem, quam certissimis finibus circumscriptam habemus, ad sui ipsius indolem ac naturam plane cognoscendam aditum omnino non admittere?

Verum quidem omnes, qui de hac re disputarunt, quodammodo intellexere, et sua quisque ratione dixere, dummodo interpretatione utaris, non tam artificiosa, quam libera ab ulla opinione praejudicata, quae nonnisi e scriptorum hujus generis maxime egregiorum ignorantia nasci potuit. Quamobrem tantum abest, ut de invenienda aliquando vera differentialium vi et natura desperemus, ut a primis etiam calculi, qui in ipsis versatur, auctoribus eam perspectam quidem, nec tamen ad popularem intelligentiam accommodate explanatam esse facile credamus. Quae igitur, graviter admoniti a praeceptore longe celeberrimo, summopere nobis venerando, *Thibaut*, de hac re cogitavimus, imprimis "de duplici differentialium notione et indole, tam ad formam quam ad rem pertinente," his paucis, ni vires defecerunt, adumbrare voluimus.

DE DUPLICI DIFFERENTIALIUM NOTIONE ET INDOLE, TAM AD FORMAM, QUAM AD REM PERTINENTE.

Omnes calculi differentialis et integralis disquisitiones circa *quantitates variabiles* versari, inter omnes constat. Quae quidem descriptio rerum, quae ad utramque illam matheseos partem pertinent, quamvis latius adhuc pateat, quam ut doctrinarum ipsarum notionem distinctam exhibere possit; paullulum tamen in ea explicanda haesitabimus, sperantes fore ut ea, quae finem propositum propius accedunt, clariora reddat.

Duo omnino sunt genera quantitatum, quas universa mathesis tractat: alterum *discretarum,* quales sunt numeri, nil nisi rationem indicantium, per quam, proposita notione alterius, unitatis sc., alteram quamque ejusdem generis procreatam esse, mente saltem et cogitatione statuendum est; ita ut in ipsa earum notione certissima quaedam dispartitio innata atque insita sit: alterum vero *continuarum*, inseparata praesertim partium cohaerentia insignium, quales sunt omnes quantitates spatii et temporis. Utriusque tamen generis quantitates minus ut singulae et per se cognoscantur, sed potius ut sua ipsarum in se invicem relatio, lex quasi et norma explorentur, secundum quam aliae ex aliis nascantur, quaestiones mathematicas suscitant. Quibus igitur ex regulis numeri, propositis quibusdam rerum, quas significant vel metiuntur, conditionibus atque junctura, ut ita dicam, naturali, inter se jungantur, quemadmodum, quibus operationibus unus compluresve ex aliis eliciantur necesse sit, doctrinis arithmeticis, algebrae et analysi *) praecipiendum est. Continuarum quantitatum, sicuti linearum, figurarum, corpo-

*) Vocem "analysin" semper et ubique ita intelligi volumus, uti a viro illustriss. *Thibaut*, in praeclaro suo opere, inscripto "Grundriſs der allgem. Arithmetik od. Analysis" factum esse reperimus.

rum, motuum etc. ut naturam, nexus et tanquam vincula, quibus mutuo inter sese coërceantur, plane cognoscamus, haud migratis finibus, quos ejusmodi perscrutationibus rerum ipsa natura imposuit; constructione, mente saltem et cogitatione perficienda, quam perpetua conscientia conditionum, quae singulae cuique originem dent, consequatur opus est, nullo modo carere possumus. Ea quidem est variabilitas et tanquam mobilitas, quam continuarum quantitatum notionem definire volumus, quod sine actu continuo nullam prorsus continuitatis speciem notitiamque tibi conciliaveris. Neque tamen plenam sufficientemque sibi assumat aliquis universae quantitatum continuarum indolis cognitionem, quum, quae constructionis sola contemplatio et intuitus quasi mentalis approbare queat, vel accuratissime perscrutatus sit. Sed multo major opera danda, ut ratio, qua illae inter se junctae sint, numerorum cuidam nexui commendetur. Etenim non tam refert, novisse dimensiones quantitatum continuarum quum illarum, quae conditiones ferunt, tum maxime, quae his obnoxiae sunt, quantas constructio demonstrat, quippe quae in infinitum variant cum exemplis: sed ubi rationem, quam illae ad se invicem habeant, exploraveris, omnia ejusdem generis exempla huic ita obnoxia sunt, ut, quamvis sint varia, omnem tamen commutabilitatem unitatibus s. mensuris committant. Ratio enim nonnisi quantitatibus ipsis ita secum comparatis, ut eas una eademque, vel respondentibus saltem sibi mensuris s. unitatibus metiare, inveniri, immo ne cogitari quidem potest. Quodsi eandem quantitatum, continua variabilitate praeditarum, rationem firmam stabilemque omnes earum partes complecti nec non dirigere animadverteris vel statueris; rite ipsas legi cuidam, fixae et constanti, obedire dixeris. Postulatur ergo ad explorandam vel praescribendam legem, cui quantitates continuae s. variabiles obtemperent, ut earum dimensiones numeris exprimantur, vel minime expressae esse fingantur, neque minus numerorum instar arithmeticum quendam nexum et juncturam ineant, quae earum relationem mutuam definiat. Haec vero ipsa *forma* arithmetica, quae nihil prorsus quantitatum, quas continet, valores singulares curat, sed modum potius et rationem constituit, quibus istae secum colligentur, atque regulam generalem describit, cui, quales quantosve valores singulae induerint, omni conditione subjiciantur — haec, dico, forma legem, duo pluresve quantitates variabiles complectentem, ita exhibet, ut, una vel pluribus ad lubitum determinatis, reliquae eadem semper ratione stabili atque firma ipsis respondeant.

At, dixerit quispiam, numeri, quorum partes certissimis finibus sejunctas esse didicimus, immo qui ipsi nil nisi fines determinant, v. gr.

quum spatii vel temporis dimensiones metiuntur, puncta sola et spatii et temporis distinguunt, quemadmodum fluentem quasi illam partium seriem et variabilitatem, quam ipsam continuarum quantitatum notionem definire vidimus, imitari, immo assequi possint, praesertim quum, quae de lineis rectis jam alioquin certissimis argumentis confirmata est, incommensurabilitas aequo jure de reliquis quantitatibus continuis contendi possit? — Primum quidem illud ita intelligendum esse arbitror, ut non magis absurdum esset, si numerorum serie, quamvis proxime a se vicini abessent, continuum quantitatis variabilis progressum adumbrare et depingere, quam si lineam e punctis componere velles. Nihilominus satis esse ad penitus perspiciendam quantitatem continuam, si quodvis ejus punctum ex regula arithmetica definiri possit, quis neget? Quod autem incommensurabilitatem etiam saepissime repugnaturam esse dictum est, quo minus continuitas numeris deprehendatur; de hac quoque re disserendum. Sed duplicem interpretationem patitur. Nam et illae quantitates variabiles, quae ad lubitum determinandae sunt, infinitos status percurrunt, qui ad unitatem propositam nullo modo revocari possunt, et illae, quae per legis alicujus conditiones his respondent. Utrumque genus in infinitis casibus numeris distincte definiri nequit. Quod vero attinet ad quantitatum primi generis incommensurabilitatem, non est, quod ejus rationem omnino habeamus, statuentes, ut eandem ipsae conditionem subeant, utrum re vera numeris determinari queant, necne. Alterum autem genus ex ipsa lege, cui obedit, irrationalitatem suam trahit, neque idcirco hanc vicissim perturbare, immo irritam reddere poterit.

Sed redeo ad formulam. Haec igitur ita comparanda erit, ut quantitatum, quarum relationem mutuam describat, cunctos valores, nullo intervallo diremtos, et perpetua, ut ita dicam, fluxione alterum in alterum transeuntes, complectatur. Quod vero nullo modo impetrari potest, nisi pro numeris utare litteris, quae, quovis valore admisso, veram continuarum quantitatum speciem praebere possunt, dummodo ipsis variabilitatem concedas, quanquam numerorum ne infinita quidem serie affectandam, quam his natura sua tribuit. Litterae vero, tanquam hac persona indutae — sit venia verbo! — numerorum vere continuorum, sive mavis, variabilium partes agunt.

Quaecunque autem complexio arithmetica, quae unum pluresve numeros variabiles, litteris designatos, continet, qualibet ceterum ratione vel inter se tantum, vel cum aliis quoque constantis pretii junctos, "*functionis*" nomen apud recentiores accepit. Sin autem complexio hujus generis aliqua, in aequationis formam redacta, ad determinandum

alterum numerum variabilem inserviat; hic et ipse *alterius* vel *reliquorum numerorum variabilium*, qui in illa occurrunt, "*functio*" nominatur.

Plerique scriptores *), quanquam hanc solam arithmeticam verbi "*functionis*" vim notionemque definiunt, nihilominus tamen et alteram sententiam, ad res ipsas, quae functionis vinculo coërcentur, spectantem, sub eo subjiciunt. Nam quamque etiam quantitatem continuam alterius vel complurium aliarum, quibuscum legis alicujus conditionibus connexa est, "*functionem*" esse dicunt. Quam quidem sententiam, quemadmodum priori illi convenire necesse sit, cui originem quasi dedit, ex his perspicuum est, quae de hac re jam antea disputata sunt. Sustinet igitur functio legem et normam, qua singuli quantitatum variabilium valores, sibi invicem respondentes, eodem modo omnes tenentur, itaque earum statum universum arithmetice depingit gubernatque.

Attamen non calculi differentialis est, investigare quantitatum variabilium, quarum relationes mutuas functio quaedam exprimit, proprietates, quae, ipsa haud mutata, ex ejus natura consequantur: contra propositis quibuscunque unius pluriumve numerorum variabilium functionibus, eorumque conditione aliqua, quam simul omnes respiciant, stabilita, deinceps vel cunctos vel nonnullos tantum incrementa capere statuit, quorum relationem rationemque ad incrementum illius numeri variabilis, cujus status quilibet functionis conditionibus determinantur, functioni ipsi etiam debitam, accurate exploret.

Meditanti vero de quantitatum var., quae functionis vinculo inter sese restringuntur, vi et natura, discrimen inter illas haud facile elabi potest, a nemine quidem eorum, qui de hac re scripserunt, omnino neglectum, sed a nonnullis non ea, ut opinor, qua par est, diligentia explanatum. Lex relationem supponit atque necessitatem inter duas saltem quantitates contrahit, ita ut, una pluribusve determinatis, altera sine ullo arbitrio lege ipsa definita sit, neque minus variationes, quibus haecce patet, ab incrementis pendeant, quibus illae augentur. Unde apparet, variabilitatem quantitatum, quae legis alicujus vinculis, functione descriptis, secum colligatae sunt, una excepta, omnium nullis conditionibus praeter liberum arbitrium obedire, nisi fortasse altera utraque, ex alienis rursum functionibus derivanda, quantitatibus secundi generis

*) cf. *Euleri* Introd. in analysin infinit. cap. I. — *Lagrange.* Theorie des fonct. analyt. initio. — *Lacroix.* Traité du calcul. diff. et integr. Tom. I. Introd. initio. — *Montucla.* Histoire des mathem. (2de edit.) Tom. III. pag. 265.

annumeranda sit. Ullam tamen esse supremam, quae valores alterius regat, ipsam iis tantum conditionibus obnoxiam, quae possibilitatis fines excedi vetent, faaile est intellectu. Quod quidem quantitatum s. numerorum variabilium, functionibus immixtorum, genus "*absolute variabilium*" nomen accepit. Quae contra quantitas variabilis illis, justa methodo vel inter se tantum vel cum aliis quoque constantis pretii junctis, definienda erit, "*dependens*" appellari solita est. Ubi fieri potest, formam quoque functionis ita comparare placet, ut quidnam munus unicuique quantitatum s. numerorum variabilium sive problematis natura, sive alia causa tribuat, ipsa demonstret. — Idem illud discrimen incrementorum esse, quae utriusque generis quantitates variabiles accipiunt, quis est qui neget? Data enim aliqua illarum junctura, modo absolute variabilibus incrementa addantur, non ulterius definienda; differentia etiam, qua quantitatis var. dependentis valor novus a priori illo discrepat, qui quantitatum absolute variabilium statui nondum commutato respondebat, e lege praescripta proficisci debet. Illa quidem quantitatnm abs. var. incrementa finitam per se ipsam magnitudinem habent: quod vero dependenti inde provenit incrementum calculo indiget, neque idcirco saepissime nisi per series, terminorum numero infinitas, designari poterit. Quaenam igitur sit ista incrementorum inter se relatio, quibus numeros variabiles, quolibet modo, cujuscunque formae functione et inter se et cum aliis constantibus conjunctos, partem, prout libitum sit, alterum ex lege praescripta augeri diminuive statuendum est; in hac re invenienda cunctae calculi differentialis disquisitiones atque praecepta versantur.

Quae quum ita sint, calculum differentialem requirere perspicuum est, ut analyseos vires et regulae quamque complexionem arithmeticam, cui unus pluresve numeri variabiles implicati sunt, pro solis ubique substitutis ipsis una cum incrementis suis (binomio videlicet mononomii loco) ita dissolvere valeant, ut functioni principi sejunctae terminorum series adjiciatur, incrementorum potestatibus gubernata *). Quare efficitur, ut postquam functio prima a posteriore illa, cui terminos quosdam, numerorum variabilium incrementis temperatos, accrevisse posuimus, subducta sit, ipsorum incrementorum mutua relatio proferatur. — En analysis non solum id praestare, immo hanc terminornm seriem ita definire potest polletque, ut, quibus eorum ordo regatur, incrementorum potestatum exponentes numerorum integrorum nec non positivorum

*) cf. *Thibaut.* Analysis pag. 359.

ordinem naturalem inde ab unitate sequantur. Attamen non is analyseos status jam tum erat, quum calculus differentialis simul et integralis inventus est, quorum nova splendidissimaque lux omnibus fere ceteris scientiis, quae a mathesi non plane abhorrent, affulgere debebat. Maximam enim ad partem quaestiones analyticas de calculo diff. originem duxisse, atque ex ejus praeceptis, methodo vere indirecta antea jam demonstratis, quasi emanassse, etsi hoc loco fusius ostendere propositi memores recusemus, quisque tamen haud ignarus insignium horum inventorum historiae facile confitebitur. Ita, ut saepissime fieri solet in excolendis literis, hîc quoque evenit, ut itineribus longe remotioribus altiora peterentur nec non obtinerentur, relictis omnino observationibus, quas rectam viam ad illa suppeditasse ducimus. Magni quidem ingenii est, spectare solummodo, quae propius a fine sita sint, suspicans tantum, certo quodam et securo recti sensu ductum, quae ut fundamenta iis substerstruere possit, quibus tamen eruendis se retardari non sinit. Quos igitur optimo cuique ingenio debemus literarum latissimos progressus ad inveniendas uberrimas veritates, non magis quae illos sequantur, quam quae antecedant, viam muniunt, quasi truncus non solum germina frondesque laetissimas, verum etiam radices copiosissimas agat. — Profecto etiamsi fuerit ille ordo, quo inventores hasce doctrinas ad lucem protulerunt; postquam eas ad summa usque fastigia fere elaboratas habemus, in illum potius, quem rerum natura jubet, pervertendus videtur.

Patebit etiam e natura problematis, quod calculo diff. solvendum esse superiore loco statuimus, et legem aliquam et quantitates var. huic obnoxias re vera existere debere, priusquam de relatione, quam habeant in se invicem ipsarum incrementa, investigatio, dum sensum omnino retineat, admitti possit. Respiciant, inquam, aliquem certe quantitatum var. statum incrementa, quibus illas augeri diminuive volumus, ut et ipsa certa quadam relatione, iis debita; coërceantur. Neutiquam enim differentiandi regulas, hacce conditione repertas, easdem in illas suppositiones valere oportet, quae quantitates var. functionis ergo variabilitatem ipsam una cum illarum lege destruunt, simulque harum regularum rationem tollunt. Cessant quidem differentiandi regulae his casibus, quibus unus alterve vel eodem tempore omnes numeri variabiles, substitutis quibusdam valoribus, evanescunt, sed non ita, ut fidem atque firmitatem generalem proptera iis deroges — id quod initio nonnulli calculorum novorum adversarii, veteribusque methodis nimis dediti, facere conabantur — ut potius admoneare, calculum se illudi non pati, si in absurdam aliquam sententiam incidere nolis, neque ultra justos fines

evehendum, quos interpretatio, rei naturae consentanea, indicat. Itaque tum etiam, quum cessant regulae arithmeticae, eam minime vim retinent, ut peccatum esse contra principia et ad fontes, unde error elapsus sit, regrediendum adhortentur *). — Non otiose haec dicta fore existimamus, quippe quae viam patefaciant, qua differentiandi regularum sic dictae exceptiones recte, ni fallimur, dijudicandae sint.

Quoniam autem de calculi differentialis idea ac sensu disputatum est, ad definiendam differentialium ipsorum notionem via patefacta esse videtur. Sed hujus disquisitionis perspicuitatem valde adjutum iri speramus, si inde ab initio eae functiones, quae unum tantum numerum absolute variabilem, ab illis, quae hujus generis plures complectuntur, plane atque distincte sejunguntur. Deinceps etiam discrimen inter differentialia et numeri var. dependentis et absolute variabilium explicandum erit.

Proposita autem cujusvis formae sive algebraicae sive transcendentis functione unius solummodo quantitatis vel potius numeri (qui quoad computum illius locum obtinet) absolute variabilis, per quam numerus var. dependens determinetur; ubi illi incrementum additur, hic quoque incrementum quoddam, ei obnoxium, capiat in universum necesse est. Quod quidem ut arithmetice describatur, functionem quamlibet, postquam numerus abs. var. incremento suo vel auctus vel diminutus est, analysi juvante, ita resolvi posse vel resolutam esse praesumitur, ut pars altera exacte congruat, cum valore et forma ejusdem functionis ante hanc variationem, altera vero, quae hanc ipsam variationem describat, in seriei formam redigatur, per incrementi numeri abs. var. potestates rationales solummodo (i. e. quae nonnisi numeris integris nec non positivis pro exponentibus gaudeant) gubernatae. Subducta igitur functione ejus conditionis, quam principem fuisse statuimus, *differentia* completa, qua numeri var. dependentis valor praesens discrepat ab illo, qui fun-

---

*) Praeclara sane ac tanto geometra digna est *Lacroix*, v. c. de hac re sententia: — Telle est la circonstance où l'on dit communément aujourd'hui que le théorème de Taylor est en défaut. Je ne sais si cette manière de parler est bien exacte, et si ce que l'on regarde alors comme un paradoxe, n'est pas, comme tous les paradoxes analytiques, plutôt une perfection de l'Analyse qu'un défaut, puisque c'est un moyen d'indiquer les exceptions qui ont lieu dans les formules, et de montrer en même temps comment elles se lient aux autres cas." etc. — Traité du calcul diff. et intégr. Tom. I. chap. III. p. 330.

ctionis statui nondum commutato respondebat, per illam terminorum seriem denotata proveniet. Hujus autem seriei terminus primus atque infimus, nonnisi primi gradus potestate incrementi numeri absolute variabilis multiplicatus, *numeri variabilis dependentis differentiale* vocatur.

Manifesto non idem sibi velle potest nomen *differentiale numeri absolute variabilis*, nihilominus usitatissimum apud geometras. Nam incrementum numeri abs. var., et ipsum absolute variabile, neque ulla alia lege vel conditione nisi e libero arbitrio determinandum, seriem, qua definiatur, nulla profecto ratione poscit. Pro hoc igitur ut nomen *differentiale* aeque ac pro numero variabili dependente valeat, statuendum est, ut hac conditione idem quod *incrementum* numeri abs. var. significet. Differentia enim ejus valoris postsequentis ab antecedente tota et succincta hoc ipso incremento continetur, quod, ubi velis, pro infimo seriei termino habeas licet, cujus omnes termini sequentes $= 0$ supponantur.

Hac ex re satis praecipitur, rationem, quam habet differentiale numeri var. dependentis ad incrementum s. differentiale numeri abs. var., vel sua sponte talem formam induere, vel algebrae ope in eam redigi nunquam non posse, ut a nullo prorsus incremento affecto sit. Cujus quidem *"rationis s. quoti differentialis"* proprie dicti praeclara vis atque gravitas tum maxime enitebit, quum calculus ad res ipsas revocatur.

Sin autem eveniat, ut numerus, qui tanquam absolute variabilis functioni alicui se immiscet, et ipse vicissim ex alia lege pendeat, ita ut ejus incrementum quoque e conditionibus numerisque conditionalibus, quos illa exhibet, derivari nec non substitui in eam formulam jussum sit, qua differentiale prioris numeri var. dependentis computetur: profecto non universam terminorum seriem, per quam id ipsum describatur, in ejus locum immittendum, immo terminum primae solius infimaeque dimensionis, differentiale nimirum ipsum hujus numeri loco totius incrementi substituendum esse, ne omnis differentialis quaesiti species perdatur, vix est quod moneam. Nam in illum locum, qui incremento numeri, quamdiu ad primam solam functionem spectat, tanquam absolute variabilis aestimandi destinatus erat, omni jure succedit incrementum numeri alterius abs. var., cui prior ille rursus per secundae functionis vincula annexus est. Quamobrem ea praesertim conditio, quae differentiale numeri var. dependentis ne ab incrementi numeri abs. var. potestate altioris quam primi gradus regatur vetat, in istud transit. Datae sint v. c. functiones $y = a + bz^2$ atque $z = cx^2$; unde sequitur

$$\Delta y = 2bz\Delta z + b\Delta z^2 \text{ atque } \Delta z = 2cx\Delta x + c\Delta x^2$$

Substitutis autem pro z et Δz valoribus propositis

fit $\Delta y = 4bc^2x^3\Delta x + 6bc^2x^2\Delta x^2 + 4bc^2x\Delta x^3 + bc^2\Delta x^4$

Rescisis autem omnibus post primum terminis

provenit $dy = 4bc^2x^3dx$.

Idem resultat, si extemplo ponitur

$dy = 2bzdz$ atque $dz = 2cxdx$; ergo

$dy = 4bc^2x^3dx$;

vel substituto in ipsa functione principe

$y = a + bz^2$ pro z^2 ipsius valore c^2x^4.

Ergo $y = a + bc^2x^4$. Hinc eruitur

$\Delta y = 4bc^2x^3\Delta x + 6bc^2x^2\Delta x^2 +$ etc.

Itaque $dy = 4bc^2x^3dx$.

Verum enim vero et alteram partem disquisitionis persequamur, quae in definienda differentialium notione atque indole versatur, hac conditione eruendorum, si numerus var. dep. duorum pluriumve numerorum abs. variabilium functio propositus sit. Quod quidem ut re vera illi contingat, imprimis id postulari perspicuum est, ut numeri abs. variabiles, qui in functione aliqua occurrunt, sibi invicem nullo modo obnoxii sint. Nam si unius vicissim reliqui functiones essent, numerus var. dep. re vera huic soli variabilitatem suam deberet. Sin autem functio, per quam is definiatur, plures quam unum numeros abs. variabiles, nulla utique relatione secum cohibitos, continet; numerus var. dep. a singulo quovis privam quandam variabilitatem depromat necesse est, peculiari simul sensu, qui interpretatione indiget, intelligendam. Quot ergo numeros abs. variabiles functio complectitur, totidem diversis variationibus obnoxia est. Quare si numeri var. dependentis, functione hujus generis aliqua descripti, incrementum quaeritur; id multis modis iisdemque maxime diversis et intelligi et definiri potest. Imprimis igitur constituendum, utrum omnes simul numeri abs. variabiles, an unus nonnullive et qui eorum incrementa capiant, ut quid valeant ad determinandum numeri var. dependentis incrementum certe distincteque indicari possit. Sed quum incrementum investigatur, quod hic e variatione singuli cujusdam numeri abs. var. sibi vindicet; id potissimum videndum erit, ut reliqui omnes constantium instar tractentur, quippe quorum statum aliquem fixum firmumve istud respiciat. Seriei autem, quae inde accedat functioni primitivae, terminus primus, incrementi numeri abs. var. designati potestate primi solummodo ordinis multiplicatus, *numeri var. dependentis differentiale ad hunc ipsum numerum revocatum* nomen gerit. Quod quidem ad inveniendum sufficere regulas apparet, quae, quasi numerus var. dep. unius tantum abs. variabilis functio pro-

positus sit, jam antea exquisitae esse debent. Docent autem praecepta calculi differentialis, neque difficile est cognoscere, ex omnium numeri var. dependentis differentialium summa, quorum quodvis ad singulum aliquem numerum abs. variabilem relatum sit, conflari atque effici id, quod functionis, plures quam unum numeros abs. var. complectentis, sive numeri var. dependentis, per eam delineati, *differentiale completum* nominatur. Hanc enim partium summam illius seriei terminum principem infimumque exhibere vel constituere clarum est, qua functio primitiva augeatur necesse sit, si eodem tempore omnibus numeris, quos continet, abs. variabilibus incrementa addantur. Quae quidem series quum hac lege exstruenda sit, ut partes, tantisdem incrementis vel unius ejusdemque vel diversorum numerorum abs. variabilium (quae quantitatum principalium partes agunt) multiplicatae, in terminum ejusdem gradus. s. dimensionis colligantur; ejus terminus primus atque infimus cunctas partes continere debet, quarum quaeque uno tantum ex illis incrementis, ejusque primi gradus potestate affecta est.

Patebit etiam ex hac re, differentiale numeri var. dependentis ad incrementum s. differentiale uniuscujusque numerorum abs. variabilium peculiarem quandam rationem habere, ab incrementis reliquorum prorsus alienatam. Quamobrem ratio differentialis universa hoc casu in tot seorsim quotos differentiales dissolvitur, quot exstant singulae partes, suo quaevis incremento unius ex illis numeris abs. variabilibus affecta.

Sequitur ut nonnulla de notione arithmetica *differentialium altiorum ordinum* afferamus; sed hanc rem paucis absolvere licet, quippe quae nil nisi repetitionem demonstrationis praecedentis desideret. —

Quum enim quamvis relationem inter differentialia et numerorum abs. variabilium et variabilis dependentis denuo functionis instar et haberi et tractari liceat, dummodo de iisdem numeris variabilibus, qui per regulas differentiandi e functione primitiva superstites esse poterant, variabilitatem depromserit: nihil impedire potest, quo minus haec ipsa secundae differentiationi subjiciatur, eadem sc. methodo adhibita, quae, quasi illa relatio tanquam functio primitiva oblata sit, alias jam abunde confirmata est *). Qualis vero sit quantitatum, quae nunc in computum veniunt, indoles, quo munere fungantur,

*) cf. *Lacroix.* Traité du calcul differ. etc. Tom. I. pag. 239.

facile est intellectu. Quoniam enim numerorum abs. variabilium, cum constantibus atque sui ipsorum incrementis junctorum, complexio tota id spectet, ut differentiale numeri var. dependentis determinet; hoc quidem eodem, quo antea ille ipse numerus, munere fungatur opus est; ita ut hujus differentialis differentiale vere *differentiale secundi ordinis* sit. Contra incrementa numerorum abs. variabilium, quanquam indefinita, tamen ut variabilia tractari nequeunt, vel saltem, cur id fiat, ratio probabilis reddi nequit. Ista enim variabilitas, quam differentiale numeri var. dependentis ex hisce sibi vindicet, nulli omnino legi nisi libero arbitrio obedit, ita ut aequabiliter sive in eadem ratione cum iisdem et ipsum simul crescat aut decrescat. Haec vero ratio, quam habet differentiale numeri var. dependentis ad differentiale uniuscujusque numerorum abs. variabilium, simulac functioni primitivae comitem perpetuam sese praebeat, sive numeris abs. variabilibus, qui huic se immiscent, plena sua variabilitate frui permittatur, legem et normam aliquam sequatur oportet, quam functioni etiam primae sive his numeris, qui ejus status temperabant, debet. Omnis itaque secundum legem aliquam variandi facultas in his numeris abs. variabilibus, qui e functione principe in valorem differentialis primi numeri var. dependentis transiverunt, relicta est: quorum vero incrementa, ubi secundo differentiatur, factorum constantium munus tueantur. Quae quidem differentiatio secunda, ad coëfficientes, quibus quodvis incrementum numeri abs. var. affectum erat, revocata, quoniam rursus terminum, unam pluresve partes complectentem, evolvit, quarum quaeque per se numeri abs. var. incremento uno tantum ejusque primi gradus potestate multiplicata est: assumtis illis, quae jam primi differentialis numeri var. dependentis valorem regebant, ejusdem *differentiale secundum* vel termino uni vel complurium summae congruit, per *bina* quidem vel ejusdem vel diversorum numerorum abs. variabilium incrementa multiplicatorum.

Ratio autem, quam habet numeri var. dependentis differentiale secundum ad productum binorum incrementorum abs. variabilium, *ratio* s. *quotus differentialis secundi ordinis* appellatur. Ubi numerus var. dep. unius tantum numeri abs. var. functio datus est, ejus differentiale secundum terminum etiam unum, quadrato incrementi numeri abs. var. multiplicatum, exhibet, per quod dividendum est, ut ratio differentialis secundi ordinis completa resultet. Contra numeri var. dep. differentiale secundum, e functione plurium numerorum abs. variabilium derivatum, ad bina illorum incrementa privam quandam rationem habet. Sequitur autem ex his, quae in superioribus disputata sunt, quamvis rationem

differentialem secundam et pro ratione differentiali prima illius quoti differentialis primi, ex quo orta est, haberi posse.

Hac ipsa contemplatione iterum atque iterum renovata, quam similes operationes arithmeticae prosequantur opus est, notio atque definitio differentialium numeri var. dependentis *tertii*, *quarti*, *quinti* etc. in genere n^{ti} gradus ex ordine orientur. Quae quidem quum in ea numeri var. dependentis indole vertantur, quod ejus status quilibet una cum quoque ejus differentiali praecedente determinationi per alios ad lubitum variabiles obnoxii sint, ea nimirum conditione, ut haec differentialia variabilitatem legalem vel ad limitem quendam, vel in infinitum reservent: non amplius approbandum videtur, cur non aeque, ac antea factum est, notionem definitionemque differentialium altioris quam primi ordinis etiam in incrementa numerorum abs. variabilium transferri extendique liceat.

Quam vero hactenus adumbrare et definire studebamus, differentialium primi altiorumque graduum notionem *arithmeticam* praeclarorum virorum, qui de hac re scripserunt, sententiis usque adeo convenire credimus, ut pluribus supersedere nobis liceat. Quas enim *Angli*, magno *Newtone* duce, *fluxiones quantitatum fluentium* appellant, quod attinet ad earum expressionem arithmeticam, non differre a nostris *differentialibus numerorum variabilium*; *Lagrangianas* autem *functiones derivatas* convenire cum nostris *quotis differentialibus*, nemo nescit.

Sed propterea regulae differentiandi maxime valent vigentque, dum earum vim arithmeticum solam respicias, quod non solum primum, verum etiam omnes hunc sequentes terminos illius seriei (recurrenti saltem methodo) suppeditant, per quam cujusvis numeri var. dependentis, qualiscunque fuerit functio unius pluriumve numerorum abs. variabilium, incrementum completum definiendum est. Nam si ille unius tantum numeri abs. var. functio fuit, quodvis ejus differentiale altioris ordinis, ut seriei quaesitae terminum eodem indice, quo ipsum gradu, gaudentem praebeat, nil amplius indiget, nisi quod per productum numerorum integrorum omnium ex ordine usque ad illum assurgentium dividatur, qui ejus gradum indicat. In hac demonstratione theorema, ab inventore *Taylorianum* nominatum, versatur, quod parum quidem atque leviter immutatum de functionibus plurium quoque numerorum abs. variabilium contendi potest. Plerique id serierum s. d. finitarum natura initi docent. Quod quidem argumentum non plane mihi satisfecisse confiteor, praesertim ideo, quod non tam rei ipsius naturam consulere, quam a

doctrina illi aliena adjuvari videtur. Recte naturaeque convenienter hanc demonstrationem eis praeceptis initi debere existimamus, quae in evolvenda qualibet complexione, postquam loco numerorum principalium ipsos una cum incrementis in se receperit, versantur. Inchoatum hoc opus primisque lineamentis circumscriptum reperimus apud virum illustriss. *Thibaut* in praeclaro de *Analysi* libro cap. XIV. pag 356 seqq. Attamen de hac re fusius loquendi hic locus non adest.

Sequitur, ut ad ea, quae verbi *differentialis* sententiam arithmeticam definire propemodum vidimus, res quidem ipsas, ad quas pertinet, adaptemus. Quae quidem investigatio illius verbi multo majorem praestantioremque vim atque virtutem patefaciet. Numeri enim, quamvis et per se digni sint, quibus omne studium, omnem laborem et operam navemus, maxime tamen tum demum valent vigentque, quum ad quantitates ipsas referuntur, quarum indolem ac naturam, occultiorem nonnunquam mirabilemque aperiunt.

Functionem igitur quamcunque legem praescribere constat, qua duo pluresve numeri variabiles inter se revinciantur. Quantitates ergo, quarum vicibus illi funguntur, continua variabilitate praeditâe, quavis conditione ex eadem lege sibi invicem respondent. Sed ut calculi praecepta sequamur, ad ipsarum incrementa potius animum attendamus. Simulac autem de his agitur, quorum relationem mutuam arithmeticam quidem differentiandi regularum ope explorari licet; facere non possumus, quin ipsarum quantitatum variabilium conditionem aliquam stabilitam cogitemus, unde incrementa proficiscantur et ad quam referantur. Ullum enim harum statum sisti debere, priusquam de incrementis omnino deliberatio fiat, atque quem semel posueris, dehinc pro fixo immutabilique habendum esse, quis est qui dubitet? Omnem igitur quasi ulterius prolabendi facultatem totumque suum munus quantitates variabiles incrementis committunt. Quod enim erat absolute variabilium, dependentis valorem regere, id in illarum incrementa transit; hisque solis deinceps incrementum quantitatis var. dependentis commutabilitatem suam debet. Quod vero valores ipsarum quantitatum variabilium proficiunt in determinando illo, si quid proficiunt, id nonnisi constantium instar faciunt. At differentiale numeri var. dependentis seriei, per quam ejus incrementum completum computaretur, terminum primum infimumque solum exhibet, tot partes singulas complectentem, quot occurrebant in functione proposita numeri abs. variabiles, quarum quaevis suum horum alicujus incrementum ejusque primi solummodo

gradus potestatem factorem continet. Quoniam autem in superioribus, differentiale numeri var. dependentis, siquidem is complurium abs. variabilium functio fuerit, ad illorum unius cujusque incrementum priva et singulari quadam ratione teneri, docuimus, et a commutabilitate et ab incrementis reliquorum plane sejunganda; deinceps sermonem nostrum sic comparavisse satis habebimus, ut nonnisi ad unum numerum s. quantitatem abs. variabilem differentiale numeri s. quantitatis var. dependentis revocatum esse praesumatur. Quae enim hac lege inveniuntur, aequo jure etiam iterum ac saepius, quamvis variis modis, intelligi licet.

Atqui ista binarum quantitatum variabilium, numeris designatarum, junctura, per quam altera cum alterius producto in factorem constantem congruit, manifesto huic tantum interpretationi patet: unam ad alteram fixam firmamve quandam rationem habere; sive in eadem proportione utramque crescere et decrescere; denique alteram tanquam dependentem ab altera ducendam *aequabilem* et *conformem* fieri. *Differentiale* ergo *quantitatis var. dependentis*, ad incrementum quantitatis abs. var. eandem semper rationem servans, quales quantosve huic valores tribuere velis, tale ejusdem incrementum denotare liquet, quale acciperet, si inde a statu arrepto *aequabiliter* s. in *stabili quadam ratione* cum incremento, quod deinceps quantitati abs. variabili permittitur, prolabendi veniam haberet.

Idem est, quod variandi facultatem, qua quantitatem variabilem dependentem loco vel momento stabilito exstructam esse fingimus, ab ejusdem differentiali deprehendi sistique dicimus. Facultatem enim, quacum aliquid fiat, postquam ejus notitiam facti ipsius naturae depromsimus, facto rursus tanquam causam suggerere solemus. Quod vero cum constanti facultate fieri intelligimus vel praesumimus, id per omnes partes aequabile factum esse volumus. Atqui differentiale cujusvis quantitatis var. dependentis, qualiscunque ceterum ea fuerit absolute variabilis functio, talem ejus progressum describere constat, qualem faceret, si extemplo ipsi aequabili fieri liceret: ergo id ipsum variandi facultatem, quam statu, unde proficiscitur, quantitas var. dep. adepta sit, sibi arrogasse incolumemque per spatium vel tempus sibi permissum reservasse dicitur. Quam vero facultatem ipsam quemadmodum emetiri atque arithmetice describere possimus, quis nondum viderit? Aequabilem enim quantitatem variabilem eam esse, supra dictum, cujus partes omnes cum constanti immutabilique nascendi facultate gignantur: an non idem sibi vult, ubi dixeris, quantitatem variabilem, quam alteri

cuidam (et ipsi aequabili) obnoxiam esse fingimus, aequabilem fieri, si ad hanc eadem per omnes partes ratione restringatur? Haec igitur ipsa ratio inter utramque, quam re vera sibi constare semper et ubique animadvertimus, notioni facultatis nascendi, quacum altera dependens fiat, plane distincteque respondet. *Ratio* ergo seu *quotus differentialis* illam *quasi prolabendi facultatem*, quacum quantitas var. dependens e statu quovis arrepto tanquam prodire studet, juste recteque exprimit.

Vituperationi nobis futurum esse non veremur, si ob magnam rei tractatae vim et gravitatem inversa etiam consecutione approbare studemus, in idem ipsum differentiale incidere debuisse investigationem, quum, proposita quantitate continuae variabilitatis, legi tamen alicui, quam functione comprehendere licuerit, obnoxiae, quaeratur methodus s. regula, per quam illius commutandi facultas quovis loco vel momento deprehendi recteque definiri queat. Imprimis igitur quantitatis abs. var. conditio aliqua, cui secundum legem praescriptam et certus quidam quantitatis var. dependentis status respondeat, sistenda vel minime stabilita esse fingenda. De hac vero, quacum ipsa loco vel momento designato quasi ad ulterius progrediendum expedita sit, facultate neminem credo fore, qui prius judicandi conatum faciat, quam eam ultra limitem propositum re vera excessissse vel animadverterit vel minime finxerit. Nulla enim quantitas hac conditione, qua fit et nascitur, sed tum demum, quum facta est, quaestionem definitionemque mathematicam subit. Quod autem quantitati variabili dependenti tribuendum esse dicitur incrementum, de nulla alia causa nisi ab incremento, quantitati abs. variabili insuper permittendo, proficisci potest. Quod quidem ut supputetur, in data functione loco valoris, quantitati abs. variabili antea destinati, hunc una cum incremento, ad lubitum determinando, substitui necesse est. Differentia, qua functionis valor praesens discrepat a priore, unde oritur, incrementum quantitatis var. dependentis completum suppeditat. Haec vero in universum secundum analyseos praecepta seriei formam induet, nonnisi potestatibus rationalibus incrementi quantitatis abs. var. gubernatae. Verum enim vero id maxime interest, ut hoc incrementum tale instruatur, quale factum esset, si facultatem, quacum fieri coeptum est, quasi in se recepisset atque per spatium vel tempus sibi permissum integram retinuisset, h. e. si e statu arrepto aequabile atque conforme evaderet. Quod quidem sua sponte illi incremento evenire nequit, nisi quantitas var. dependens, ad quam pertinet, et ipsa aequabilis fuerit, sive ad quantitatem abs. variabilem eadem

per cunctas partes ratione stabili ac fixa teneatur *). Quo pacto suam ipsius naturam communem etiam cum incrementis semper et ubique habet. Sed multo saepius id incrementum, quod re vera capit quantitas var. dep., per seriem generis propemodum definiti adumbratur. Haec vero aequabilem et conformem illius progressum designare nequit. Qualis quidem ut impetretur, nonnisi a prima potestate incrementi abs. variabilis, de quo solo commutabilitatem suam trahit, regatur opus est. Quo facto hic constantem sibi rationem ad illud retinet. Quae vero rationis constantia una cum aequabilitate quum simul perderetur, ac termini altioris quam primi gradus potestate, v. gr. quadrato incrementi abs. var. affecti reciperentur, quibus incrementum quantitatis var. dependentis quaesitum determinaretur **): ergo primum tantum infimumque seriei propositae terminum, nonnisi prima incrementi quantitatis abs. var. potestate multiplicatum, *differentiale* nimirum quantitatis var. dependentis retinendum esse apparet, quo talis ejusdem progressus definiatur, qualem faceret, si e conditione stabilita cum inhaerenti semel ulterius tanquam prolabendi facultate, sive aequabiliter, sive in ratione constanti cum incremento, quod deinceps qaantitati abs. variabili tribuendum est, procedere ipsi liceret. — Quaesitae autem variandi facultati ipsi rationem s. quotum differentialem respondere, superiore loco jam demonstratum est.

Sed antequam novi aliquid incipiamus, elaborandis perscrutandisque nonnullis exemplis rebus, quae hucusque nimis in genere versantur latiusque spectant, majorem, ut opinor, fidem facere juvabit. At cuinam potius inter haec primus locus debetur, nisi problemati, curvae cuilibet lineae quovis loco *tangentem* applicandi, quod principem et

---

*) Data sit v. gr. functio $y = bx$; ratio ergo ipsius y ad x erit $\frac{y}{x} = b$; quam eandem etiam incrementa in se invicem habebunt; nam $\Delta y = b \Delta x$; ergo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = b$.

**) Sit enim $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 +$ etc.
Inde sequitur $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + C\Delta x +$ etc.; h. e. rationem incrementi var. dependentis ad absolute variabile, et ipsam huic ad lubitum variabili Δx obnoxiam esse, ergo aliam fieri, si hocce commutetur. Contra $\frac{dy}{dx} = A$ in tempore constans fit.

gravissimum fere ad inveniendum calculum differentialem deinceps et integralem incitamentum fuisse, nemo ignorat?

Linearem quemvis tractum, in plano eodem insitum, quasi per ultimum lineae rectae punctum describi, quae sibi ipsi parallela h. e. sub eodem semper angulo, quem rectum ponamus, alteri cuidam fixae directionis applicata moveatur, cogitandum esse, geometria analytica docet. Qui vero tractus ut legalis sit, utriusque hujus lineae systema, quo ad definiendum quodcunque ejus punctum utimur, stabilem quandam regulam et normam sequatur, i. e. alterius describentis lineae, cui *applicatae* s. *ordinatae* nomen tribuitur, dimensio ex alterius lineae rectae, quae *abscissa* vocatur, longitudine certa quadam ratione pendeat opus est; ita ut, quae harum quantitatum, continua variabilitate praeditarum, vices capiant, signis receptis, hanc *coordinatarum* mutuam relationem functione aliqua comprehendi liceat.

Dum illum tractum et ipsum lineam rectam esse velis, ejus coordinatarum in se invicem rationem sua sponte constantem esse, jam elementa geometriae probant. Ejus aequationis forma maxime generalis est $y = a + bx$; ubi per b tangentem trigonometricam anguli illius significari apparet, quem cum directione abscissae faciat. Quoniam ejusmodi ordinatae facultatem crescendi et per se quovis loco sibi constare, ex intuitu aequationis aeque ac ex ipsa quantitatis propositae, simplicis et aequabilis natura concludi potest — pars variabilis ipsius y ad quantitatem x, quacum mutatur, firma ratione $= b$ tenetur —; sane ad eam determinandam calculo differentiali non opus est. Sed et ipse affirmat, esse $\Delta y = b \Delta x$, itaque $dy = b dx$, ergo $\frac{dy}{dx} = b$.

Sin autem coordinatarum, ad quas tractus linearis referatur, nexus talis propositus fuerit, quali ordinatae valores ad diversos abscissae valores, quibus respondent, quamvis minime a se distent, nequaquam eandem et constantem sibi, sed variabilem cum his ipsis rationem habeant: per quamcunque functionem hujus generis, quod latissime patet, legem alicujus *lineae curvae*, cujus videlicet nulla ne minima quidem pars recta esse potest, denotari quis nesciat? Sicuti autem nullo alio nisi eo, quo factum est, modo curvae lineae notio definiri potest; ita tum etiam, quum ejus ideam solam mente nobis comparamus, facere non possumus, quin eam tanquam per punctum mobile describi fingamus, quod continua lege e directione, quam modo ingressurum fuisse

credimus, reflectatur. Nisum certe quendam et appetitum ei tribuimus evagandi quolibet momento e tractu curvilineo et persequendi directionem semel adeptam, cui si obtemperaret, linea recta procederet. Neque hujus lineae ejusque praesertim directionis, cujus et curvam loco designato participem esse improprie quidem dicimus, obscuram fortasse et indefinitam, immo vel exactissimam notitiam habere sibi quisque videtur; ita ut lineam curvam tanquam per puncti sese moventis declinationem infinitam e linearum rectarum perpetuo aliarum directionibus ortam esse omnium hominum intellectui placere videatur. Is enim omnibus communis est sensus, ut ad simplicia et aequabilia, quorum quidem notio necessaria quodammodo nemini deest, quaecunque ab ipsis differant, vel comparando vel discernendo reducere summo opere studeant. — At, dixerit quispiam, ista, quam etsi communi omnium sensui convenire affirmemus, conditio rerum naturae illata potius quam depromta esse videtur; immo, quid denique adjuvet ad determinandam quam quaerimus regulam, ex qua quovis loco lineae curvae tangens applicari possit? — Profecto in illa argumentatione totum tangentium problema verti contendimus; neque idcirco eam omittendam esse credidimus, quod mirum quantum determinatio tangentium arithmetica, concinna atque distincta cum illa conveniat, eamque quasi vestigiis consequatur. Quam enim lineae curvae quovis loco attribuimus facultatem in rectam quasi effluendi, calculi differentialis ope certissimis finibus describi potest. Nam talem illam lineam rectam intelligi perspicuum est, qualem iniret curva, si facultatem aut appropinquandi ad certam quandam directionem, aut ab ea removendi constantem deinceps sibi reservasset, sive necessitati ex ipsa deflectendi sese subduxisset. Quoniam autem quamvis lineam curvam per punctum supremum ordinatae, secundum legem aliquam una cum abscissa sua crescentis aut decrescentis, describi fecimus; quam curvae ipsi imponere voluimus, conditio ita ad ejus coordinatas referenda erit, ut incrementum, quod inde a loco deprehenso ordinata capiat, ad id, quod deinceps abscissae tribuitur, rationem stabilem atque fixam retineat. Quo facto punctum finale incrementi ordinatae, quod proportionaliter cum abscissae continuatione, cui respondet, continuam statuum seriem percurrere fingimus, linea recta procedere oportet. — Fac igitur sistatur lineae curvae punctum quoddam, ad coordinatas suas relatum; quae dehinc ordinata capiat, incrementa in universum eis, quibus abscissa augetur, ita obnoxia sunt, ut aliis alia ratione respondeant; sin minus, tractus, quem curvilineum esse posuimus, jam sua sponte rectus fieri debebat. Quaeritur autem tali horum incrementorum nexus, ut, quem quantumve induat valorem alterum abs. variabile, abscissae sc., alterum inde dependens eandem sem-

per rationem ad ipsum habeat. Verum enim vero istam incrementorum juncturam differentiale functionis propositae, statui deprehenso accommodatum, exhibet. Quod enim per id designatur ordinatae incrementum cum inhaerenti semel nascendi facultate i. e. aequabiliter s. in stabili fixaque proportione cum abscissae incremento oritur. Haec igitur ratio differentialis hic manifesto facultati, qua curva loco arrepto instructa putanda est, a directione abscissae in unam alteramve partem declinandi respondet. Quae quum deinceps sibi constet, si abscissae incrementum, plena sua variabilitate gaudens, a puncto, unde ordiendum est, prolabitur; punctum summum differentialis ordinatae, quod continuam illius statuum seriem prosequitur, lineam rectam percurrere semperque in eandem incidere opus est, quantumvis distet a curvae puncto, unde proficiscitur. Quodlibet itaque ordinatae differentiale, ad arbitrarium quoddam abscissae incrementum pertinens, ad plane determinandam lineae quaesitae directionem sufficit. Haec vero linea recta est, ex qua curvam, dum continuatur, quasi deflecti, cujus directionis ergo et ipsam loco designato participem fuisse fingimus. Quovis enim seriei, per quam ordinatae incrementum completum supputatur, termino posteriore praeter differentiale etiam recepto, nihil aliud efficitur, nisi ut finis incrementi, tali modo descripti, ex illa retrahatur. Quamobrem haecce linea recta curvae directionem loco deprehenso sibi vindicasse, sistere, seu curvam ibi *tangere* optimo jure dicitur.

Restat adhuc, ut illius, quam juxta descripsimus lineae rectae, curvam tangentis, directionem et situm geometrice etiam definiamus. Quo quidem nihil facilius esse videtur. Nam si abscissae incrementum arbitrarium quoddam in directione sua inde a curvae puncto, quod stitimus, porrectum, atque quod ei respondet ordinatae differentiale sub angulo recto in ejus fine impositum est; illa linea recta, quae utriusque fines conjungit, hypotenusa videlicet trianguli rectanguli, ab illis distincti, quod *triangulum characteristicum* proprie nominatur, tangentem lineae curvae repraesentat. Per quotum ergo $\frac{dy}{dx}$ tangentem trigonometricam illius anguli denotari apparet, quem linea tangens cum abscissae directione facit. Coordinatarum tangentis aequatio fit $y' = y + dy$, sive mavis $y' = y + \left(\frac{dy}{dx}\right) \Delta x$; si per y ordinata illius curvae puncti, unde tangens orditur, per $\frac{dy}{dx}$ quotus differentialis, ad eandem conditionem accommoda-

tus, designatur, ita ut in tempore et y et $\frac{dy}{dx}$ pro constanti habendum sit, y' autem de variabili ad libitum Δx solo commutabilitatem suam promat. Quatenus igitur aequatio lineae rectae generalis $y = a + bx$ cum hac conveniat, facile est intellectu.

Qualiscunque ceterum sit et ipsius y, et qui ipsi se accommodat quoti $\frac{dy}{dx}$ valor, cui uterque per datae cujusque functionis aeque ac per lineae curvae, inde progenitae, indolem ac naturam patet; formula proposita aequali modo in omnes valet. Quare hanc regulam generalem exhibet, ex qua cuivis curvae loco quolibet tangens applicanda sit, ut quem faciat cum abscissae directione, anguli tangens trigonometrica rationem differentialem, ad statum propositum relatam, aequet. Singulares tamen utriusque quantitatis valores, qui illi non obediunt, infra examinabuntur.

Quam tali modo tangere curvam diximus lineam rectam, cujus situm et directionem vel exactissime determinavimus, proxime etiam abesse a curva, arctiusque ad eam accedere, quam ut inter ipsam et curvam ulla alia linea recta ad punctum, unde utraque proficiscitur, duci possit, quin pluribus simul punctis, secundo minime, in curvam incidat — id quod vulgo tangentis notionem definire dicitur — ita in promtu esse videtur, ut vix disputatione egeat. Nam si altera etiam linea recta fingatur, quae ab eodem, quod stitimus, curvae puncto evecta inter ipsam et tangentem viam suam tendat; ejus aequationem, ad curvae abscissam relatam, sub forma $y'' = y + m\Delta x$ comprehendi licet; dummodo id cures, ut Δx solummodo ipsius y'' commutabilitatem constituat. Quum igitur et curva et tangens et haec linea hypothetica ab eodem puncto simul progrediuntur, ordinatae earum, quae eidem absolute variabili Δx respondent, inveniuntur:

1. curvae ipsius: $Y = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x + \left(\frac{d^2 y}{1.2.\, dx^2}\right)\Delta x^2 + \text{etc.}$

2. tangentis: $y' = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$

3. lineae r. hypoth.: $y'' = y + m\,\Delta x$

Manifesto autem, ut linea recta hyp. re vera inter tangentem et curvam jacere possit, nullum omnino nisi id, unde simul exeunt, punctum cum

hac commune habens; ejus distantiam a tangente, per $(y' - y'')$ supputandam, semper illa minorem esse oportet, quae inter hanc et curvam interjecta est, puta $(y' - Y)$. Quaeritur itaque, utrum quavis conditione

$$y' - y'' < y' - Y \text{ h. e.}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} - m\right) \Delta x < - \frac{d^2 y}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} \cdot \Delta x^2 - \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} \cdot \Delta x^3 - \text{etc.}$$

$$\text{sive } \frac{dy}{dx} - m < - \frac{d^2 y}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} \Delta x - \frac{d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} \Delta x^2 - \text{etc.}$$

fieri possit? — At hanc formam postulare perspicuum est, ut differentia duorum numerorum constantium $\left(\frac{dy}{dx} - m\right)$ seriei per potestates quantitatis Δx gubernatae summa perpetuo minor sit, quemcunque haec valorem, prorsus ad lubitum definiendum, induat. Quo quidem nihil absurdius excogitari potest, quum ipsius Δx valor sine contradictione tam parvus reddi possit, ut, quantumvis resistant coëfficientes, totius seriei summa quemlibet exiguitatis gradum excedat.

De *substangente*, *normali* et *subnormali*, quae linearem solam rationem ad tangentem habent, verba non amplius faciam.

Sed ad explicandam differentialis, tam ad formam quam ad rem spectantis, vim et naturam imprimis idoneam esse arbitror disquisitionem, quae in definienda ac denotanda *celeritatis* notione versatur.

Quisque igitur motus rectilineus legi alicui obnoxius esse dicitur, si spatium quodlibet ab eo percursum necessaria quadam ratione tempori, quod in eo percurrendo praeterlabitur, respondet. Quae quidem spatii ad tempus relatio, functione, cui ipsorum valores velut quantitates variabiles se immiscent, $s = f(t)$, comprehensa, motus legem constituit. *Motus aequabilis* is nominatur, qui paribus temporis intervallis spatia aequalia decurrit: functione ergo, qua regatur, indiget hujus formae: $s = bt$. Celeritatem constantem servare, sive cum eadem movendi facultate vel minimam quamvis itineris partem conficere dicitur: quum autem duo pluresve motus aequabiles inter se comparantur, ejus celeritas major aestimatur, qui eodem quo alter tempore majus spatium percurrit. Itaque voce "*celeritatis motus aequabilis*" significari perspicuum est rationem, quam ejus spatium habet ad tempus, in eo percur-

rendo consumtum. Valorem autem ejus arithmeticum suppeditat quotus $\frac{s}{t} = b$.

Attamen motui etiam non aequabili, ita sc. comparato, ut per aequalia temporis intervalla continuo sese sequentia nequaquam ejusdem dimensionis spatia, immo majora usque, si motus *acceleratus*, minora, si *retardatus* sit, percurrantur, nihilominus celeritas quaedam tribuitur, quanquam illam ne his quidem momentis, quae vel minime inter se discrepant, sibi constare concedimus. Crescere aut decrescere dicitur celeritas motus hujus generis. Quod quomodo intelligendum sit, quin verbo celeritati vis adhibeatur, immo quam bene disquisitio mathematica sermonis consuetudinem ducem sequatur, facile monstrabitur. In motu igitur non aequabili quovis loco vel momento celeritatem s. movendi facultatem quandam, quae perpetuo augeatur aut diminuatur, inesse confitemur. Quam vero ut deprehendamus, aliqua motus pars servaverit necesse est. Quamdiu enim facultas in eo tantum est, ut efficiat aliquid, neque re vera id facit, nullum nobis de ejus natura judicium; sed ubi eam per tempus quoddam constanter egisse cognovimus, hanc plane perspicere nobis licet. Talem autem illam celeritatem, quacum loco deprehenso motum inaequabilem ad ulterius progrediendum expeditum esse fingimus, intelligi clarum est, qualem hic ostenderet, si deinceps aequabilis continuaretur. Quam enim e statu arrepto progressus per tempus postsequens Δt constantem retinuerit, celeritatem indidem secum reportasse videtur. Quamobrem haecce jam initio s. termino, unde motus aequabilis exit, viguisse pleno jure dicitur. Imprimis igitur opera danda, ut talis motus non aequabilis progressus describatur, qualem conficeret, si e loco, quem stitimus, aequabilis s. in stabili quadam proportione cum temporis incremento ($\Delta t = dt$) prolaberetur. Hunc vero spatii *differentiale*, nonnisi temporis incrementi prima potestate affectum plane distincteque praestat. Quovis seriei, qua verum et completum spatii incrementum computatur, termino altioris etiam gradus admisso, motus aequabilitas denuo perturbaretur. Hoc ergo ipsum differentiale ds, ad conditionem propositam relatum, movendi facultatem s. celeritatem, quam motui non aequabili ibi tribuimus, sistit, neque per temporis intervallum sibi permissum Δt s. dt variari sinit. Atqui motum aequabilem describit. Ratio ergo, quam habet spatii differenrentiale ad temporis incrementum s. differentiale, per quod decurritur, quotus vid. differentialis $\frac{ds}{dt}$ motus non aequabilis celeritatem s. mo-

vendi facultatem loco eo, ad quem accommodatus est, sistit atque exacte exprimit.

Attamen de differentialium altioris etiam, secundi saltem ordinis vi ac sensu, quum ad ea, quae ipsorum naturam arithmeticam definiunt, quas significant, rerum ipsarum indoles refertur, nonnulla disserenda esse videntur.

Secundi quidem gradus differentiale erui supra dictum, si ratio s. quotus differentialis primus novae iterum functionis instar differentietur. Quem vero quum quovis loco vel momento pro constante habendum esse gravissime praeceptum sit, unde rursus variabilitatem sibi vindicet, fortasse interroget qnispiam. At in superioribus non nisi de fixo quodam statu vel termino stabili in tempore loquuti sumus. Hoc autem nihil impedire potest, quo minus differentialium vicissim rationem, quasi comitem perpetuam, una cum quantitatibus, ad quas pertinent, continuam statuum seriem percurrentibus vel, ut ita dicam, perfluentibus et ipsam continuae variabilitatis speciem prae se ferre atque functionis munus tueri fingamus. Quibus permissis nil amplius obstat, quin, mutatis mutandis, prior disputatio simili modo repetatur. Itaque functionis primitivae differentiale secundum ad ejusdem differentiale primum non aliter sese habet, quam hoc vicissim ad functionem ipsam. Manifesto igitur secundi ordinis differentiale talem differentialis primi conditionem describit, qualem subiret, si e statu quovis deprehenso aequabile et conforme, h. e. in proportione firma cum proximo quantitatis abs. var. incremento evaderet. Quotus ergo differentialis secundi ordinis variandi facultatem, quae in ratione differentiali prima statu quovis arrepto insita est, accurate exprimit. Ubicunque igitur ratio differentialis primi gradus constans fieri nequit, secundi certe differentialis idea non solum recipi, verum etiam describi, interdum etiam, quae ipsi respondeat, peculiaris cujusdam rerum naturae ratio reddi potest.

Coordinatarum quidem lineae curvae rationi differentiali, quam tangentem trig. illius anguli, sub quo linea tangens curvae applicanda est, definire cognovimus, commutabili una cum abscissa, quod iterum differentiatae notionem peculiarem nomenque proprium suppeditemus, causa nondum adfuit. Illam enim aequationem differentialem novae iterum curvae legem constituere, ut proponitur a *Montucla* v. c. *), neque rei ipsius naturae convenire, neque utilitatem aliquam praebere videtur.

---

*) Histoire des mathémat. Tom. II. p. 375.

Aliter res sese habet, quum ad alterum exemplum revertimur. Motus enim inaequabilis celeritatem ne uno quidem temporis puncto intermisso sibi constare, sed potius variari cum tempore intelleximus. Quare ejus valorem a tempore quoque praeterlapso quodammodo determinari s. temporis functionem esse oportet $\frac{ds}{dt} = c = \varphi(t)$. Quodsi temporis valori, quem haec functio complectitur, plena sua variabilitate frui permittitur, universus celeritatis status, motum ipsum perpetuo consequutus, per illam adumbratur. Cujus igitur functionis differentiale $= dc$ talem velocitatis variationem describit, quali gauderet, si statu quovis deprehenso ipsius variandi facultas stabiliretur. Quod enim ita caperet incrementum, aequabile s. in ratione constanti ad temporis incrementum foret, per quod factum est. Unde simul apparet, quoto $\frac{dc}{dt}$, qua celeritas tempore, ad quod spectat, potita est, variandi facultatem sisti recteque exprimi. Qui vero quotus quid valeat, ad functionem principem $s = f(t)$ revocatus, ut intelligatur, meminisse oportet, fuisse $c = \frac{ds}{dt}$; ergo $dc = d\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt}$; unde sequitur $\frac{dc}{dt} = \frac{d^2s}{dt.dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ (quia ratio probabilis reddi nequit, cur ipsi dt, prorsus ad lubitum determinando, alius valor in prima, alius in secunda differentiatione tribuatur).

Quam autem per hunc quotum differentialem $\frac{dc}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ denotari vidimus celeritatis variandi facultatem, cui si obtemperare potuisset, incrementa aequabilia deinceps et postsequenti temporis intervallo proportionalia cepisset, hanc sermone litterato motus *accelerationem* nominare consuevimus. Motus aequabiliter acceleratus esse dicitur, si ejus celeritas eandem omni tempore crescendi aut decrescendi facultatem, sive quotus $\frac{d^2s}{dt^2}$, ex ejus lege derivandus, valorem constantem obtinet. Hujus generis motum exhibet functio $s = gt^2$. Invenitur enim $c = \frac{ds}{dt} = 2gt$ atque $\frac{d^2s}{dt^2} = 2g$.

Cum hac accelerationis definitione notio *vis* s. *potentiae* mechanicae intime conjuncta est. Quam enim nos definivimus celeritatis facultatem perpetuo crescendi aut decrescendi, quamque per rationem spatii cujusdam ad tempus, in eo percurrendo consumtum, determinavimus;

hanc vulgo pro causa habent, quae motus celeritatem augere aut diminuere nunquam cesset. Sane mirum esse posset, quomodo communis hominum sensus notionem tam reconditam subtilemque sine calculi abstrusioris ope sibi evolverit; sed non ignorandum, antequam calculus differentialis inventus est, eam exacte et arithmetice exprimi nequivisse. Neque idcirco ii non vituperandi esse videntur, qui potentiae mechanicae notio, ut genuina quasi et ab omnibus satis perspecta sit, flagitant, quam vero postquam notis dubiis ambiguisque exponunt magis quam definiunt, contorta quadam demonstratione ejus relationem ad motum explicare student. Summus etiam *Euler* (Mechan. Tom. I. cap. II.) ad declarandam potentiae notionem ad ea, quae experientia omnes homines docuerit, provocat: attamen nonnisi ex effectu potentias cognosci aestimarique posse profitetur, qui etsi plerumque integer obtineri re vera nequeat, calculo tamen juvante, definiri possit. Principia quidem mechanicae ex idea sola expetenda esse censemus. Sed ad probandam hanc sententiam ac vindicandam quasi ab opinione nimis inveterinata doctrina uberior, ingenium acutius studiumque accuratius opus est, quam ut hîc illius operis vel prima quasi fundamenta jacere nobis in mentem venire possit.

Calculus integralis differentiali plane contrarius est. Praecipiendum igitur illi, quemadmodum, proposita differentialium relatione aliqua, quantitatum s. numerorum variabilium, ad quos pertinent, ipsorum junctura sive functio, quae eorum nexum definiat mutuum, reperienda sit. Facilius saepe, quum quaeritur lex et norma, ad quam quantitates var. se accommodent, quam habent ad se invicem ipsarum progressus aequabiles s. differentialia, ratio exploratur. Quo pacto problema calculo integrali solvendum. Ejus generis sunt problemata rectificationis et quadraturae curvarum multaque alia; in quibus id potissimum prospiciendum, ut talis quantitatis var. dependentis progressus describatur, qualem faceret, si *aequabiliter* cum incremento alterius quantitatis abs. var., a qua ipsam pendere volumus, (vel complurium uniuscujusque seorso) incremento cresceret vel decresceret.

Specimine secundo tum singulares functionum conditiones, quae generalibus differentiandi regulis non obediunt, examinare, tum principales, quas viri docti de differentialium natura promulgarunt, sententias recensere nobis propositum est.

THESES.

I.

Potentiae mechanicae notio non experientiae, sed ideae debetur.

II.

Staticae principia e mechanicae praeceptis derivanda sunt.

III.

Ex hypothesi atomistica diversa corporum massae indoles explicari nequit.

IV.

Physica vi expansiva ut genuina carere nequit.

V.

Crystallisatio nonnisi perfecta corporum rigidorum forma.

VI.

Male docent, qui montium s. stratorum venas rimas expletas esse definiunt; optime, qui ipsas secretiones chemicas esse sentiunt.

VII.

Montes basaltici non sunt exusti ignivomi.

VIII.

Horat. Carm. I. v. 29. "Te" pro "Me" legendum esse censeo.

IX.

Sceptici re vera dogmatici.

X.

Non omnia, quae cognoscimus, cogitatione percipiuntur.

Zur Transformation der vielfachen Integrale.

DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

bei der philosophischen Fakultät

der Grossherzoglich Hessischen Ludwigs-Universität zu Giessen

eingereicht von

MARIE VAERTING
aus Messingen (Hannover)

Giessen 1910
von Münchow'sche Hof- und Universitäts-Druckerei Otto Kindt

Genehmigt durch das Prüfungskollegium
am 4. 8. 1910.
Referent: Dr. Pasch.

Gewidmet meinem lieben Bruder
Wolfgang

„Unendlich ist eins,
Und wirklich ist keins.
Die einzige Wahrheit im Lebensgeschick
Das ist des Todes lösender Blick:
Ein Exempel der höchsten Mathematik.“

Vorwort.

In dieser Arbeit, die ich auf Anregung von Professor G. Kowalewski ausgeführt habe, wird die Transformation der dreifachen Integrale auf das untere und obere Integral einer beliebigen beschränkten Funktion $f(x, y, z)$ übertragen.

Es ergibt sich dabei ein Resultat von überraschender Allgemeinheit. Über den Integrationsbereich $\mathfrak{P}$ wird nämlich nur vorausgesetzt, dass er nebst seiner Ableitung $\mathfrak{P}'$ ganz aus innern Punkten einer beschränkten Punktmenge $\mathfrak{A}$ besteht. Die abbildenden Funktionen sind im Innern von $\mathfrak{A}$ mit stetigen ersten Ableitungen behaftet, und die Funktionaldeterminante ist positiv, die Abbildung ausserdem ein-eindeutig. Von dem Integranden wird nur gefordert, dass er in $\mathfrak{P}$ beschränkt ist.

Ich zeige, dass unter diesen Voraussetzungen unteres und oberes Integral sich nach derselben Regel transformieren, die für ein gewöhnliches dreifaches Integral gilt. Bei dem Beweise stütze ich mich auf Kowalewski's Sätze über inverse Transformationen (Leipziger Berichte 1908 Seite 10 ff.), die hier auf den Fall dreier Veränderlicher angewendet werden.

Die Betrachtungen dieser Arbeit lassen sich ohne weiteres auf n Veränderliche ausdehnen.

Erstes Kapitel.

Das untere und das obere Integral.

§ 1. Funktionen in Raumintervallen.

Ich beziehe den Raum auf drei rechtwinklige Achsen Ox, Oy, Oz.

Ein Raumintervall besteht aus allen Punkten, die den Bedingungen:

$$a \leqq x \leqq a', \; b \leqq y \leqq b', \; c \leqq z \leqq c'$$

genügen. Ein solches Intervalle soll mit $\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle$ bezeichnet werden.

Wenn jedem Punkte $\mathfrak{p}$ des Raumintervalls $\mathfrak{R}$ ein Wert $f(\mathfrak{p})$ zugeordnet ist, so sagt man, dass in $\mathfrak{R}$ eine Funktion definiert ist.

Stetige Funktionen.

$f(\mathfrak{p})$ heisst an der Stelle $\mathfrak{p}_o$ stetig, wenn aus $\lim \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_o$ stets folgt: $\lim f(\mathfrak{p}_n) = f(\mathfrak{p}_o)$. Natürlich nehmen wir an, dass die Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ zu $\mathfrak{R}$ gehören.

Ist die Funktion $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$ stetig (d. h. an jeder Stelle in $\mathfrak{R}$), so gibt es unter ihren Werten einen grössten M und einen kleinsten m (Satz von Weierstrass). Die Funktion nimmt in $\mathfrak{R}$ auch jeden Wert an, der zwischen m und M liegt (Satz von Bolzano). Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ und $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3 \ldots$ zwei Punktfolgen in $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\lim \overline{\mathfrak{p}_n \mathfrak{q}_n} = o,$$

so ist stets:

$$\lim \left\{ f(\mathfrak{p}_n) - f(\mathfrak{q}_n) \right\} = o$$

(Satz von der gleichmässigen Stetigkeit).

Beschränkte Funktionen.

$f(\mathfrak{p})$ heisst in R beschränkt, wenn alle Funktionswerte zwischen zwei festen Grenzen k und K liegen, wenn also immer

$$k \leqq f(\mathfrak{p}) \leqq K$$

ist.

Unter den Zahlen, die keinen Funktionswert übertreffen, gibt es eine grösste. Man nennt sie die untere Grenze von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$. Sie möge mit $m\,(\mathfrak{R})$ bezeichnet werden.

Ebenso gibt es unter den Zahlen, die von keinem Funktionswert übertroffen werden, eine kleinste. Sie heisst die obere Grenze von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$, und wir bezeichnen sie mit $M(\mathfrak{R})$.

Jede stetige Funktion ist (nach dem Satz von Weierstrass) beschränkt. Die untere und die obere Grenze sind bei ihr Funktionswerte.

§ 2. Unteres und oberes Integral einer beschränkten Funktion in einem Raumintervall.

Die Funktion $f(\mathfrak{p})$ soll in dem Raumintervall $\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle$ oder $\mathfrak{R}$ beschränkt sein. Wenn

$$a < x_1 < \ldots < x_{p-1} < a'$$
$$b < y_1 < \ldots < y_{q-1} < b'$$
$$c < z_1 < \ldots < z_{r-1} < c'$$

ist, so bewirken die Ebenen:

$$x = x_\pi \qquad (\pi = 1, 2, \ldots, p-1)$$
$$y = y_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, q-1)$$
$$z = z_\rho \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r-1)$$

eine Zerlegung Z des Raumintervalls $\mathfrak{R}$ in pqr Teilintervalle $\mathfrak{T}$, nämlich in die Raumintervalle:

$$\langle x_{\pi-1}, x_\pi;\ y_{\varkappa-1}, y_\varkappa;\ z_{\rho-1}, z_\rho \rangle^*).$$

*) $x_o = a$, $x_p = a'$; $y_o = b$, $y_y = b'$; $z_o = c$, $z_r = c'$.

Die positive Quadratwurzel aus

$$(x_\pi - x_{\pi-1})^2 + (y_\varkappa - y_{\varkappa-1})^2 + (z_\rho - z_{\rho-1})^2$$

soll die D i a g o n a l e von $\langle x_{\pi-1}, x_\pi;\ y_{\varkappa-1}, y_\varkappa;\ z_{\rho-1}, z_\rho\rangle$ heissen. Die grösste Diagonale, die bei den Teilintervallen $\mathfrak{T}$ auftritt, möge als G r o s s d i a g o n a l e der Zerlegung Z bezeichnet werden. Eine Folge von Zerlegungen Z_1, Z_2, Z_3, . . . mit nach Null konvergierender Grossdiagonale soll eine a u s g e z e i c h n e t e Z - F o l g e genannt werden.

Jeder Zerlegung Z ordnen wir die beiden Summen:

$$s\,(Z) = \sum T.m\,(\mathfrak{T}), \quad S\,(Z) = \sum T.M\,(\mathfrak{T})$$

zu. Die Summation erstreckt sich über alle Teilintervalle $\mathfrak{T}$, und T ist der Inhalt von $\mathfrak{T}$ *), während $m\,(\mathfrak{T})$ und $M\,(\mathfrak{T})$ die untere bezw. obere Grenze von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{T}$ bedeuten. Wenn Z_1, Z_2, Z_3, . . . eine ausgezeichnete Z-Folge ist, so soll $s(Z_1)$, $s\,(Z_2)$, $s\,(Z_3)$ . . . eine a u s g e z e i c h n e t e s-Folge und $S\,(Z_1)$, $S\,(Z_2)$, $S\,(Z_3)$ . . . eine a u s g e z e i c h n e t e S-F o l g e heissen.

A l l e a u s g e z e i c h n e t e n s-F o l g e n k o n v e r g i e r e n n a c h d e m s e l b e n G r e n z w e r t s, e b e n s o a l l e a u s g e z e i c h n e t e n S-F o l g e n n a c h d e m s e l b e n G r e n z w e r t S (Satz von D a r b o u x). Man nennt s das u n t e r e, S das o b e r e Integral**) von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$. Wir wollen dafür schreiben:

$$s = \underset{\mathfrak{R}}{\underline{\iiint}} f\,dx\,dy\,dz, \quad S = \overline{\iiint_{\mathfrak{R}}} f\,dx\,dy\,dz.$$

Es genügt, die Existenz von S zu beweisen. Sind nämlich $s'\,(Z)$ und $S'\,(Z)$ für $-f$ dasselbe wie $s\,(Z)$ und $S\,(Z)$ für f, so hat man:

$$s\,(Z) = -S'\,(Z),\ S\,(Z) = -s'\,(Z).$$

---

*) Als Inhalt von $\langle x_{\pi-1}, x_\pi;\, y_{\varkappa-1}, y_\varkappa;\, z_{\rho-1}, z_\rho\rangle$ wird $(x_\pi - x_{\pi-1})\,(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})\,(z_\rho - z_{\rho-1})$ definiert.

**) Unteres und oberes Integral wurden durch P a s c h eingeführt: Mathematische Annalen 1887 Band 30 Seite 149.

Die Existenz von S erkennt man auf folgende Weise. Alle Ausdrücke $S(\mathrm{Z})$ liegen zwischen den Grenzen $R.\, m(\mathfrak{R})$ und $R.\, M(\mathfrak{R})$. Daher gibt es eine untere Grenze S für die sämtlichen Ausdrücke $S(\mathrm{Z})$. Wir wählen zunächst die Zerlegung Z so, dass

$$S(\mathrm{Z}) < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist ($\varepsilon > 0$). Ist nun $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \mathrm{Z}_3, \ldots$ eine ausgezeichnete Z — Folge, so zerfallen die Teilintervalle von Z_n in zwei Klassen:

1) solche, die in einem Teilintervall von Z liegen,

2) solche, die dies nicht tun.

Entsprechend redet man bei $S(\mathrm{Z}_n)$ von Gliedern erster und zweiter Klasse. δ_n sei die Grossdiagonale von Z_n. Ersetzen wir jedes Teilintervall $\mathfrak{T}$ oder

$$\langle x_{\pi-1},\ x_\pi;\ y_{\varkappa-1},\ y_\varkappa;\ z_{\rho-1},\ z_\rho\rangle$$

von Z durch

$$\langle x_{\pi-1} + \delta_n,\ x_\pi - \delta_n;\ y_{\varkappa-1} + \delta_n,\ y_\varkappa - \delta_n;\ z_{\rho-1} + \delta_n,\ z_\rho - \delta_n\rangle$$

oder durch $\overline{\mathfrak{T}}$, so hat kein Teilintervall zweiter Klasse von Z_n mit einem solchen $\overline{\mathfrak{T}}$ einen Punkt gemein; sonst läge es nämlich in einem Teilintervall von Z. Daraus geht hervor, dass die Summe σ_n dieser Teilintervalle kleiner ist als $\mathfrak{R} - \Sigma\, \overline{\mathfrak{T}}$, d. h. sicher kleiner als

$$2\, \delta_n \Big\{(p+1)\,(b'-b)\,(c'-c) + (q+1)\,(c'-c)\,(a'-a) + (r+1)\,(a'-a)\,(b'-b)\Big\}.$$

Hieraus ersieht man, dass $\lim \sigma_n = 0$ ist. Ersetzt man nun in jedem Glied zweiter Klasse von $S(\mathrm{Z}_n)$ M durch m, so verkleinert man $S(\mathrm{Z}_n)$ höchstens um

$$\sigma_n \Big\{M(\mathfrak{R}) - m(\mathfrak{R})\Big\}.$$

Andererseits ist der modifizierte Ausdruck nicht grösser als $S(\mathrm{Z})$. Also hat man:

$$S(\mathrm{Z}_n) \leqq S(\mathrm{Z}) + \sigma_n \Big\{M(\mathfrak{R}) - m(\mathfrak{R})\Big\}$$

und für fast alle*) Z_n

*) „fast alle" sind alle mit endlich vielen Ausnahmen.

$$S(Z_n) \leqq S(Z) + \frac{\varepsilon}{2},$$

also:
$$S \leqq S(Z_n) \leqq S + \varepsilon.$$

Damit ist gezeigt, dass $\lim S(Z_n) = S$ ist. Zugleich ersehen wir aus dem Obigen folgendes:

Das obere Integral ist die untere Grenze aller Ausdrücke $S(Z)$, das untere Integral die obere Grenze aller Ausdrücke $s(Z)$.

Wenn $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$ stetig ist, fällt das untere Integral mit dem oberen zusammen. Den gemeinsamen Wert nennt man das Integral von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$ und schreibt dafür:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{R}} f\, dx\, dy\, dz\,.$$

§ 3. Innerer und äusserer Inhalt einer beschränkten Punktmenge.

$\mathfrak{P}$ sei eine beschränkte Punktmenge und $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Raumintervall, das $\mathfrak{P}$ enthält. In $\mathfrak{P}$ sei eine Funktion f definiert, d. h. jedem Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ ein Wert $f(\mathfrak{p})$ zugeordnet; $f(\mathfrak{p})$ sei beschränkt. Wenn wir festsetzen, dass $f(\mathfrak{p}) = 0$ sein soll, sobald $\mathfrak{p}$ nicht zu $\mathfrak{P}$ gehört, so existieren:

$$\underline{\iiint}_{\mathfrak{R}} f\, dx\, dy\, dz\,, \quad \overline{\iiint}_{\mathfrak{R}} f\, dx\, dy\, dz\,.$$

Diese beiden Integrale bezeichnen wir mit:

$$\underline{\iiint}_{\mathfrak{P}} f\, dx\, dy\, dz\,, \quad \overline{\iiint}_{\mathfrak{P}} f\, dx\, dy\, dz\,.$$

Man nennt sie unteres und oberes Integral von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{P}$. Sie sind unabhängig von der Wahl des Umschliessungs-Intervalls $\mathfrak{R}$.

Die Integrale

$$\underline{\iiint_{\mathfrak{P}}} d\,x\,dy\,dz \quad und \quad \overline{\iiint_{\mathfrak{P}}} d\,x\,dy\,dz$$

existieren immer. Sie heissen innerer bezw. äusserer Inhalt von $\mathfrak{P}$.

Nach der Definition des unteren und oberen Integrals kann man den inneren und äusseren Inhalt einer beschränkten Punktmenge auch so erklären. Z sei eine Zerlegung des Intervalls $\mathfrak{R}$, in welchem $\mathfrak{P}$ liegt. Die Teilintervalle von Z zerfallen in drei Arten:

1) solche, die ganz aus Punkten von $\mathfrak{P}$ bestehen (innere Teilintervalle),

2) solche, die keinen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthalten (äussere Teilintervalle),

3) solche, die wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthalten, aber auch wenigstens einen Punkt, der nicht zu $\mathfrak{P}$ gehört (kritische Teilintervalle).

σ_r sei die Summe der Teilintervalle r^{ter} Klasse. Dann ist beim Durchlaufen einer ausgezeichneten Z-Folge:

$$\lim \sigma_1 = \underline{\iiint_{\mathfrak{P}}} dx\ dy\ dz$$

$$\lim (\sigma_1 + \sigma_3) = \overline{\iiint_{\mathfrak{P}}} dx\ dy\ dz.$$

Wenn der innere und der äussere Inhalt denselben Wert haben, so heisst $\mathfrak{P}$ quadrierbar*) und jener Wert der Inhalt von $\mathfrak{P}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Quadrierbarkeit lautet: $\lim \sigma_3 = 0$.

$\overline{\mathfrak{P}}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$, und $\overline{\sigma}_r$ bedeute für $\overline{\mathfrak{P}}$ dasselbe, wie σ_r für $\mathfrak{P}$. Dann ist offenbar:

$$\overline{\sigma}_1 \leqq \sigma_1,\ \overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_3 \leqq \sigma_1 + \sigma_3, \text{ also auch:}$$

*) Statt „beschränkt und quadrierbar“ sagen wir im folgenden kurz „quadrierbar.“

$\lim \overline{\sigma}_1 \leqq \lim \sigma_1$, $\lim (\overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_3) \leqq \lim (\sigma_1 + \sigma_3)$. Innerer und äusserer Inhalt von $\overline{\mathfrak{P}}$ sind nicht grösser als innerer bezw. äusserer Inhalt von $\mathfrak{P}$.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien zwei quadrierbare Punktmengen. $\mathfrak{S}$ sei die Vereinigung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, d. h.: $\mathfrak{S}$ bestehe aus den Punkten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zusammen. $\mathfrak{D}$ sei dagegen der Durchschnitt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, d. h. die Menge aller Punkte, die sowohl zu $\mathfrak{P}$ als auch zu $\mathfrak{Q}$ gehören.

Sowohl $\mathfrak{D}$ als auch $\mathfrak{S}$ ist quadrierbar.

Ein kritisches Teilintervall für $\mathfrak{S}$ ist nämlich auch für $\mathfrak{P}$ oder für $\mathfrak{Q}$ kritisch. Dasselbe gilt von $\mathfrak{D}$.

Nimmt man von einer quadrierbaren Menge $\mathfrak{P}$ eine quadrierbare Teilmenge $\mathfrak{T}$ fort, so bleibt eine quadrierbare Restmenge übrig. Ein kritisches Teilintervall für $\mathfrak{P} - \mathfrak{T}$ ist für $\mathfrak{P}$ oder für $\mathfrak{T}$ kritisch.

Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei quadrierbare Mengen, $\mathfrak{S}$ ihre Vereinigung, $\mathfrak{D}$ ihr Durchschnitt, so hat man:

$$(\mathfrak{S}) = (\mathfrak{P}) + (\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{D}),$$

wo $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{S})$, $(\mathfrak{D})$ die Inhalte von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$ bedeuten.

Ein inneres Teilrechteck für $\mathfrak{S}$ ist entweder ein inneres Teilrechteck für $\mathfrak{P}$ oder für $\mathfrak{Q} - \mathfrak{D}$ oder ein kritisches Teilrechteck für $\mathfrak{P}$. Daraus folgt:

$$(\mathfrak{S}) = (\mathfrak{P}) + (\mathfrak{Q} - \mathfrak{D})$$

Aus demselben Grunde ist

$$(\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{D}) + (\mathfrak{Q} - \mathfrak{D}),$$

so dass sich ergibt: $(\mathfrak{S}) = (\mathfrak{P}) + (\mathfrak{Q}) - (\mathfrak{D})$.

Sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ quadrierbare Mengen, und ist $\mathfrak{S}$ ihre Vereinigung, so hat man:

$$(\mathfrak{S}) \leqq (\mathfrak{P}_1) + (\mathfrak{P}_2) + \ldots + (\mathfrak{P}_r).$$

Wenn je zwei $\mathfrak{P}_\rho$ $(\rho = 1, \ldots, r)$ einen Durchschnitt vom Inhalt Null haben, so wird

$$(\mathfrak{S}) = (\mathfrak{P}_1) + (\mathfrak{P}_2) + \ldots + (\mathfrak{P}_r).$$

§ 4. Invarianz des Inhalts bei Bewegungen.

Man betrachte ein Raumintervall $\mathfrak{R}$ oder $\langle a, a'; \ b, b'; \ c, c' \rangle$. Das Achsensystem werde um die z-Achse gedreht. Die neuen Achsen sollen Ox', Oy', Oz heissen. Um $\mathfrak{R}$ konstruiere man in Bezug auf die neuen Achsen ein Raumintervall $\mathfrak{U}$ *) und unterwerfe es der Zerlegung Z. Die Summe der innern Intervalle für $\mathfrak{R}$ sei σ_1, die der kritischen σ_3. $\overline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{U}}$ seien die Projektionen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}$ auf die (xy)-Ebene, $\overline{\mathrm{Z}}$ die Zerlegung von $\overline{\mathfrak{U}}$, die der Zerlegung Z von $\mathfrak{U}$ entspricht, $\overline{\sigma}_1$ die Summe der innern, $\overline{\sigma}_3$ die der kritischen Teilrechtecke von $\overline{\mathrm{Z}}$ für die Punktmenge $\overline{\mathfrak{R}}$. Dann ist:

$$\sigma_1 = (c' - c)\,\overline{\sigma}_1, \quad \sigma_3 = (c' - c)\,(\overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_3)\,.$$

Durchläuft Z eine ausgezeichnete Z-Folge, so ergibt sich:

$$\lim \sigma_1 = \lim (\sigma_1 + \sigma_3) = (a' - a)\,(b' - b)\,(c' - c)\,.$$

Eine Drehung des Achsensystems um eine Achse ändert also nichts an dem Inhalt von $\mathfrak{R}$.

Daraus können wir folgern, dass eine beliebige Drehung des Achsensystems um den Anfangspunkt den Inhalt von $\mathfrak{R}$ nicht ändert. Eine Parallelverschiebung des Achsensystems ändert augenscheinlich den Inhalt von $\mathfrak{R}$ auch nicht. Dasselbe gilt deshalb für jede Bewegung des Achsensystems oder, wenn man das Achsensystem festhält, für jede Bewegung von $\mathfrak{R}$. Ebenso bleibt der Inhalt bei Spiegelung an einer Ebene ungeändert.

$\mathfrak{P}$ sei eine quadrierbare Punktmenge, bezogen auf die Achsen Ox, Oy, Oz. Wir unterwerfen ein Umschliessungs-Intervall von $\mathfrak{P}$ der Zerlegung Z und markieren die innern sowie die kritischen Teilintervalle (mit den Summen σ_1, bezw. σ_3). Bringen wir das Achsensystem in die Lage Ox', Oy', Oz', so hat $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die neuen Achsen den innern Inhalt $\underline{P}'$ und den äussern Inhalt $\overline{P}'$. Da die innern Teilintervalle von Z eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$ bilden, und $\mathfrak{P}$ selbst eine Teilmenge in der

---

*) $z = c$ und $z = c'$ mögen zwei Begrenzungsebenen von $\mathfrak{U}$ sein.

Menge der innern und der kritischen Teilintervalle von Z ist, so hat man (vgl. § 3):

$$\sigma_1 \leqq \underline{P}' \leqq \overline{P}' \leqq \sigma_1 + \sigma_3\,, \quad \text{mithin:}$$

$$\lim \underline{P}' = \lim \overline{P}' = P.$$

Hiermit ist die Invarianz des Inhalts von $\mathfrak{P}$ bei allen Bewegungen erwiesen.

Wir wollen jetzt noch den Inhalt eines Parallelepipedons $\mathfrak{Q}$ bestimmen. Die eine Seitenebene machen wir zur $(x\,y)$-Ebene, die gegenüberliegende Seitenebene sei $z = c$, $\mathfrak{U}$ sei ein Raumintervall, das $\mathfrak{Q}$ enthält und ebenfalls die Ebenen $z = o$ und $z = c$ zu seinen Begrenzungsebenen zählt, Z sei eine Zerlegung von $\mathfrak{U}$. Lässt man Z eine ausgezeichnete Z-Folge durchlaufen, so erkennt man, dass der Inhalt von $\mathfrak{Q}$ gleich Grundfläche mal Höhe ist. Am einfachsten kommt dies heraus, wenn man Z so wählt, dass die Kanten von $\mathfrak{U}$ in n gleiche Teile geteilt werden. Ist $\mathfrak{Q}$ durch die Ungleichungen:

$$|a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z| \leqq h_1$$
$$|a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z| \leqq h_2$$
$$|a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z| \leqq h_3$$

definiert, so ist sein Inhalt gleich

$$\frac{8\, h_1\, h_2\, h_3}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

§ 5. Zerlegung einer quadrierbaren Punktmenge in ebensolche Teilmengen.

$\mathfrak{P}$ sei eine quadrierbare Punktmenge und $\mathfrak{R}$ das kleinste Raumintervall

$$\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle,$$

das $\mathfrak{P}$ umschliesst. Die Diagonale von $\mathfrak{R}$ soll zugleich die Diagonale von $\mathfrak{P}$ heissen. Wenn wir $\mathfrak{R}$ der Zerlegung Z unterwerfen, so liegt in jedem Teilintervall $\mathfrak{T}$ von Z eine quadrierbare Teilmenge $\mathfrak{P}(\mathfrak{T})$ von $\mathfrak{P}$. Diese Teilmenge ist

nämlich der Durchschnitt der beiden quadrierbaren Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$.

Je zwei Mengen $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{T}$) habĕn einen Durchschnitt vom Inhalt Null.

Ein System $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$ quadrierbarer Teilmengen von $\mathfrak{P}$ soll nun eine Zerlegung von $\mathfrak{P}$ heissen, wenn jeder Punkt von $\mathfrak{P}$ wenigstens in einem $\mathfrak{P}_\rho$ enthalten ist, und ausserdem je zwei $\mathfrak{P}_\rho$ einen Durchschnitt vom Inhalt Null haben.

Die oben erwähnten Mengen $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{T}$) bilden also eine Zerlegung Z' von $\mathfrak{P}$.

Die grösste unter den Diagonalen der $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{T}$) möge die Grossdiagonale von Z' heissen. Sie ist offenbar nicht grösser als die Grossdiagonale von Z.

Lassen wir Z eine ausgezeichnete Z-Folge durchlaufen, so konvergiert die Grossdiagonale von Z, also auch die von Z' nach Null. Daraus ersehen wir, dass es ausgezeichnete Zerlegungsfolgen für $\mathfrak{P}$ gibt, d. h. Zerlegungsfolgen mit nach Null konvergierender Grossdiagonale.

§ 6. Die Ausdrücke s (Z) und S (Z).

$f(\mathfrak{p})$ sei eine in der quadrierbaren Punktmenge $\mathfrak{P}$ definierte beschränkte Funktion. Z sei eine Zerlegung von $\mathfrak{P}$ im Sinne von § 5, $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge von Z und T ihr Inhalt. Ferner mögen $m(\mathfrak{T})$ und $M(\mathfrak{T})$ die untere bezw. die obere Grenze von $f(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{T}$ bedeuten. Wir bilden die beiden Summen

$$s(\mathrm{Z}) = \sum T . m(\mathfrak{T}), \quad S(\mathrm{Z}) = \sum T . M(\mathfrak{T}).$$

Für sie gilt folgender Satz: Durchläuft Z eine ausgezeichnete Z-Folge, so wird

$$\lim s(\mathrm{Z}) = \underset{\mathfrak{P}}{\iiint} f\, dx\, dy\, dz, \quad \lim S(\mathrm{Z}) = \overline{\underset{\mathfrak{P}}{\iiint}} f\, dx\, dy\, dz.$$

$\mathfrak{R}$ sei ein Umschliessungs-Intervall von $\mathfrak{P}$. Wir zerlegen es durch Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen (Zerlegung Z). In jedem Teilintervall liegt dann eine quadrier-

bare Teilmenge $\overline{\mathfrak{T}}$ oder nichts von $\mathfrak{P}$. Diese $\overline{\mathfrak{T}}$ bilden eine Zerlegung $\overline{Z}$ von $\mathfrak{P}$. Diejenigen Teilintervalle von Z, die überhaupt etwas von $\mathfrak{P}$ enthalten, zerfallen in Bezug auf Z in zwei Klassen:

1) solche, die in einer Teilmenge $\mathfrak{T}$ liegen,

2) solche, die dies nicht tun, also kritische Teilintervalle für wenigstens ein $\mathfrak{T}$ sind. Ihre Summe heisse σ. Entsprechend reden wir von Gliedern erster und zweiter Klasse in $S(\overline{Z})$.

$\overline{\mathfrak{T}}_1, \overline{\mathfrak{T}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{T}}_r$ seien die Durchschnitte von $\overline{\mathfrak{T}}$ mit den Teilmengen von Z. Ersetzt man jedes $\overline{\mathfrak{T}}$ durch $\overline{\mathfrak{T}}_1, \overline{\mathfrak{T}}_2, \ldots, \overline{\mathfrak{T}}_r$, so entsteht eine Zerlegung $\widehat{Z}$ von $\mathfrak{P}$, und offenbar ist $S(\widehat{Z})$ nicht grösser als $S(Z)$ und $S(\overline{Z})$. Jetzt wollen wir in jedem Glied zweiter Klasse von $S(\overline{Z})$ das M durch m ersetzen. Dann entsteht ein Ausdruck, der nicht grösser als $S(\widehat{Z})$ ist. Andererseits beträgt die vorgenommene Verkleinerung von $S(\overline{Z})$ nicht mehr als

$$\sigma\left\{M(P) - m(P)\right\}.$$

Wir haben also die Ungleichung:

$$(*)\quad S(\overline{Z}) \leqq S(Z) + \sigma\left\{M(P) - m(P)\right\}.$$

Die Teilmengen $\mathfrak{T}$ von Z zerfallen in Bezug auf Z in zwei Klassen:

1) solche, die ganz in einem Teilintervall von Z (also auch in einem $\overline{\mathfrak{T}}$) liegen,

2) solche, die dies nicht tun.

Entsprechend werden in $S(Z)$ Glieder erster und zweiter Klasse unterschieden.

Ist ρ die Grossdiagonale von Z, und ersetzen wir jedes Teilintervall

$$\langle \alpha, \alpha'; \ \beta, \beta'; \ \gamma, \gamma' \rangle$$

von Z durch *)

---

*) 2ρ sei kleiner als die kleinste Kante der Teilintervalle von Z.

$$\langle \alpha + \rho,\ \alpha' - \rho;\ \beta + \rho,\ \beta' - \rho;\ \gamma + \rho,\ \gamma' - \rho \rangle,$$

so hat ein $\mathfrak{T}$ zweiter Klasse mit keinem dieser verkleinerten Intervalle einen Punkt gemein. Alle Intervalle zweiter Klasse liegen also in der Punktmenge, die aus $\mathfrak{R}$ durch Herausschneiden der verkleinerten Teilintervalle entsteht. Der Inhalt dieser Punktmenge ist kleiner als *)

$$\tau = 2\rho \Big\{ (p+1)(b'-b)(c'-c) + (q+1)(c'-c)(a'-a) \\ + (r+1)(a'-a)(b'-b) \Big\}.$$

Wird nun in jedem Glied zweiter Klasse von S (Z) das M durch m ersetzt, so entsteht ein Ausdruck, der nicht grösser ist als $S\,(\widehat{Z})$. Andererseits macht die vorgenommene Änderung nicht mehr aus als

$$\tau \left\{ M(\mathfrak{P}) - m(\mathfrak{P}) \right\}.$$

Es gilt also die Ungleichung:

$$(**)\ S\,(Z) \leqq S\,(\overline{Z}) + \tau \left\{ M(\mathfrak{P}) - m(\mathfrak{P}) \right\}.$$

Jetzt sei S die untere Grenze aller Ausdrücke $S\,(\overline{Z})$, die den verschiedenen Zerlegungen Z von $\mathfrak{R}$ entsprechen. Dann ersehen wir aus (*), dass kein $S\,(Z)$ kleiner sein kann als S. Lassen wir nämlich die Grossdiagonale von Z nach Null konvergieren, so wird $\lim \sigma = 0$, also [im Falle $S\,(Z) < S$] schliesslich:

$$\sigma \left\{ M(\mathfrak{P}) - m(\mathfrak{P}) \right\} < S - S\,(Z),$$

mithin nach(*):

$$S\,(\overline{Z}) < S.$$

Wählen wir, unter ε eine positive Zahl verstehend, $S\,(\overline{Z})$ so, dass $S\,(\overline{Z}) < S + \frac{\varepsilon}{2}$ ist, und lassen die Grossdiagonale ρ

---

*) $< a,\ a';\ b,\ b';\ c,\ c' >$ ist das Intervall $\mathfrak{R}$.

von Z nach Null konvergieren, so wird $\lim \tau = 0$ und schliesslich

$$\tau \left\{ M(P) - m(P) \right\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S \leqq S(Z) < S + \varepsilon,$$

$$\text{mithin } \lim S(Z) = S.$$

Die Glieder von $S(Z)$*), die inneren Teilintervallen von $\mathfrak{P}$ entsprechen, kommen auch in $S(\bar{Z})$ vor. Die übrigen Glieder von $S(Z)$ und ebenso von $S(\bar{Z})$ betragen zusammen weniger als ωK. Dabei ist ω die Summe der kritischen Teilintervalle und K die obere Grenze von $|\mathfrak{f}(\mathfrak{p})|$. Aus

$$| S(\bar{Z}) - S(Z) | < 2\omega K$$

folgt aber:

$$S = \iiint\limits_{\mathfrak{P}} \mathfrak{f}(\mathfrak{p})\, dx\, dy\, dz.$$

$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ sei eine ausgezeichnete Z-Folge von der Art, dass jedes Z_n aus Z durch Weiterteilung entsteht. Dann zerfallen die Glieder von $S(Z_n)$ in soviele Gruppen, als es Teilmengen $\mathfrak{T}$ in Z gibt. Die zu $\mathfrak{T}$ gehörige Gruppe konvergiert nach

$$\iiint\limits_{\mathfrak{T}} f\, dx\, dy\, dz,$$

und man findet auf diese Weise:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{P}} f\, dx\, dy\, dz = \sum \iiint\limits_{\mathfrak{T}} f\, dx\, dy\, dz,$$

ebenso: $\iiint\limits_{\mathfrak{P}} f\, dx\, dy\, dz = \sum \iiint\limits_{\mathfrak{T}} f\, dx\, dy\, dz.$

*) $S(Z)$ bezieht sich auf $\mathfrak{R}$. Ausserhalb $\mathfrak{P}$ ist immer $\mathfrak{f}(\mathfrak{p}) = 0$.

Zweites Kapitel.

Abbildungen.

§ 7. Voraussetzungen über die abbildenden Funktionen.

1) Die Funktionen

$$u\,(x\,y\,z),\ v\,(x\,y\,z),\ w\,(x\,y\,z)$$

mögen in dem Raumintervall $\mathfrak{R}$ oder $\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle$ stetige erste Ableitungen besitzen:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_2 = \frac{\partial u}{\partial y},\ u_3 = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{usw.}$$

2) Die Funktionaldeterminante

$$D\,(x\,y\,z) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

sei in $\mathfrak{R}$ überall positiv.

3) Endlich sei

$$\left\{ u\,(x\,y\,z) - u\,(x'\,y'\,z') \right\}^2 + \left\{ v\,(x\,y\,z) - v\,(x'\,y'\,z') \right\}^2 + \left\{ w\,(x\,y\,z) - w\,(x'\,y'\,z') \right\}^2$$

nur dann gleich Null, wenn die Punkte x, y, z und x', y', z', die in $\mathfrak{R}$ liegen, zusammenfallen.

Wenn wir u, v, w als Punkt-Koordinaten in Bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem Ou, Ov, Ow betrachten, so wird durch die Gleichungen:

$$u = u\,(x\,y\,z),\ v = v\,(x\,y\,z),\ w = w\,(x\,y\,z)$$

jedem Punkt x, y, z in $\mathfrak{R}$ ein Punkt u, v, w als Bildpunkt zugeordnet, und verschiedenen Punkten von $\mathfrak{R}$ entsprechen nach Voraussetzung 3) verschiedene Punkte u, v, w. Dem Raumintervall $\mathfrak{R}$ entspricht hierbei eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{Q}$, dem Rande von $\mathfrak{R}$, den wir $\overline{\mathfrak{R}}$ nennen wollen, eine Teilmenge $\overline{\mathfrak{Q}}$ von $\mathfrak{Q}$.

§ 8. Innere Punkte von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$.

x_o, y_o, z_o sei ein Punkt im Innern von $\mathfrak{R}$ und u_o, v_o, w_o sein Bildpunkt. Wenn man $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ laufen lässt, so erreicht

$$\left\{u(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - u_o\right\}^2 + \left\{v\ (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - v_o\right\}^2 + \left\{w\ (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - w_o\right\}^2$$

an einer bestimmten Stelle $\bar{x}_o, \bar{y}_o, \bar{z}_o$ seinen kleinsten Wert Ist $\bar{u}_o, \bar{v}_o, \bar{w}_o$ der Bildpunkt von $\bar{x}_o, \bar{y}_o, \bar{z}_o$, so stellt die positive Quadratwurzel δ aus

$$(\bar{u}_o - u_o)^2 + (\bar{v}_o - v_o)^2 + (\bar{w}_o - w_o)^2$$

den kürzesten Abstand des Punktes u_o, v_o, w_o von der Punktmenge $\bar{\mathfrak{Q}}$ dar. δ ist grösser als Null, weil u_o, v_o, w_o und $\bar{u}_o, \bar{v}_o, \bar{w}_o$ nicht zusammenfallen können, da sie Bildpunkte von verschiedenen Punkten in $\mathfrak{R}$ sind. Beschreiben wir um u_o, v_o, w_o eine Kugel $\mathfrak{K}$ mit dem Radius δ, so gibt es innerhalb von $\mathfrak{K}$ keinen Punkt der Menge $\bar{\mathfrak{Q}}$.

Jetzt wollen wir um denselben Mittelpunkt eine zweite Kugel $\mathfrak{K}'$ konstruieren, aber mit dem Radius $\frac{1}{2}\delta$. Es sei u', v', w' ein Punkt von $\mathfrak{K}'$, also ein Punkt im Innern oder auf der Oberfläche dieser Kugel. Der Abstand des Punktes u', v', w' von $\bar{\mathfrak{Q}}$ ist wenigstens gleich $\frac{1}{2}\delta$, sein Abstand von u_o, v_o, w_o aber höchstens gleich $\frac{1}{2}\delta$. Lassen wir wieder $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ laufen, so ist also:

$$\left\{u(\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - u'\right\}^2 + \left\{v\ (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - v'\right\}^2 + \left\{w\ (\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}) - w'\right\}^2$$
$$\geqq \left\{u\ (x_o\, y_o\, z_o) - u'\right\}^2 + \left\{v\ (x_o\, y_o\, z_o) - v'\right\}^2 + \left\{w\ (x_o\, y_o\, z_o) - w'\right\}^2$$

d. h.: Die Funktion

$$\Omega\ (x, y, z) = \left\{u\ (x, y, z) - u'\right\}^2 + \left\{v\ (x, y, z) - v'\right\}^2 + \left\{w\ (x, y, z) - w'\right\}^2$$

wird im Innern von $\mathfrak{R}$ wenigstens ebenso klein wie auf dem Rande. Daher gibt es im Innern von $\mathfrak{R}$ eine Stelle $x'\, y'\, z'$, wo sie ihren kleinsten Wert annimmt. Daselbst müssen dann die Ableitungen von Ω nach x, y, z verschwinden, d. h.:

$$0 = \left\{ u(x'\,y'\,z') - u' \right\} u_1(x'\,y'\,z') + \ldots$$
$$0 = \left\{ u(x'\,y'\,z') - u' \right\} u_2(x'\,y'\,z') + \ldots$$
$$0 = \left\{ u(x'\,y'\,z') - u' \right\} u_3(x'\,y'\,z') + \ldots$$

Daraus folgt aber wegen $D(x', y', z') > 0$:

$$u(x'\,y'\,z') = u',\; v(x'\,y'\,z') = v',\; w(x'\,y'\,z')\, w'.$$

Die ganze Kugel $\mathfrak{K}'$ besteht also aus Punkten von $\mathfrak{Q}$. Hieraus sehen wir, dass jedem innern Punkt von $\mathfrak{R}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{Q}$ entspricht.

Das Umgekehrte gilt aber auch, wie wir jetzt zeigen werden. Zu jedem Punkt von $\mathfrak{Q}$ gibt es einen und nur einen Punkt von $\mathfrak{R}$, dessen Bildpunkt er ist. In $\mathfrak{Q}$ sind also drei Funktionen

$$x(u\,v\,w),\; y(u\,v\,w),\; z(u\,v\,w)$$

definiert, so dass die Gleichungen:

$$x = z(u, v, w),\; y = y(u, v, w),\; z = z(u, v, w)$$

jedem Punkt von $\mathfrak{Q}$ gerade denjenigen Punkt von $\mathfrak{R}$ zuordnen, dessen Bildpunkt er ist bei der Abbildung:

$$u = u(x\,y\,z),\; v = v(x\,y\,z),\; w = w(x\,y\,z).$$

Die Funktionen

$$x(u\,v\,w),\; y(u\,v\,w),\; z(u\,v\,w)$$

sind in $\mathfrak{Q}$ stetig. Das ergibt sich auf folgende Weise:

$$\mathfrak{q}_1,\; \mathfrak{q}_2,\; \mathfrak{q}_3 \ldots$$

sei eine konvergente Punktfolge in $\mathfrak{Q}$, und $\mathfrak{q}_o$ ihr Grenzpunkt. Dem Punkte $\mathfrak{q}_n$ entspreche in $\mathfrak{R}$ der Punkt $\mathfrak{p}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Ist $\mathfrak{p}_o$ eine Häufungsstelle der Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$, so lässt sich aus ihr eine konvergente Teilfolge

$$\overline{\mathfrak{p}}_1, \overline{\mathfrak{p}}_2, \overline{\mathfrak{p}}_3 \ldots$$

herausheben, die nach $\mathfrak{p}_o$ konvergiert. Die Folge: $\overline{\mathfrak{q}}_1, \overline{\mathfrak{q}}_2, \overline{\mathfrak{q}}_3 \ldots$ wird dann nach dem Bildpunkt von $\mathfrak{p}_o$ konvergieren. Andererseits aber konvergiert sie nach $\mathfrak{q}_o$. Also ist $\mathfrak{q}_o$ der Bildpunkt von $\mathfrak{p}_o$*), und wir sehen, dass die Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$

*) Die Punktmenge $\mathfrak{Q}$ ist also abgeschlossen.

nur den einen Häufungswert $\mathfrak{p}_o$ hat. Das bedeutet aber, dass $\lim \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_o$ ist. Die drei Funktionen:

$$x\,(u\,v\,w),\; y\,(u\,v\,w),\; z\,(u\,v\,w)$$

sind also in $\mathfrak{Q}$ stetig.

Jetzt sei u, v, w ein b e l i e b i g e r i n n e r e r Punkt von $\mathfrak{Q}$ und x, y, z der entsprechende Punkt von $\mathfrak{R}$. Dann lässt sich also um u, v, w als Mittelpunkt ein Raumintervall $\mathfrak{S}$ konstruieren, das nur Punkte von $\mathfrak{Q}$ enthält. $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w$ liege in $\mathfrak{S}$, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sei der entsprechende Punkt in $\mathfrak{R}$. Dann ist nach einem bekannten Satz der Differentialrechnung:

$$(*)\quad \begin{aligned} \Delta u &= u_1(\mathfrak{p})\ \Delta x + u_2(\mathfrak{p})\ \Delta y + u_3(\mathfrak{p})\ \Delta z \\ \Delta v &= v_1(\mathfrak{p}')\ \Delta x + v_2(\mathfrak{p}')\ \Delta y + v_3(\mathfrak{p}')\ \Delta z \\ \Delta w &= w_1(\mathfrak{p}'')\ \Delta x + w_2(\mathfrak{p}'')\ \Delta y + w_3(\mathfrak{p}'')\ \Delta z \end{aligned}$$

Die Punkte $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ liegen auf der Verbindungsstrecke von x, y, z und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Im Falle $\lim\,(\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2) = 0$, also $\lim\,(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = 0$ konvergieren daher $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ nach x, y, z, und wegen der Stetigkeit von

$$(u_1, v_1, w_1),\; (u_2, v_2, w_2),\; (u_3, v_3, w_3)$$

wird:

$$\lim \begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}) & u_2(\mathfrak{p}) & u_3(\mathfrak{p}) \\ v_1(\mathfrak{p}') & v_2(\mathfrak{p}') & v_3(\mathfrak{p}') \\ w_1(\mathfrak{p}'') & w_2(\mathfrak{p}'') & w_3(\mathfrak{p}'') \end{vmatrix} = D\,(x\,y\,z),$$

also positiv. Wir können daher ruhig annehmen, dass

$$\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}) & u_2(\mathfrak{p}) & u_3(\mathfrak{p}) \\ v_1(\mathfrak{p}') & v_2(\mathfrak{p}') & v_3(\mathfrak{p}') \\ w_1(\mathfrak{p}'') & w_2(\mathfrak{p}'') & w_3(\mathfrak{p}'') \end{vmatrix} > 0$$

ist.

Dann lassen sich die Gleichungen (*) nach Δx, Δy, Δz auflösen. Setzen wir:

$$\lambda\,\Delta x + \mu\,\Delta y + \nu\,\Delta z = \Delta,$$

so wird Δ gleich

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}) & u_2(\mathfrak{p}) & u_3(\mathfrak{p}) & \Delta u \\ v_1(\mathfrak{p}') & v_2(\mathfrak{p}') & v_3(\mathfrak{p}') & \Delta v \\ w_1(\mathfrak{p}'') & w_2(\mathfrak{p}'') & w_3(\mathfrak{p}'') & \Delta w \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}) & u_2(\mathfrak{p}) & u_3(\mathfrak{p}) \\ v_1(\mathfrak{p}') & v_2(\mathfrak{p}') & v_3(\mathfrak{p}') \\ w_1(\mathfrak{p}'') & w_2(\mathfrak{p}'') & w_3(\mathfrak{p}'') \end{vmatrix}}$$

λ, μ, ν sind beliebige Konstanten. Wir wollen nun schreiben:

$$\Delta u = \alpha\,\Delta t,\ \ \Delta v = \beta\,\Delta t,\ \ \Delta w = \gamma\,\Delta t$$

(α, β, γ konstant) und Δt nach Null konvergieren lassen. Dann wird:

$$(\sharp)\quad \lim \frac{\Delta}{\Delta t} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \alpha \\ v_1 & v_2 & v_3 & \beta \\ w_1 & w_2 & w_3 & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Formel ist die Existenz der Ableitungen;

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u},\ \ x_2 = \frac{\partial x}{\partial v},\ \ x_3 = \frac{\partial x}{\partial w}\ \text{usw.}$$

an der Stelle u, v, w zu entnehmen. Ausserdem sieht man. dass sie an dieser Stelle stetig sind. Denn die rechte Seite der Formel ($\sharp$) ist eine stetige Funktion von x, y, z, die wie wir wissen, selbst wieder stetige Funktionen von u, v, w sind.

Aus Formel ($\sharp$) ergibt sich nach:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 1 : \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Die Funktionen x, y, z haben also in $\mathfrak{S}$ stetige Ableitungen mit positiver Determinante. Ausserdem ordnen die Gleichungen

$$x = x\,(u\,v\,w),\ \ y = y\,(u\,v\,w),\ \ z = z\,(u\,v\,w)$$

verschiedenen Punkten von $\mathfrak{S}$ verschiedene Punkte x, y, z zu. Es sind hier also in $\mathfrak{S}$ die drei Voraussetzungen erfüllt, die

zu Anfang des § 7 gemacht wurden. Daher entspricht jedem inneren Punkt von $\mathfrak{S}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{R}$. Die Punkte von $\bar{\mathfrak{Q}}$ sind also sicher keine inneren Punkte von $\mathfrak{Q}$. In jeder um einen solchen Punkt beschriebenen Kugel gibt es sowohl Punkte, die zu $\mathfrak{Q}$ gehören, ja sogar innere Punkte von $\mathfrak{Q}$, als auch Punkte, die nicht in $\mathfrak{Q}$ enthalten sind, oder äusere Punkte von $\mathfrak{Q}$. Da $\mathfrak{Q}$ beschränkt ist, werden alle Punkte ausserhalb eines gewissen Raumintervalls äussere Punkte von $\mathfrak{Q}$ sein.

Ist $\mathfrak{q}_1$ ein innerer und $\mathfrak{q}_2$ ein äusserer Punkt von $\mathfrak{Q}$, so liegt auf der Strecke $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2$ ein Punkt von $\bar{\mathfrak{Q}}$. Das erkennt man mit Hilfe des Bolzanoschen Halbierungsverfahrens. Wenn es auf der Strecke $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2$ keinen Punkt von $\bar{\mathfrak{Q}}$ gibt, so wird eine der beiden Hälften von $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2$, etwa $\mathfrak{q}'_1\,\mathfrak{q}'_2$ ebenso wie $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2$ von einem inneren Punkt $\mathfrak{q}'_1$ und einem äusseren Punkt $\mathfrak{q}'_2$ begrenzt. Bei $\mathfrak{q}'_1\,\mathfrak{q}'_2$ gibt es wieder eine solche Hälfte $\mathfrak{q}''_1\,\mathfrak{q}''_2$ usw. Die beiden Folgen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}''_1, \ldots \text{ und } \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}'_2, \mathfrak{q}''_2, \ldots$$

konvergieren nach demselben Punkt $\mathfrak{q}$. Dieser gehört als Grenzpunkt von $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}''_1 \ldots$ zu $\mathfrak{Q}$ und als Grenzpunkt von $\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}'_2, \mathfrak{q}''_2 \ldots$ zu $\bar{\mathfrak{Q}}$. Man nennt $\bar{\mathfrak{Q}}$ den Rand von $\mathfrak{Q}$.

§ 9. Der Inhalt von $\mathfrak{Q}$.

Um den Inhalt von $\mathfrak{Q}$ zu finden, unterwerfen wir $\mathfrak{R}$ oder

$$\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle$$

einer Zerlegung in Teilintervalle $\mathfrak{T}$ durch Parallelebenen zu den Seitenflächen und zwar so, dass

$$\langle a, a' \rangle, \langle b, b' \rangle, \langle c, c' \rangle$$

dabei in je n gleiche Teile zerfallen. Jedem $\mathfrak{T}$ entspricht eine Teilmenge $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{Q}$. $\mathfrak{p}_o$ oder x_o, y_o, z_o sei der Mittelpunkt von $\mathfrak{T}$, u_o, v_o, w_o sein Bildpunkt. $2\,h_n$, $2\,k_n$, $2\,l_n$ seien die Kantenlängen von $\mathfrak{T}$. Dann ist wegen der besonderen Beschaffenheit der Zerlegung:

$$2\,h_n = \frac{a'-a}{n}, \quad 2\,k_n = \frac{b'-b}{n}, \quad 2\,l_n = \frac{c'-c}{n}.$$

$x_o + h, y_o + k, z_o + l$ möge ein Punkt von $\mathfrak{T}$ sein ($|h| \leqq h_n$, $|k| \leqq k_n$, $|l| \leqq l_n$) und $u_o + \bar{h}, v_o + \bar{k}, w_o + \bar{l}$ sein Bildpunkt. Dann hat man:

$$\bar{h} = u_1(\mathfrak{p})\, h + u_2(\mathfrak{p})\, k + u_3(\mathfrak{p})\, l,$$
$$\bar{k} = v_1(\mathfrak{p}')\, h + v_2(\mathfrak{p}')\, k + v_3(\mathfrak{p}')\, l,$$
$$\bar{l} = w_1(\mathfrak{p}'')\, h + w_2(\mathfrak{p}'')\, k + w_3(\mathfrak{p}'')\, l.$$

$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ liegen sicher in $\mathfrak{T}$. Jede der neun Determinanten:

$$\begin{vmatrix} u_r(\mathfrak{p}) & u_2(\mathfrak{p}_o) & u_3(\mathfrak{p}_o) \\ v_r(\mathfrak{p}') & v_2(\mathfrak{p}_o) & v_3(\mathfrak{p}_o) \\ w_r(\mathfrak{p}'') & w_2(\mathfrak{p}_o) & w_3(\mathfrak{p}_o) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}_o) & u_r(\mathfrak{p}) & u_3(\mathfrak{p}_o) \\ v_1(\mathfrak{p}_o) & v_r(\mathfrak{p}') & v_3(\mathfrak{p}_o) \\ w_1(\mathfrak{p}_o) & w_r(\mathfrak{p}'') & w_3(\mathfrak{p}_o) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}_o) & u_2(\mathfrak{p}_o) & u_r(\mathfrak{p}) \\ v_1(\mathfrak{p}_o) & v_2(\mathfrak{p}_o) & v_r(\mathfrak{p}') \\ w_1(\mathfrak{p}_o) & w_2(\mathfrak{p}_o) & w_r(\mathfrak{p}'') \end{vmatrix},$$

$$(r = 1, 2, 3)$$

hat, wenn wir $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ in $\mathfrak{T}$ beliebig herumrücken lassen, dabei einen grössten und einen kleinsten Wert. Die Differenz beider heisst die Schwankung der betreffenden Determinante in $\mathfrak{T}$.

σ sei die grösste unter den neun Schwankungen und σ_n das grösste σ. Bei unendlich zunehmendem n ist dann $\lim \sigma_n = o$. Nun wird

$$\begin{vmatrix} \bar{h} & u_2(\mathfrak{p}_o) & u_3(\mathfrak{p}_o) \\ \bar{k} & v_2(\mathfrak{p}_o) & v_3(\mathfrak{p}_o) \\ \bar{l} & w_2(\mathfrak{p}_o) & w_3(\mathfrak{p}_o) \end{vmatrix} = F_1(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$$
$$= D(\mathfrak{p}_o)\, h + \alpha_1 h + \beta_1 k + \gamma_1 l,$$

$$\begin{vmatrix} u^1(\mathfrak{p}_o) & \bar{h} & u_3(\mathfrak{p}_o) \\ v_1(\mathfrak{p}_o) & \bar{k} & v_3(\mathfrak{p}_o) \\ w_1(\mathfrak{p}_o) & \bar{l} & w_3(\mathfrak{p}_o) \end{vmatrix} = F_2(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$$

$$= D(\mathfrak{p}_o)\, k + \alpha_2 h + \beta_2 k + \gamma_2 l,$$

$$\begin{vmatrix} u_1(\mathfrak{p}_o) & u_2(\mathfrak{p}_o) & \bar{h} \\ v_1(\mathfrak{p}_o) & v_2(\mathfrak{p}_o) & \bar{k} \\ w_1(\mathfrak{p}_o) & w_2(\mathfrak{p}_o) & \bar{l} \end{vmatrix} = F_3(\bar{h}, \bar{k}, \bar{l})$$

$$= D(\mathfrak{p}_o)\, l + \alpha_3 h + \beta_3 k + \gamma_3 l.$$

Die α, β, γ sind ihrem Betrage nach kleiner als σ_n. Liegt $x_o + h$, $y_o + k$, $z_o + l$ auf dem Rande von $\mathfrak{R}$, ist also z. B. $|h| = h_n$, so hat man:

$$|F_1| \leqq h_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n$$
$$|F_1| \geqq h_n D(\mathfrak{p}_o) - (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n.$$

Ausserdem ist

$$|F_2| \leqq k_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n$$
$$|F_3| \leqq l_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n.$$

Aehnliche Ungleichungen gelten im Falle $|k = k_n$ und im Falle $|l| = l_n$. Daraus ersehen wir, dass der Rand $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ nicht ins Innere des Parallelepipedons

$$(\mathfrak{P}_1) \begin{cases} |F_1| \leqq h_n D(\mathfrak{p}_o) - (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n \\ |F_2| \leqq k_n D(\mathfrak{p}_o) - (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n \\ |F_3 \leqq l_n D(\mathfrak{p}_o) - (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n \end{cases}$$

eindringt und andererseits in dem Parallelepipedon

$$(\mathfrak{P}_2) \begin{cases} |F_1| \leqq h_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n, \\ |F_2| \leqq k_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n, \\ |F_3| \leqq l_n D(\mathfrak{p}_o) + (h_n + k_n + l_n)\, \sigma_n \end{cases}$$

liegt. Daraus schliessen wir weiter, dass $\mathfrak{P}_1$ aus lauter Punkten von $\mathfrak{B}$ besteht. $\mathfrak{P}_1$ enthält einen innern Punkt von $\mathfrak{B}$, nämlich u_o, v_o, w_o. Gäbe es in $\mathfrak{P}_1$ einen Punkt, der nicht zu

$\mathfrak{B}$ gehört, so müsste auf seiner Verbindungsstrecke mit u_o, v_o, w_o ein Punkt von $\overline{\mathfrak{B}}$ liegen. Das wäre aber ein innerer Punkt von $\mathfrak{P}_1$, während doch $\overline{\mathfrak{B}}$ gar nicht ins Innere von $\mathfrak{P}_1$ eindringt.

Für den Inhalt P_1 von $\mathfrak{P}_1$ gilt nach § 4 die Gleichung:

$$P_1 = \frac{8\, h_n\, k_n\, l_n\, [D(\mathfrak{p}_o) - A\sigma_n]\, [D(\mathfrak{p}_o) - B\sigma_n]\, [D(\mathfrak{p}_o) - C\sigma_n]}{D^2(\mathfrak{p}_o)}.$$

Die Determinante der Linearformen F_1, F_2, F_3 ist nämlich gleich $D^2(\mathfrak{p}_o)$. A, B, C haben folgende Bedeutung:

$$A = \frac{h_n + k_n + l_n}{h_n} = \frac{a' - a + b' - b + c' - c}{a' - a}$$

$$B = \frac{h_n + k_n + l_n}{k_n} = \frac{a' - a + b' - b + c' - c}{b' - b}$$

$$C = \frac{h_n + k_n + l_n}{l_n} = \frac{a' - a + b' - b + c' - c}{c' - c}$$

Ist K die grösste unter den drei Zahlen $\frac{A}{D(\mathfrak{p}_o)}, \frac{B}{D(\mathfrak{p}_o)}, \frac{C}{D(\mathfrak{p}_o)}$ so besteht die Ungleichung:

$$P_1 > 8\, h_n\, k_n\, l_n\, D(\mathfrak{p}_o)\, (1 - K\sigma_n)^3.$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum P_1 > (1 - K\sigma_n)^3 \sum 8\, h_n k_n l_n D(\mathfrak{p}_o)$$

Ist P_2 der Inhalt von $\mathfrak{P}_2$, so gilt die Ungleichung:

$$\sum P_2 < (1 + K\sigma_n)^3 \sum 8\, h_n k_n l_n D(\mathfrak{p}_o)\,.$$

$\mathfrak{Q}$ enthält die Vereinigung aller $\mathfrak{P}_1$ als Teilmenge. Daher gilt für den innern Inhalt $\underline{Q}$ von $\mathfrak{Q}$ die Ungleichung (vgl. § 3):

$$\underline{Q} > \sum P_1\,.$$

Andererseits steckt $\mathfrak{Q}$ in der Vereinigung aller $\mathfrak{P}_2$ als Teilmenge. Der Inhalt dieser Vereinigung ist nach § 3 nicht grösser als $\sum P_2$. Also hat man für den äussern Inhalt $\overline{Q}$ von $\mathfrak{Q}$ die Ungleichung:

$$\overline{Q} \leqq \sum P_2\,.$$

Um so mehr gelten die Ungleichungen:

$$(1 - K\sigma_n)^3\, \mathfrak{S}_n \leqq \underline{Q} \leqq \overline{Q} < (1 + K\sigma_n)^3\, \mathfrak{S}_n\,.$$

Dabei haben wir gesetzt:

$$\mathfrak{S}_n = \sum 8\, h_n\, k_n\, l_n\, D(\mathfrak{p}_o)\,.$$

$\mathfrak{S}_n$ liegt zwischen $s(\mathrm{Z})$ und $S(\mathrm{Z})$, gebildet für $D(\mathfrak{p})$. Da $D(\mathfrak{p})$ stetig ist, so wird bei unendlich zunehmendem n:

$$\lim s(\mathrm{Z}) = \lim S(\mathrm{Z}) = \iiint\limits_{\mathfrak{R}} D(\mathfrak{p})\, dx\, dy\, dz\,,$$

mithin auch:

$$\lim \mathfrak{S}_n = \iiint\limits_{\mathfrak{R}} D(\mathfrak{p})\, dx\, dy\, dz\,.$$

Wegen $\lim \sigma_n = 0$ folgt also aus den obigen Ungleichungen:

$$\underline{Q} = \overline{Q} = \iiint\limits_{\mathfrak{R}} D(\mathfrak{p})\, dx\, dy\, dz\,.$$

Daraus ersehen wir folgendes: Die Punktmenge $\mathfrak{Q}$ ist quadrierbar und ihr Inhalt gleich dem über $\mathfrak{R}$ erstreckten Integral von $D(\mathfrak{p})$.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, dass $\overline{\mathfrak{Q}}$, der Rand von $\mathfrak{Q}$, den Inhalt Null hat. Um das zu erkennen, schneide man aus $\mathfrak{R}$ das kleinere Intervall

$$\langle a+\varepsilon,\ a'-\varepsilon;\ \ b+\varepsilon,\ b'-\varepsilon;\ \ c+\varepsilon,\ c'-\varepsilon\rangle$$

heraus ($\varepsilon > o$). In der übrig bleibenden Punktmenge $\widehat{\mathfrak{R}}$ ist $\overline{\mathfrak{R}}$ als Teil enthalten. In der Bildmenge $\widehat{\mathfrak{Q}}$ von $\widehat{\mathfrak{R}}$ wird also $\overline{\mathfrak{Q}}$ als Teilmenge stecken. Die Menge $\widehat{\mathfrak{R}}$ ist aber die Vereinigung der Bildmengen von

$$\langle a, a+\varepsilon;\ b, b';\ c, c'\rangle,\ \langle a'-\varepsilon, a';\ b, b';\ c, c'\rangle,$$
$$\langle a, a';\ b, b+\varepsilon;\ c, c'\rangle,\ \langle a, a';\ b'-\varepsilon, b';\ c, c'\rangle,$$
$$\langle a, a';\ b, b';\ c, c+\varepsilon\rangle,\ \langle a, a';\ b, b';\ c'-\varepsilon, c'\rangle.$$

Die Bildmengen dieser Intervalle haben Inhalte, deren Summe kleiner ist als

$$2 D_o\, \varepsilon \Big\{ (b'-b)\,(c'-c) + (c'-c)\, a'-a) + (a'-a)\, b'-b) \Big\}.$$

D_o bedeutet das Maximum von $D(\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{R}$.

Der Inhalt $\widehat{\mathrm{R}}$ von $\widehat{\mathfrak{R}}$ ist also ebenfalls kleiner als diese Zahl. Daraus ersieht man, dass $\widehat{\mathfrak{Q}}$ vom Inhalt Null ist. Denn ε kann man beliebig klein annehmen.

Drittes Kapitel.

Transformation des oberen und des unteren Integrals.

§ 10. Eine spezielle Transformationsaufgabe.

In dem Raumintervall $\mathfrak{R}$ oder

$$\langle a, a'; b, b'; c, c' \rangle$$

sei die beschränkte Funktion f definiert. Wir unterwerfen $\mathfrak{R}$ der in § 8 betrachteten Abbildung:

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z).$$

Dadurch entsteht die Bildmenge $\mathfrak{Q}$.

Einer Zerlegung Z von $\mathfrak{R}$ in Teilintervalle $\mathfrak{T}$ (mit Hilfe von Parallelebenen an den Seitenflächen) entspricht eine Zerlegung $\overline{\mathrm{Z}}$ von $\mathfrak{Q}$ in Teilmengen $\overline{\mathfrak{T}}$.

Dass die Bildmengen der Teilintervalle $\mathfrak{T}$ quadrierbar sind, wissen wir aus § 9. Ebenso ist uns bekannt, dass je zwei solche Bildmengen $\overline{\mathfrak{T}}$ einen Durchschnitt vom Inhalt Null haben.

Bezeichnet σ die Maximalschwankung, die eine der Funktionen u, v, w in den Teilintervallen von Z erreicht, so ist die Grossdiagonale von $\overline{\mathrm{Z}}$ kleiner als 3σ. Sie konvergiert also nach Null, wenn Z eine ausgezeichnete Z-Folge durchläuft.

Wir wollen entsprechenden Punkten von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ denselben Funktionswert f zuordnen und die Integrale

$$\underset{\mathfrak{Q}}{\underline{\iiint}} f\, du\, dv\, dw\,, \quad \overline{\iiint_{\mathfrak{Q}}} f\, du\, dv\, dw$$

betrachten.

Nach § 6 ist

$$\lim s(\overline{\mathrm{Z}}) = \underset{\mathfrak{Q}}{\underline{\iiint}} f\, du\, dv\, dw$$

$$\lim S(\overline{\mathrm{Z}}) = \overline{\iiint_{\mathfrak{Q}}} f\, du\, dv\, dw.$$

Dabei haben die Summen $s(\overline{Z})$ und $S(\overline{Z})$ die Bedeutung:

$$s(\overline{Z}) = \sum \overline{T}\, m(\mathfrak{T}) \quad S(\overline{Z}) = \sum \overline{T}\, M(\mathfrak{T});$$

$m(\overline{\mathfrak{T}})$, $M(\overline{\mathfrak{T}})$ sind die untere und die obere Grenze von f in $\overline{\mathfrak{T}}$. Offenbar ist:

$$m(\overline{\mathfrak{T}}) = m(\mathfrak{T}), \quad M(\overline{\mathfrak{T}}) = M(\mathfrak{T}),$$

weil in $\overline{\mathfrak{T}}$ genau dieselben Funktionswerte auftreten, wie in $\mathfrak{T}$. Für $\overline{\mathrm{T}}$, den Inhalt von $\overline{\mathfrak{T}}$, gilt nach § 9 die Formel:

$$\overline{T} = \iiint_{\mathfrak{T}} D(\mathfrak{p})\, dx\, dy\, dz.$$

Es gibt in $\mathfrak{T}$ eine Stelle $\mathfrak{p}_o$, so dass

$$\overline{T} = D(\mathfrak{p}_o)\, T$$

ist (vergleiche den Satz von Bolzano in § 1). Also wird z. B.

$$S(\overline{Z}) = \sum T\, M(\mathfrak{T})\, D(\mathfrak{p}_o).$$

Nun behaupten wir folgendes: Es gibt in $\mathfrak{T}$ einen Punkt $\mathfrak{p}'_o$, für welchen $M(\mathfrak{T})\, D(\mathfrak{p}'_o)$ gleich der oberen Grenze $\mathrm{M}(\mathfrak{T})$ von $f(\mathfrak{p})\, D(\mathfrak{p})$ wird.

In $\mathfrak{T}$ existieren Punktfolgen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ mit der Eigenschaft:

$$\lim f(\mathfrak{p}_n) = M(\mathfrak{T}):$$

$$\overline{\mathfrak{p}}_1, \overline{\mathfrak{p}}_2, \overline{\mathfrak{p}}_3, \ldots$$

sei eine konvergente Teilfolge von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ und $\lim \overline{\mathfrak{p}}_n = \overline{\mathfrak{p}}_o$. Dann ist:

$$\lim f(\overline{\mathfrak{p}}_n)\, D(\overline{\mathfrak{p}}_n) = M(\mathfrak{T})\, D(\overline{\mathfrak{p}}_o).$$

Andererseits hat man immer:

$$f(\overline{\mathfrak{p}}_n)\, D(\overline{\mathfrak{p}}_n) \leqq \mathrm{M}(\mathfrak{T}),$$

also auch:

$$(+) \quad M(\mathfrak{T})\, D(\overline{\mathfrak{p}}_o) \leqq \mathrm{M}(\mathfrak{T}).$$

In $\mathfrak{T}$ gibt es ferner Punktfolgen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ mit der Eigenschaft:

$$\lim f(\mathfrak{p}_n)\, D(\mathfrak{p}_n) = \mathrm{M}(\mathfrak{T}).$$

$$\widehat{\mathfrak{p}}_1, \widehat{\mathfrak{p}}_2, \widehat{\mathfrak{p}}_3, \ldots$$

sei eine konvergente Teilfolge von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ und

$$\lim \widehat{\mathfrak{p}}_n = \widehat{\mathfrak{p}}_o.$$

Dann ist immer:

$$f(\widehat{\mathfrak{p}_n})\, D\,(\widehat{\mathfrak{p}_n}) \leqq M(\mathfrak{T})\, D\,(\widehat{\mathfrak{p}_n}),$$

also auch:

$$(++)\ \mathrm{M}\,(\mathfrak{T}) \leqq M(\mathfrak{T})\, D\,(\widehat{\mathfrak{p}_o}).$$

Aus (+) und (++) ist aber ersichtlich, dass bei passender Wahl von $\mathfrak{p}_o'$ in $\mathfrak{T}$

$$M(\mathfrak{T})\, D\,(\mathfrak{p}_o') = \mathrm{M}\,(\mathfrak{T})$$

sein wird.

Betrachten wir jetzt den auf die Funktion $f(\mathfrak{p})\, D\,(\mathfrak{p})$ bezüglichen Ausdruck

$$S_1\,(\mathrm{Z}) = \sum T\,\mathrm{M}\,(\mathfrak{T})\,,$$

so ist:

$$S\,(\overline{\mathrm{Z}}) - S_1\,(\mathrm{Z}) = \sum T\, M(\mathfrak{T}) \left\{D\,(\mathfrak{p}_o) - D\,(\mathfrak{p}'_o)\right\}\,.$$

$\varepsilon\,(\mathrm{Z})$ sei die grösste der Differenzen $|\,D\,(\mathfrak{p}_o) - D\,(\mathfrak{p}'_o)\,|$ und K das Maximum von $|f(\mathfrak{p})|$. Dann ist:

$$|\,S\,(\overline{\mathrm{Z}}) - \mathrm{S}_1\,(\mathrm{Z})\,| \leqq R\,\mathrm{K}\,\varepsilon\,(\mathrm{Z})\,.$$

Nach § 2 ist, wenn Z eine ausgezeichnete Z-folge durchläuft: $\lim\ \varepsilon\,(\mathrm{Z}) = o$, also auch:

$$\lim \left\{S\,(\overline{\mathrm{Z}}) - S_1\,(\mathrm{Z})\right\} = o, \text{ d. h.:}$$

$$\iiint\limits_{\mathfrak{Q}} f\, du\ dv\ dw = \iiint\limits_{\mathfrak{R}} f\, D\, dx\ dy\ dz\,.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{Q}} f\, du\ dv\ dw = \iiint\limits_{\mathfrak{R}} f\, D\, dx\ dy\ dz\,.$$

§ 11. Das allgemeine Transformationsproblem.

$\mathfrak{A}$ sei eine beschränkte Punktmenge und $\mathfrak{A}_1$ der Inbegriff ihrer innern Punkte.

$$u\,(x\,y\,z),\ v\,(x\,y\,z),\ w\,(x\,y\,z)$$

seien Funktionen, die in $\mathfrak{A}_1$ definiert sind und folgende Eigenschaften haben:

1) In allen Punkten von $\mathfrak{A}_1$ existieren die Ableitungen:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_2 = \frac{\partial u}{\partial y},\ u_3 = \frac{\partial u}{\partial z} \text{ usw.}$$

Diese Ableitungen sind in $\mathfrak{A}_1$ stetig und erfüllen die Ungleichung:

$$D\,(x\,y\,z) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > o.$$

2) Verschiedenen Punkten von $\mathfrak{A}_1$ ordnen die Gleichungen

$$u = u\,(x\,y\,z),\ v = v\,(x\,y\,z),\ w = w\,(x\,y\,z)$$

verschiedene Punkte u, v, w zu.

$\mathfrak{P}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{A}_1$, aber von der Art, dass auch ihre Ableitung $\mathfrak{P}'$ in $\mathfrak{A}_1$ enthalten ist*). Dann gelten für jede beschränkte Funktion $f\,(\mathfrak{p})$, die in $\mathfrak{P}$ definiert ist, die Relationen:

$$(1)\quad \underset{\mathfrak{Q}}{\iiint} f\,du\,dv\,dw = \underset{\mathfrak{P}}{\iiint} f\,D\,dx\,dy\,dz$$

$$(2)\quad \underset{\mathfrak{Q}}{\overline{\iiint}} f\,du\,dv\,dw = \underset{\mathfrak{P}}{\overline{\iiint}} f\,D\,dx\,dy\,dz.$$

Dabei ist $\mathfrak{Q}$ die Bildmenge von $\mathfrak{P}$, und entsprechenden Punkten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wird derselbe Funktionswert zugewiesen.

Um die obigen Formeln zu beweisen, bemerken wir zunächst folgendes: Es gibt ein positives δ, so dass jeder um einen Punkt von $\mathfrak{P}$ mit δ beschriebene Kreis nur Punkte von $\mathfrak{A}_1$ enthält. Angenommen, es gäbe kein solches δ. Dann existiert in $\mathfrak{P}$ ein Punkt $\mathfrak{p}_n$ der Art, dass der mit dem Radius $\frac{1}{n}$ um $\mathfrak{p}_n$ beschriebene Kreis wenigstens einen Punkt $\mathfrak{r}_n$ enthält, der nicht zu $\mathfrak{A}_1$ gehört. $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \mathfrak{p}'_3 \ldots$ sei eine konvergente Teilfolge von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \ldots$ mit dem Grenzpunkt $\mathfrak{p}_o$ und $\mathfrak{r}'_1, \mathfrak{r}'_2, \mathfrak{r}'_3, \ldots$ die entsprechende Teilfolge von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \ldots$ Dann ist: $\lim \mathfrak{r}'_n = \lim \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{p}_o$ und $\mathfrak{p}$ kann als Grenz-

*) $\mathfrak{P}'$ besteht aus den Häufungspunkten von $\mathfrak{P}$.

punkt von $\mathfrak{r}'_1, \mathfrak{r}'_2, \mathfrak{r}'_3 \ldots$ kein Punkt von $\mathfrak{A}_1$ sein. Denn jeder Punkt von $\mathfrak{A}_1$, d. h. jeder innere Punkt von $\mathfrak{A}$, ist zugleich innerer Punkt von $\mathfrak{A}_1$. Als Grenzpunkt der Folge $\mathfrak{p}'_1, \mathfrak{p}'_2, \mathfrak{p}'_3 \ldots$ gehört aber $\mathfrak{p}_0$ zu $\mathfrak{P}$ oder zu $\mathfrak{P}'$, und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ sind nach Voraussetzung in $\mathfrak{A}_1$ enthalten.

Wir denken uns jetzt ein Umschliessungs-Intervall $\mathfrak{R}$ für $\mathfrak{A}_1$ konstruiert und der Zerlegung Z (durch Parallelebenen zu den Seitenflächen) unterworfen. Die Grossdiagonale der Zerlegung sei kleiner als das oben genannte $\mathfrak{d}$. Wenn dann $\mathfrak{T}$ ein Teilintervall ist, das wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthält, so besteht es ganz aus Punkten von $\mathfrak{A}_1$. Mithin ist*) nach § 10:

$$\iiint\limits_{\overline{\mathfrak{T}}} f\,du\,dv\,dw = \iiint\limits_{\mathfrak{T}} f D\,dx\,dy\,dz,$$

wo $\overline{\mathfrak{T}}$ das Bild von $\mathfrak{T}$ bedeutet.

$\mathfrak{S}$ sei die Vereinigungsmenge der sämtlichen $\mathfrak{T}$, d. h. derjenigen Teilintervalle von Z, die wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{P}$ enthalten, und $\overline{\mathfrak{S}}$ sei das Bild von $\mathfrak{S}$. Dann hat man nach § 6:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{S}} f D\,dx\,dy\,dz = \sum \iiint\limits_{\mathfrak{T}} f D\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint\limits_{\overline{\mathfrak{S}}} f\,du\,dv\,dw = \sum \iiint\limits_{\overline{\mathfrak{T}}} f\,du\,dv\,dw.$$

Denn die $\mathfrak{T}$ bilden eine Zerlegung von $\mathfrak{S}$ und die $\overline{\mathfrak{T}}$ eine Zerlegung von $\overline{\mathfrak{S}}$. Aus den obigen Gleichungen folgt aber:

$$\iiint\limits_{\overline{\mathfrak{S}}} f\,du\,dv\,dw = \iiint\limits_{\mathfrak{S}} f D\,dx\,dy\,dz,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{P}} f\,du\,dv\,dw = \iiint\limits_{\mathfrak{Q}} f \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} dx\,dy\,dz.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\iiint\limits_{\mathfrak{P}} f\,du\,dv\,dw = \iiint\limits_{\mathfrak{Q}} f \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} dx\,dy\,dz\,.$$

*) Ausserhalb $\mathfrak{P}$ setzen wir $f(\mathfrak{p}) = o$.

Dabei haben wir für D die Bezeichnung

$$\binom{u\ v\ w}{x\ y\ z}$$

benutzt.

$\mathfrak{B}_1$ sei das Bild von $\mathfrak{A}_1$. Aus § 11 ist zu entnehmen, dass jeder Punkt von $\mathfrak{B}_1$ zugleich innerer Punkt von $\mathfrak{B}_1$ ist. $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ sind in $\mathfrak{B}_1$ enthalten, bestehen also aus lauter inneren Punkten einer beschränkten Punktmenge. Die inverse Abbildung

$$x = x\,(u\,v\,w),\quad y = y\,(u\,v\,w),\quad z = z\,(u\,v\,w)$$

erfüllt in $\mathfrak{B}_1$ dieselben Bedingungen, wie die Abbildung:

$$u = u\,(x\,y\,z),\quad v = v\,(x\,y\,z),\quad w = w\,(x\,y\,z)$$

in $\mathfrak{A}_1$. Es ist daher auch:

$$\iiint_{\mathfrak{P}} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathfrak{Q}} f\binom{x\ y\ z}{u\ v\ w}\,du\,dv\,dw$$

$$\iiint_{\mathfrak{P}} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathfrak{Q}} f\binom{x\ y\ z}{u\ v\ w}\,du\,dv\,dw\,.$$

Lebenslauf.

Ich, Marie Vaerting, wurde geboren am 23. Januar 1880 zu Messingen Kreis Lingen in Hannover als Tochter des Landwirts Johannes Vaerting † und der Mathilde Siering †, katholischer Konfession. Bis zum 15. Lebensjahre wurde ich von einer Hauslehrerin unterrichtet und dann in Pensionaten untergebracht. Die Reifeprüfung bestand ich am 28. März 1908 am Realgymnasium zu Aachen. Seit 8 Semestern studiere ich Mathematik, Physik und Philosophie: Bonn 4, London 2, Marburg 1, Giessen 1.

TOMO VI. ANNO 1892.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

(28, via Ruggiero Settimo)

ADUNANZA DEL 22 MAGGIO 1892.

G. VERONESE.

Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale.

(Estratto)

A proposito di una lettera del prof. Peano;

Osservazioni di G. Veronese, in Padova(1).

Estratto dal tomo VI (1892) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 13 marzo 1892.

Il sig. prof. Peano, nella lettera aperta a me diretta nella sua *Rivista di Matematica*, il 1° dicembre 1891, mi chiede una risposta ad alcune osservazioni da lui fatte sulla teoria degli iperspazî a proposito di un articolo del prof. Segre, stampato nella stessa *Rivista* (2):

Chi legga attentamente il mio libro « *Fondamenti di Geometria* (3) », uscito appunto negli ultimi giorni del novembre u. s., troverà che esso risponde anzitutto da sè alle suddette osservazioni, come risponde a quelle di altri autori che ho riportate nelle note dell'appendice senza una risposta diretta, ~~come anche~~ e ad altre che avevo lette e non ho riferite. E potrà anche trovare una risposta indiretta in alcune considerazioni della prefazione e dell'appendice (4).

Rilevo però che quand'anche fosse vera in sè e rispetto al mio libro l'unica affermazione precisa, cui si riducono in fondo quelle osservazioni contro l'uso dei procedimenti geometrici coi quali si deducono proprietà di uno spazio (compresi la retta ed il piano) da uno spazio superiore, essa non intaccherebbe neppure quella parte dell'opera che tratta i principî della teoria in discorso. Infatti quell'affermazione non combatte i postulati di questa, e d'altronde le poche considerazioni che feci nel mio libro sulle operazioni del proiettare e del segare (pag. 550-561) per collegarlo coi miei precedenti lavori su tale teoria, sono vere, anche pel sig. Peano, quali proprietà di geometria a più di tre dimensioni (5).

Nonostante ciò aggiungo qui alcune considerazioni, le quali potranno servire al lettore che non è addentro nei miei studî, a maggiore intelligenza dei punti citati del mio libro, in risposta a quella affermazione.

Noto anzitutto che nella mia prima Memoria sulla teoria degli iperspazî stampata nel vol. XIX dei *Math. Annalen*, e che ha servito di base ad altri miei

studi posteriori, non ho parlato di postulati speciali nè di S_4, nè di S_n, intendendo tolto soltanto il postulato delle tre dimensioni.

Per me la geometria non si limita dunque alle sole dimensioni dello spazio fisico, ma neppure ad un numero dato n finito intero di dimensioni (pag. VI). Distinguo anzi nettamente la geometria teoretica dalle sue pratiche applicazioni, dimodochè vi sono assiomi necessarî per queste (ad es. l'assioma del movimento e quello delle tre dimensioni dello spazio fisico) che non lo sono per quella (p. IX).

Tutto l'insieme di punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali ce li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale. Questo spazio considerato come già costruito o dato ha un numero infinito attuale di dimensioni. Quindi la geometria è la scienza dello spazio generale, e perciò anche delle figure in esso contenute. Ma le considerazioni fatte nel mio libro, tranne alcune, valgono indipendentemente dalla definizione di questo spazio, sebbene per maggiore libertà lavoro sempre in esso (p. XXXIX).

Lo spazio generale è geometricamente possibile, e quindi ha una *realtà astratta,* senza intendere con ciò che il mondo esteriore in sè ne sia una rappresentazione completa (p. XII). Lo spazio ordinario, piuttosto che il luogo degli oggetti esterni considerato come esistente fuori di noi ed unico, è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso. È poi per mezzo di operazioni mentali che io immagino dei punti fuori dello spazio a tre dimensioni. E li possiamo immaginare sia per via di definizioni, sia per via di ipotesi. È per ciò che la costruzione e l' ipotesi geometrica della quarta dimensione sono ben diverse dall' ipotesi metafisica di uno spazio a quattro dimensioni effettivamente esistente fuori di noi (p. XII).

Come si applichi l'intuizione spaziale nello studio dello spazio generale si vede esuberantemente nel mio libro, e nei miei precedenti lavori.

A questo proposito (p. XXXIII) dissi che dallo svolgimento della II^a parte del testo risulta chiaramente che il mio processo costruttivo della geometria a più di tre dimensioni è un processo nel quale l'intuizione è fusa colla pura astrazione, ma che non intendo di intuire completamente le figure di n dimensioni e dello spazio generale come intuiamo quelle di tre, corrispondenti agli oggetti della nostra osservazione esterna. E a pag. XVII ho detto: se l'intuizione è necessaria per l' essenza della geometria (e secondo me dunque anche per quella a più di tre dimensioni nel senso sopra spiegato) non deve però essere elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria stessa; di guisa che (p. XVI) gli assiomi, i teoremi e le dimostrazioni fin da principio non contengano alcun elemento intuitivo indeterminato, in modo cioè che facendo astrazione dall'intuizione rimanga un sistema di proprietà astratte ben determinato. Ed è per questo che mi sono occupato, nell'introduzione, delle proprietà fondamentali dei gruppi di elementi, che nel mio libro servono di base alla geometria come all'aritmetica.

Questo è brevemente il concetto della geometria a più dimensioni nel senso da me inteso, e che sta pure a fondamento della mia citata Memoria ([6]).

Da quanto ho detto non è escluso che cogli assiomi dati lo spazio generale S possa essere costruito per via di definizioni. Considerandolo poi come un ente dato, sebbene astratto, e volendo stabilire le sue proprietà fondamentali caratteristiche, oltre gli assiomi suddetti, occorrono delle ipotesi che esprimano precisamente le proposizioni date da quelle definizioni, secondo le quali esiste un punto fuori di uno spazio S_n qualunque. Io di preferenza lo considero sotto questo aspetto, allo stesso modo che si considera lo spazio ordinario, applicando in ogni spazio S_3 di S l'intuizione spaziale. Si tratta in fondo di interpretazione diversa, che ha però la sua utilità nella ricerca geometrica. Ma per le conseguenze logiche non è necessario dare quelle proposizioni sotto forma di ipotesi.

Ora è chiaro che nel primo caso ogni proprietà P dedotta da S in S_3 è dimostrabile coi postulati dati e colla costruzione di S_3 (ossia col postulato delle tre dimensioni). Quindi ciò vale anche nel secondo caso, poichè nella dimostrazione di P si usano le stesse proposizioni.

Si può costruire ad esempio direttamente nello spazio ordinario R_3 coi procedimenti della geometria descrittiva a più di tre dimensioni ([7]) una rappresentazione Σ_4 di S_4 che soddisfi alle stesse proposizioni fondamentali di S_4, e in cui il punto ce lo immaginiamo come nello spazio ordinario. Essa dà la proiezione di S_4 in R_3. A ciò si riferiscono appunto le parole citate della pag. XXXIV.

Infatti, un punto di S_4 viene determinato nella proiezione centrale da una retta passante per esso colla sua traccia e col suo punto di fuga. Le traccie e gli elementi di fuga di rette situate nello stesso piano, o di piani situati nello stesso spazio a tre dimensioni, giacciono rispettivamente in rette, o in piani, paralleli. Gli elementi traccie e di fuga possono coincidere, e cadere anche all'infinito. Lo spazio R_3 in cui si proietta (indicato con Γ_3 se si considera appartenente a S_4) è rappresentato da sè stesso.

Queste osservazioni ci suggeriscono il modo di definire il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni di Σ_4 in R_3. Per costruire la varietà Σ_4 basta considerare un punto Π in R_3 (quale proiezione di un punto P di S_4 fuori di Γ_3), determinato da una retta passante per esso colla sua traccia e col suo punto di fuga; e come spazio direttore lo stesso spazio Γ_3, il quale appartiene anche a Σ_4. Le proprietà che hanno luogo fra gli elementi traccie e di fuga si dimostrano direttamente in R_3 con quelle delle rette e dei piani paralleli.

Osservando che ogni punto A' di Σ_4 in R_3 determina con un punto traccia S una retta il cui punto di fuga Q' non cade in S, e che ciò avviene soltanto quando S cade in A'; si vede che l'insieme delle rette le cui traccie e punti di fuga coincidono in R_3, ha tutte le proprietà di una stella di 2ª specie; e quindi si può dire che esse si incontrano in un *punto improprio* (corrispondente al centro di proiezione).

Ogni punto di R_3 rappresenta così ∞^1 punti, ogni retta ∞^2 rette, ogni piano

∞^3 piani, e lo spazio R_3 stesso rappresenta lo spazio Γ_3 e ∞^4 altri spazî a tre dimensioni di Σ_4 determinati dalle coppie di piani paralleli di R_3.

Se le traccie e gli elementi di fuga coincidono, allora si tratta di rette, piani e spazî a tre dimensioni passanti pel punto corrispondente al centro di proiezione. Se, ad esempio, le traccie e i punti di fuga delle rette di Σ_4, rappresentate da rette di R_3, cadono all'infinito, allora esse si chiamano *parallele* allo spazio Γ_3.

Due, tre, quattro punti indipendenti di Σ_4 determinano rispettivamente una retta, un piano e uno spazio a tre dimensioni.

Per le proprietà metriche basta costruire direttamente in R_3 colla sfera delle distanze un sistema polare che sia la proiezione del sistema polare ortogonale di 2^o grado intorno al centro di proiezione.

Se si considera Σ_4 indipendentemente da R_3, applicando l'intuizione spaziale in ogni spazio Σ_3 di essa, immaginando cioè il piano di fuga di Σ_3 all'infinito, si ha precisamente lo spazio S_4.

Ogni proprietà di Γ_3, dimostrata per mezzo dei postulati dati e della proposizione che in S_4 esiste un punto fuori di ogni spazio S_3, si dimostra in Σ_4 cogli stessi postulati e colla stessa proposizione data per definizione.

Ciò che vale fra S_4 e S_3, vale evidentemente anche fra S_n e S_{n-1}, e quindi anche fra S_n e S_3.

Da questa costruzione risulta pure quanta utilità si abbia anche per le applicazioni da S_n in S_3 nel considerare come spazio a quattro dimensioni S_4 anzichè una sua rappresentazione Σ_4 in S_3 stesso; specialmente perchè in S_4 i punti, le rette, i piani, ecc., ce li immaginiamo tutti allo stesso modo, come nello spazio ordinario.

Dalle parole citate della pag. XXXIII e della pag. 612, e da quelle sopra ricordate, risulta invece che fatta astrazione dall'intuizione, dallo spazio S abbiamo una varietà Σ determinata da infiniti elementi indipendenti, e da ogni spazio S_n una varietà Σ_n contenuta in Σ. E le proposizioni che si ottengono dagli assiomi suddetti servono a stabilire le proprietà proiettive e metriche di ogni varietà Σ_n. Queste varietà possono essere trattate indipendentemente dall'intuizione o dagli assiomi suddetti sia col metodo sintetico sia col metodo analitico, partendo dai gruppi di elementi.

Se vi è dunque un vantaggio nella deduzione da Σ_n a Σ_3, vi è pure lo stesso vantaggio (passando coll'intuizione allo spazio S in base agli assiomi stabiliti) da S_n a S_3. Infatti, gli assiomi di S_3, e così quelli di S_n, considerando questo come dato, servono a stabilire, avendo riguardo al metodo analitico, un sistema di coordinate in modo che S_3 e S_n corrispondono perfettamente a Σ_3 e Σ_n, e inversamente. Cosicchè, ad ogni proprietà P dedotta da S_n in S_3 corrisponde una proprietà Π dedotta da Σ_n e Σ_3, che interpretata geometricamente si muta nella P. E siccome per stabilire la corrispondenza fra S_3 e Σ_3 bastano i po-

stulati dello spazio ordinario, così la proposizione P si può dimostrare con essi soltanto.

Inversamente, dalla varietà Σ_n applicando l'intuizione spaziale in ciascuna delle sue varietà lineari Σ_3, si giustifica la proposizione: esiste un punto fuori dello spazio ordinario. E considerando poi anche in questo caso lo spazio S_n così ottenuto come dato, diamo con un'ipotesi la proposizione suddetta.

Qualunque siano le definizioni corrispondenti alle ipotesi di S, ciò non significa che la proprietà P non possa essere dedotta dai postulati di S_3 senza ricorrere a quelle definizioni (8). Ma se così fosse sarebbe maggiormente dimostrato il vantaggio della geometria a più di tre dimensioni quale metodo di ricerca in S_3, sebbene essa non sia in sè un metodo, perchè essa ha teoricamente lo stesso diritto di esistenza della geometria ordinaria.

La mia rappresentazione del tutto geometrica dell'iperspazio si può applicare adunque ad ogni varietà di elementi, come ad ogni varietà geometrica a più di tre dimensioni, che soddisfi ai miei assiomi.

Quanto al resto della lettera del direttore della *Rivista* mi limito ad osservare che l'appunto che egli fa al 2° esempio della 4ª nota della pag. XXVIII del mio libro nulla dimostra contro la mia osservazione, espressa sotto forma di opinione, sullo svolgimento di un sistema di proprietà astratto; osservazione di metodo che d'altronde, come risulta dal brano di cui fa parte quello riportato dal sig. Peano, nulla ha a che fare col corpo del mio libro. In esso poi non vi è alcuna confusione fra ipotesi e definizioni (9).

Osservo ancora che nel mio libro si trova una risposta anche a parte della domanda del prof. Peano, che riguarda un appunto di metodo fatto a pag. 608 al suo opuscolo sui principî della geometria; appunto del resto secondario rispetto alla stessa critica da me fatta all'applicazione della logica deduttiva alla matematica (10).

Padova, 29 febbrajo 1892.

G. Veronese.

---

(1) Queste osservazioni sarebbero state pubblicate molto prima se l'Autore non fosse stato colpito da una recente e grave sventura domestica.

(2) Vol I, fasc. 3°-4°, 5°-6°, 1891.

Chiamai questa teoria nel senso da me inteso perchè in quell'articolo il prof. Segre si era riferito genericamente nei punti che diedero luogo a quelle osservazioni ad alcuni miei precedenti lavori (l. c. pag. 58 e seg.), e perchè il prof. Peano accennò alla « teoria degli spazî a quattro e più dimensioni ove si supponga che i punti dell'iperspazio siano tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario » (Rivista pag. 67).

(3) Padova, Libreria e Tipografia del Seminario.

(4) Linee 21-32 della pag. XXXIV, linee 1-2 della pag. XXXV e la 3a nota della pag. XXXIV.

Linee 28-33 della pag. XXXIII e 11-14 della pag. 612.

Specialmente nelle linee 11-21 della pag. XIV e 13-23 della pag. XV si può trovare una risposta a quanto disse il direttore della *Rivista* sulle ipotesi matematiche (Rivista p. 67), come pure alle sue considerazioni sul rigore matematico (ib. pag. 66-67) nella prefazione a pag. XXXVIII e XXXIX e in principio dell'appendice.

(5) L'affermazione del sig. Peano è questa: « *Ogni proposizione dimostrata* « *vera servendosi dello spazio a quattro dimensioni* (cioè del postulato: esistono punti « fuori dello spazio ordinario) *cessa di valere nello spazio a tre*, perchè non si è « dimostrata conseguenza dei soli postulati della geometria elementare ». E così: « la geometria a tre dimensioni non può aiutare quella a due ».

Il *cessa di valere* non deve essere qui interpretato nel senso che « non è più « vera » o « non è conseguenza logica dei postulati dello spazio ordinario o del piano » ma nel senso che « può non essere più vera», sebbene sia compatibile con quei postulati.

Nessun esempio egli ha dato di proposizioni dedotte da S_4 in S_3 o da S_3 in S_2 che *cessino di valere* in S_3 o in S_2, quando i postulati di S_3 e di S_2 sono quelli comunemente ammessi per definirli corrispondentemente alla rappresentazione che abbiamo già di essi.

Del resto io stesso avevo preveduto l'obiezione suddetta e avevo anche accennato ad una risposta in una nota della mia Memoria « *La superficie omaloide normale del 4° ordine*, ecc. » (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1884, pag. 2).

Egli ammette però (Rivista p. 157) che vi è un grande vantaggio nel passare da una varietà analitica di n variabili ad una di minori dimensioni.

(6) Ciò del resto non esclude che come geometria a più dimensioni si possa *poi* anche chiamare la teoria di sistemi continui di enti geometrici che non siano punti, ma *già costruiti* nello spazio generale (pag. XXXIII).

(7) A. Geom. descrittiva a quattro dimensioni (Atti del R. Istituto Veneto, 1882).

(8) Ciò non succede almeno per molte proposizioni.

(9) Nella prefazione ho usato talvolta questi nomi per indicare che autori diversi procedono per definizioni o per ipotesi per stabilire un dato sistema astratto di proprietà.

(10) Pref. pag. XXIV lin. 23-31. Ho detto già in principio dell'appendice che nella lettura di questa parte complementare bisogna tener conto delle considerazioni generali svolte nella prefazione; come per alcuni lavori occorre tener conto delle osservazioni fatte ad altri, che sotto qualche aspetto entrano nella stessa categoria.

Offerto dall'Autore.

OMO VI. ANNO 1892.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

(28, via Ruggiero Settimo)

ADUNANZA DEL 13 MARZO 1892.

G. VERONESE.

A proposito di una Lettera del prof. Peano.

(Estratto)

OSSERVAZIONI SOPRA UNA DIMOSTRAZIONE CONTRO IL SEGMENTO INFINITESIMO ATTUALE;

di **G. Veronese**, in Padova.

Estratto dal tomo VI (1892) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza del 22 maggio 1892.

Il prof. Peano ha pubblicato nel fascicolo di marzo della *Rivista di Matematica* una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale, assicurando che essa è lo sviluppo di quella data dal sig. G. Cantor (*).

Nella nota a pag. 105 dei miei « *Fondamenti di Geometria* » (**) ho discussa questa dimostrazione, pur avendola dichiarata incompleta non risultando da essa il concetto preciso dell'autore.

(*) Zeitschr. für Phil. v. Fichte, vol. 91, fasc. I, pag. 112, 1887; od anche: Zur Lehre von Transfiniten. Halle, 1890.

Il teorema enunciato da Cantor è questo:

« Non vi sono grandezze numeriche lineari ζ diverse da zero (vale a dire « grandezze numeriche tali che hanno per immagine dei segmenti *continui* limitati) « che siano minori di ogni grandezza numerica finita ».

Egli dice di essere giunto a darne la dimostrazione mediante « *certi teoremi dei numeri transfiniti* ».

Il continuo è qui inteso naturalmente nel senso ordinario, il quale, come si sa senza ricorrere ai numeri transfiniti, soddisfa all'assioma V d'Archimede, che esclude appunto gli infinitesimi fra i segmenti limitati.

(**) Libreria e Tipografia del Seminario. — Padova, 1891.

La dimostrazione della *Rivista* si riduce in fondo agli ultimi periodi (*). Sebbene in essa non si parli della mia teoria degli infi-

---

(*) l. c. pag. 58-62. La dimostrazione suddetta consiste semplicemente in ciò. Considerato a partire da un punto O sulla retta in una data direzione un segmento u (indipendente però dal postulato del continuo), l'insieme di tutti i segmenti multipli di u secondo un numero intero finito viene indicato con ∞u, e viene chiamato segmento d'ordine infinito.

Questo segmento rappresenta l'intera retta a partire da O, se non vi sono segmenti infinitesimi.

Se u è infinitesimo rispetto a v (vale a dire che ogni multiplo di u secondo un numero intero e finito è minore di v) naturalmente ∞u appartiene a v, considerando u e v a partire da O nella direzione data e limitati.

Per somma di due segmenti u e v terminati o no si definisce il segmento luogo degli estremi di tutti i segmenti che si ottengono sommando due segmenti terminati l'uno ad un punto di u e l'altro ad un punto di v, coll'origine O. E la somma dei segmenti terminati s'intende eseguita nel senso ordinario.

Da questa definizione (senza bisogno di *alcun* teorema dei numeri transfiniti del sig. Cantor, ma della sola loro formazione) si ha subito che $(\infty + 1)u = \infty u$, $2\infty u = \infty u$ ecc., e che per ciò con una moltiplicazione coi numeri suddetti (indicati invece da Cantor coi simboli ω, $\omega + 1$, ... 2ω ecc.) da u non si ottiene v. D'altronde è ovvio che ∞u per la definizione data è illimitato.

Per ciò solo la *Rivista* afferma l'impossibilità del segmento infinitesimo attuale.

Aggiungo un'altra osservazione *indipendente* dai miei infiniti e infinitesimi.

Il direttore della *Rivista* dice: « Risulta che il segmento ∞u quantunque « compreso nel segmento v, non può essere terminato, perchè se ad un segmento « terminato si aggiunge il segmento u, ovvero si raddoppia, si avrà un nuovo « segmento maggiore del primo »; vale a dire non valgono per i segmenti terminati le uguaglianze suddette.

Ma queste uguaglianze non dipendono dalle proprietà dei numeri transfiniti del sig. Cantor, pei quali come si sa è $\omega + 1 > \omega$, $2\omega > \omega$ ecc., ma dal considerare appunto ∞u come illimitato.

Il sig. Cantor stesso ha supposto in altro luogo (l. c. lett. II) che il segmento ωu, essendo u un segmento terminato (AA') preso come unità, sia rappresentato invece a partire da A sulla retta in una data direzione da un segmento (AO) limitato in un punto O (« actualunendliche Linie AO, die ihren Ziehlpunkt O in Unendlichen hat » . . . « während alle anderen Punkte M, A, B der Geraden AO um ein gleiches Stück $MM' = AA' = BB'$ nach links gezogen werden, *allein der Unendlich ferne Punkt O fest an seinem Platze bleibt* ». Veggasi la mia citata nota a pag. 105 del mio libro).

Il numero $\omega + 1$ (non già $1 + \omega = \omega$) viene quindi rappresentato dal seg-

niti e infinitesimi, trattandosi di una dimostrazione di Cantor credo opportuno di far rilevare che non solo le considerazionia ccennate nella nota anzidetta, ma eziandio le prime definizioni stesse dei miei segmenti infiniti e infinitesimi (pag. 84 e segu.), la rappresentazione geometrica che ho dato di una parte del continuo assoluto nella nota a pag. 166, e i simboli dei miei numeri infiniti e infinitesimi servono senz'altro a dimostrare come non sia applicabile al mio segmento infinitesimo attuale l'interpretazione data dalla *Rivista* alla detta dimostrazione, e da me del resto preveduta nella nota citata.

Come la geometria non Euclidea e quella a più di tre dimensioni sia nel senso analitico che in quello puramente geometrico sono da ritenersi ormai fuori di questione, così è del segmento infinitesimo attuale. Ma occorre naturalmente che si esamini senza preconcetti che cosa io intendo per un tale ente. Nel mio libro, quando si è trattato di importanti controversie, ho ritenuto necessario di svolgere ampiamente le mie idee confutando poi sia nelle frequenti note del testo, sia nell'Appendice le obiezioni principali contro di esse, o facendo vedere che se queste obiezioni valevano per altri autori non valgono per me (*). E nell'appendice (pag. 619-625) ho fatto rilevare appunto i difetti di alcune dimostrazioni od osservazioni matematiche contro l'infinito e l'infinitesimo attuale.

Le applicazioni degli infiniti e infinitesimi, che ho fatte nel mio libro alla geometria, sia per collegare in un solo sistema quelli di Euclide e di Riemann e servirmi di questo nella trattazione del primo, sia per stabilire una geometria indipendente dall'assioma V

---

mento $(AO) + (OO_1) = (AO_1)$, essendo $(OO_1) = (AA')$, ecc. In tal caso preso come segmento v il segmento terminato (AO) stesso, $\omega u (\text{opp} \infty u) = v$, $(\omega + 1) u > v$, essendo anche in questo caso u infinitesimo attuale rispetto a v, senza che siano soddisfatte le uguaglianze $(\infty + 1) u = \infty u$ ecc.

Non vale però incondizionatamente la legge commutativa della somma, perchè ad es. si ha $1 + \omega = \omega < \omega + 1$, come vale invece pei miei infiniti e infinitesimi. Non è dunque collo sviluppo dato dalla *Rivista* alla dimostrazione di Cantor ma ricorrendo alla legge commutativa della somma che viene escluso [redacted] in tal caso l'infinitesimo costante.

(*) Leggasi a tal proposito la nota a pag. VI.

d'Archimede, che chiamai assoluta, servono anche di conferm
alla teoria suddetta.

Ma, come avvertii nella prefazione, nelle note indicate con nume romani, che accompagnano il testo della prima parte, trattai pure l geometria senza gli infiniti e infinitesimi, allo scopo di mostrare l utilità di questi, che si rende più manifesta nello studio degli spa a tre e a più di tre dimensioni, come pure per agevolare la solu zione del problema didattico (*).

Padova, 14 maggio 1892.

G. VERONESE.

(*) Vedi pag. XXXVI e XXXVII.

Estratto dai " Rendiconti „ del R. Ist. Lomb. di sc. e lett., Serie II, Vol. XXXII, 1899.

SULL' ESTENSIONE DEL METODO D'INTEGRAZIONE DI MONGE E AMPÈRE.

Nota

di GIULIO VIVANTI.

1. In due lavori pubblicati già da qualche anno (*) ho determi-ato la forma più generale delle equazioni a derivate parziali del econdo ordine ad un numero qualunque di variabili indipendenti he costituiscono la generalizzazione delle equazioni di Ampère, e, tudiando più particolarmente il caso di tre variabili indipendenti, o stabilito un certo sistema di equazioni di condizione tra i coef-cienti, soddisfatte le quali, l'integrazione dell'equazione può ri-ursi a quella d'un sistema di equazioni lineari a differenziali to-ili. Naturalmente questo sistema di condizioni non è l'unico che ermetta tale riduzione; io stesso (**) ho trattato un esempio in cui il stema non è soddisfatto o prende forma illusoria, e Forsyth (***) ı trovato un sistema di condizioni che comprende il mio come ıso speciale.

Mi propongo ora di mostrare, come il tipo d'equazioni a cui sono unto pel caso di tre variabili indipendenti abbia il suo analogo ɜr un numero qualunque di variabili.

(*) *Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali di se-ındo ordine.* Rend. dell' Ist. Lomb., Ser. II, Vol. XXIX, p. 777-792; *ılle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili in-ɪpendenti.* Math. Ann., T. XLVIII, p. 474-513.

(**) V. il § 7 del secondo dei due lavori citati.

(***) *Partial differential equations of the second order, involving three ɪdependent variables and possessing an intermediary integral.* Cambr. ɪil. Trans., Vol. XVI, P. III, p. 191-218.

2. Importa a tal uopo richiamare le notazioni e alcuni dei risultati dei già citati lavori.

Sieno:

x_1, x_2, x_3 le variabili indipendenti;
z, p_i, p_{ih} la variabile dipendente e le sue derivate prime e seconde;
Δ il determinante delle p_{ih};
P_{ih} gli elementi dell'aggiunto del determinante Δ;
$R_{ih} = R_{hi}$, $S_{ih} = S_{hi}$, T, U funzioni qualunque delle z, x_i, p_i;
V, W i determinanti formati rispettivamente colle R_{ih} e colle S_{ih};
X_{ih}, Y_{ih} gli elementi degli aggiunti rispettivamente dei determinanti V e W.

La forma più generale delle equazioni di Ampère per tre variabili indipendenti è allora:

$$\begin{aligned} &R_{11}\, p_{11} + R_{22}\, p_{22} + R_{33}\, p_{33} + 2\, R_{12}\, p_{12} + 2\, R_{13}\, p_{13} + 2\, R_{23}\, p_{23} \\ &+ S_{11}\, P_{11} + S_{22}\, P_{22} + S_{33}\, P_{33} + 2\, S_{12}\, P_{12} + 2\, S_{13}\, P_{13} + 2\, S_{23}\, P_{23} \\ &+ T\Delta + U = 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Poichè il sistema di condizioni di cui dovremo occuparci presuppone U non identicamente nullo, potremo fare $U = 1$, dopo di che il sistema stesso diviene:

$$Y_{ih} = R_{ih}\, T, \qquad W = T^2 \qquad (i, h = 1, 2, 3).$$

Esso può prendere la forma equivalente:

$$S_{ih} = X_{ih}, \qquad T = V \qquad (i, h = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

dove tutti gli altri coefficienti dell'equazione sono espressi esplicitamente mediante le R_{ih}.

Le condizioni trovate da Forsyth, anzichè 7, sono soltanto 4. Possiamo però portarle di nuovo a 7, introducendo in esse 3 quantità arbitrarie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Per tal modo esse, colle nostre notazioni, assumono la forma seguente:

$$S_{ih} = G\,(X_{ih} - V\theta_{ih}), \qquad T = GV \qquad (i, h = 1, 2, 3),$$

dove:

$$G = -\frac{1}{X_{11}\,\lambda_1{}^2 + X_{22}\,\lambda_2{}^2 + X_{33}\,\lambda_3{}^2 + 2X_{12}\,\lambda_1\lambda_2 + 2X_{13}\,\lambda_1\lambda_3 + 2X_{23}\,\lambda_2\lambda_3 - 1}$$

$$\theta_{ii} = R_{hh}\,\lambda_k{}^2 + R_{kk}\,\lambda_h{}^2 - 2R_{hk}\,\lambda_h\,\lambda_k\,,$$

$$\theta_{ih} = R_{ik}\,\lambda_h\,\lambda_k + R_{hk}\,\lambda_i\,\lambda_k - R_{ih}\,\lambda_k{}^2 - R_{kk}\,\lambda_i\,\lambda_h\,,$$

i, h, k designando una permutazione qualunque dei numeri 1, 2, 3.

Da queste condizioni si passa alle nostre facendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

3. Supposte soddisfatte le (2), l'equazione (1) diviene:

$$\begin{aligned} R_{11}\,p_{11} + R_{22}\,p_{22} + R_{33}\,p_{33} + 2\,R_{12}\,p_{12} + 2\,R_{13}\,p_{13} + 2\,R_{23}\,p_{23} \\ + X_{11}\,P_{11} + X_{22}\,P_{22} + X_{33}\,P_{33} + 2\,X_{12}\,P_{12} + 2X_{13}\,P_{13} + 2X_{23}\,P_{23} \\ + V\Delta + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo membro di essa è la somma dei prodotti dei minori principali omologhi di tutti gli ordini (compresi gli ordini estremi 0 e 3) dei due determinanti V e Δ, ossia (*) è la somma di tutti i minori principali del determinante prodotto $V\Delta$. Tale somma è (**) lo sviluppo del determinante ottenuto aggiungendo l'unità agli elementi diagonali del determinante $V\Delta$. Posto cioè:

$$\rho_{ih} = R_{i1}\,p_{h1} + R_{i2}\,p_{h2} + R_{i3}\,p_{h3},$$

'equazione (3) assume la forma:

$$\begin{vmatrix} \rho_{11}+1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22}+1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dopo ciò, la generalizzazione si presenta spontanea. Se n è il umero delle variabili indipendenti, posto:

$$\rho_{ih} = \sum_{t=1}^{n} R_{it}\,p_{ht},$$

ove le R sono funzioni delle z, x_i, p_i che soddisfanno unicamente lle condizioni $R_{ih} = R_{hi}$, il tipo d'equazioni che vogliamo consierare è:

$$\begin{vmatrix} \rho_{11}+1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22}+1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

4. È facile verificare che l'integrazione dell'equazione (4) può dursi a quella d'un sistema d'equazioni lineari a differenziali to-

(*) PASCAL, *I determinanti*. Milano, Hoepli, 1897, § 15.
(**) PASCAL, op. cit., § 11.

tali. Moltiplicando la prima colonna del determinante per dx_1, e[
aggiungendo i prodotti delle altre colonne rispettivamente pe[
$dx_2, dx_3, \ldots, dx_n$, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \sum_{h=1}^{n} \rho_{1h}\, dx_h + dx_1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1n} \\ \sum_{h=1}^{n} \rho_{2h}\, dx_h + dx_2 & \rho_{22}+1 & \ldots & \rho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{h=1}^{n} \rho_{nh}\, dx_h + dx_n & \rho_{n2} & \ldots & \rho_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora:

$$\sum_{h=1}^{n} \rho_{ih}\, dx_h = \sum_{h=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} R_{it}\, p_{ht}\, dx_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e:

$$\sum_{h=1}^{n} p_{ht}\, dx_h = dp_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

quindi:

$$\sum_{h=1}^{n} \rho_{ih}\, dx_h = \sum_{t=1}^{n} R_{it}\, dp_t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sicchè l'equazione diviene:

$$\begin{vmatrix} \sum_{t=1}^{n} R_{1t}\, dp_t + dx_1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1n} \\ \sum_{t=1}^{n} R_{2t}\, dp_t + dx_2 & \rho_{22}+1 & \ldots & \rho_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{t=1}^{n} R_{nt}\, dp_t + dx_n & \rho_{n2} & \ldots & \rho_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5$$

Quest'equazione è soddisfatta ogniqualvolta lo sia il sistema d'equa[
zioni lineari a differenziali totali:

$$\sum_{t=1}^{n} R_{it}\, dp_t + dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (6$$

5. L'equazione (4) può porsi sotto altra forma. Moltiplichiamone [
primo membro per l'aggiunto del determinante Δ delle p_{ih}, i cu[
elementi indicheremo con P_{ih}. Osservando che:

$$\rho_{i1} P_{1h} + \ldots + (\rho_{ii} + 1) P_{ih} + \ldots + \rho_{in} P_{nh} = \sum_{t=1}^{n} \left[R_{it} \sum_{r=1}^{n} P_{rh} p_{rt} \right]$$
$$+ P_{ih} = R_{ih} \Delta + P_{ih},$$

si vede che la (4) diviene:

$$\begin{vmatrix} R_{11} \Delta + P_{11} & R_{12} \Delta + P_{12} & \ldots & R_{1n} \Delta + P_{1n} \\ R_{21} \Delta + P_{21} & R_{22} \Delta + P_{22} & \ldots & R_{2n} \Delta + P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} \Delta + P_{n1} & R_{n2} \Delta + P_{n2} & \ldots & R_{nn} \Delta + P_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

6. Il sistema (6) può trasformarsi in modo noto nel sistema d'equazioni lineari omogenee a derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} - \sum_{t=1}^{n} R_{it} \frac{df}{dx_t} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (8)$$

dove:

$$\frac{df}{dx_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + p_t \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n).$$

7. Gl'integrali del sistema (8) sono due a due in involuzione. Sieno infatti f_1, f_2 due integrali; dalle relazioni:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_i} = \sum_{t=1}^{n} R_{it} \frac{df_1}{dx} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial p_i} = \sum_{t=1}^{n} R_{it} \frac{df_2}{dx_t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

segue:

$$[f_1, f_2] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{df_2}{dx_i} - \frac{\partial f_2}{dp_i} \frac{df_1}{dx_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} R_{it} \left(\frac{df_1}{dx_t} \frac{df_2}{dx_i} - \frac{df_2}{dx_t} \frac{df_1}{dx_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{df_1}{dx_t} \frac{df_2}{dx_i} (R_{it} - R_{ti}) = 0.$$

8. Se il sistema (8) ammette n integrali indipendenti, esso ne ammette $n + 1$, e quindi è completo.

Sieno $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n integrali indipendenti del sistema. Poichè, come risulta dall'articolo precedente:

$$[f_i, f_h] = 0 \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n),$$

è noto che esiste una funzione φ la quale soddisfa alle relazioni:

$$[\varphi, f_r] = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

ossia:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{df_r}{dx_i}-\frac{\partial f_r}{\partial p_i}\frac{d\varphi}{dx_i}\right)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,n). \qquad (9)$$

Ora:

$$\frac{\partial f_r}{\partial p_i}=\sum_{t=1}^{n}R_{it}\frac{df_r}{dx_t} \qquad (i, r=1,2,\ldots,n),$$

quindi le (9) divengono:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{df}{dx_i}-\frac{d\varphi}{dx_i}\sum_{t=1}^{n}R_{it}\frac{df_r}{dx_t}\right)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,n),$$

ossia, tenuto conto che $R_{it}=R_{ti}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}-\sum_{t=1}^{n}R_{it}\frac{d\varphi}{dx_t}\right)\frac{df_r}{dx_i}=0 \qquad (r=1,2,\ldots,n). \qquad (10)$$

Ma poichè per ipotesi:

$$\frac{d\,(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{d\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv\mid\equiv 0,$$

le (10) possono sussistere soltanto se:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}-\sum_{t=1}^{n}R_{it}\frac{d\varphi}{dx_t}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

relazioni le quali provano che φ è un integrale del sistema (8).

9. Applichiamo all'equazione (7) la trasformazione di Legendre:

$$z'=\sum_{t=1}^{n}p_t\,x_t-z\,, \qquad x'_i=p_i \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Si ha, come è noto:

$$z=\sum_{t=1}^{n}p'_t\,x'_t-z'\,, \qquad x_i=p'_i \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

$$p'_{ik}=\frac{P_{ih}}{\Delta}, \qquad p_{ih}=\frac{P'_{ih}}{\Delta'}, \qquad \Delta=\frac{1}{\Delta'} \qquad (i, h=1,2,\ldots,n),$$

dove Δ' è il determinante delle p'_{ih}, e P'_{ih} è il complemento algebrico di p'_{ih} in questo determinante. Fatte le sostituzioni, e mol-

tiplicati tutti gli elementi del determinante per Δ', si ottiene:

$$\begin{vmatrix} R_{11}+p'_{11} & R_{12}+p'_{12} & \dots & R_{1n}+p'_{1n} \\ R_{21}+p'_{21} & R_{22}+p'_{22} & \dots & R_{2n}+p'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}+p'_{n1} & R_{n2}+p'_{n2} & \dots & R_{nn}+p'_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Moltiplichiamo pel determinante formato colle $\frac{X_{ih}}{V}$; avremo:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}+1 & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22}+1 & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn}+1 \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

dove:

$$\xi_{ih} = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_{it}}{V} p'_{ht} \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

e le $\frac{X_{ih}}{V}$ sono funzioni delle z', x'_i, p'_i che soddisfanno soltanto alle condizioni $\frac{X_{ih}}{V} = \frac{X_{hi}}{V}$.

Dunque l'equazione trasformata (11) è ancora del tipo della (4).

10. Applichiamo ora la trasformazione d'Ampère:

$$z' = z - p_n x_n, \qquad x'_1 = x_1, \dots, x'_{n-1} = x_{n-1}, \qquad x'_n = -p_n.$$

In virtù di note formole (*) si ha:

$$P_{ih} = -\frac{Q'_{ih}}{p'_{nn}} \qquad (i<n,\ h<n),$$

$$P_{in} = \frac{P'_{in}}{p'_{nn}} \qquad (i<n),$$

$$P_{nn} = \frac{\Delta'}{p'_{nn}} \quad , \quad \Delta = -\frac{P'_{nn}}{p'_{nn}},$$

dove Q'_{ih} denota il complemento algebrico dell'elemento p'_{ih} nel determinante P'_{nn}.

(*) *Contributo,* ecc., n. 3.

Se si fa la sostituzione nella (7), e si moltiplicano poi tutti gli elementi del determinante per $-p'_{nn}$, si ottiene:

$$|\eta_{rs}| = 0, \tag{12}$$

dove:

$$\eta_{ih} = R_{ih}\, P'_{nn} + Q'_{ih} \qquad (i < n, h < n),$$
$$\eta_{in} = \eta_{ni} = R_{in}\, P'_{nn} - P'_{in} \qquad (i < n),$$
$$\eta_{nn} = R_{nn}\, P'_{nn} - \Delta'.$$

Moltiplichiamo la (12) per:

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \,\ldots\ldots\, p'_{1,\,n-1} & 0 \\ p'_{21} & p'_{22} \,\ldots\ldots\, p'_{2,\,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ p'_{n-1,\,1} & p'_{n-1,\,2} \,\ldots\, p'_{n-1,\,n-1} & 0 \\ p'_{n1} & p'_{n2} \,\ldots\ldots\, p'_{n,\,n-1} & -1 \end{vmatrix} = -P'_{nn};$$

otterremo:

$$|\mu_{rs}| = 0,$$

dove:

$$\mu_{ii} = \sum_{t=1}^{n-1} \eta_{it}\, p'_{it} = P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{it} + \sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{it}$$
$$= p'_{nn}\, [\sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{it} + 1] \qquad (i < n),$$

$$\mu_{ih} = \sum_{t=1}^{n-1} \eta_{it}\, p'_{ht} = P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{ht} + \sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{ht}$$
$$= P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{ht} \qquad (i < n, h < n, i \neq h),$$

$$\mu_{in} = \sum_{t=1}^{n-1} \eta_{it}\, p'_{nt} - \eta_{in} = P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{nt} + \sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{nt} - R_{in}\, P'_{nn}$$
$$+ P'_{in} = P'_{nn} [\sum_{t=1}^{n-1} R_{it}\, p'_{nt} - R_{in}] \qquad (i < n),$$

$$\mu_{nh} = \sum_{t=1}^{n-1} \eta_{nt}\, p'_{ht} = P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{nt}\, p'_{ht} - \sum_{t=1}^{n-1} P'_{nt}\, p'_{ht}$$
$$= P'_{nn}\, [\sum_{t=1}^{n-1} R_{nt}\, p'_{ht} + p'_{hn}] \qquad (h < n),$$

$$\mu_{nn} = \sum_{t=1}^{n-1} \eta_{nt}\, p'_{nt} - \eta_{nn} = P'_{nn} \sum_{t=1}^{n-1} R_{nt}\, p'_{nt} - \sum_{t=1}^{n-1} P'_{nt}\, p'_{nt} - R_{nn}\, P'_{nn}$$

$$+ \Delta' = P'_{nn} \left[\sum_{t=1}^{n-1} R_{nt}\, p'_{nt} + p'_{nn} - R_{nn}\right] \quad (^*).$$

Dopo aver diviso tutti gli elementi del determinante (μ_{rs}) per P'_{nn} togliamo dalla 1ª, 2ª,..., $(n-1)$-esima linea la n-esima moltiplicata rispettivamente per $\frac{R_{1n}}{R_{nn}}, \frac{R_{2n}}{R_{nn}}, \ldots, \frac{R_{n-1,\,n}}{R_n}$, e dividiamo la n-esima

---

(*) Bisogna tener conto delle relazioni seguenti:

$$\sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{it} = P'_{nn} \qquad (i < n), \tag{α}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{ht} = 0 \qquad (i < n, h < n, i \neq h), \tag{β}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{nt} = -P'_{in} \qquad (i < n), \tag{γ}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} P'_{nt}\, p'_{ht} = -P'_{nn}\, p'_{hn} \qquad (h < n), \tag{δ}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} P'_{nt}\, p'_{nt} = \Delta' - P'_{nn}\, p'_{nn}. \tag{ε}$$

Le (α), (β), (δ), (ε) risultano immediatamente da teoremi elementari sui determinanti. La (γ) si dimostra come segue. Posto in generale $p'_{rs} = a_{rs}$, si ha:

$$P'_{rs} = \frac{\partial \Delta'}{\partial a_{rs}} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

$$Q'_{ih} = \frac{\partial P'_{nn}}{\partial a_{ih}} = \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial a_{nn}\, \partial a_{ih}} \qquad (i < n, h < n);$$

ora si ha, come è noto:

$$\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial a_{nn}\, \partial a_{ih}} = -\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial a_{in}\, \partial a_{nh}},$$

quindi:

$$Q'_{ih} = -\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial a_{in}\, \partial a_{nh}},$$

e:

$$\sum_{t=1}^{n-1} Q'_{it}\, p'_{nt} = -\sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial a_{in}\, \partial a_{nt}}\, a_{nt} = -\frac{\partial \Delta'}{\partial a_{in}} = -P'_{in}.$$

linea per $-R_{nn}$. L'equazione diverrà:

$$|\nu_{rs}| = 0,$$

dove:

$$\left.\begin{array}{l} \nu_{ik} = \dfrac{1}{P'_{nn}}\left[\mu_{ik} - \dfrac{R_{in}}{R_{nn}}\mu_{nk}\right] \\ \nu_{nk} = -\dfrac{1}{P'_{nn}}\dfrac{\mu_{nk}}{R_{nn}}. \end{array}\right\} (i < n, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Introducendo le espressioni trovate per le μ, si ottiene, con qualche riduzione:

$$\left.\begin{array}{l} \nu_{rr} = \sum_{t=1}^{n} R'_{rt}\, p'_{rt} + 1 \\ \nu_{rs} = \sum_{t=1}^{n} R'_{rt}\, p'_{st} \end{array}\right\} (r, s = 1, 2, \ldots, n\,;\, r \gtrless s),$$

dove:

$$R'_{ih} = R'_{hi} = \frac{R_{ih}R_{nn} - R_{in}R_{hn}}{R_{nn}} \quad (i < n, h < n),$$

$$R'_{in} = R'_{ni} = -\frac{R_{in}}{R_{nn}} \quad (i < n),$$

$$R'_{nn} = -\frac{1}{R_{nn}}.$$

Dunque anche in questo caso l'equazione trasformata è dello stesso tipo della primitiva.

11. Può dimostrarsi più generalmente, che qualunque trasformazione di contatto:

$$z = Z(z', x'_h, p'_h), \quad x_i = X_i(z', x'_h, p'_h), \quad p_i = P_i(z', x'_h, p'_h) \quad (13)$$

muta un'equazione del tipo (4) in una dello stesso tipo. Basta a tal uopo far vedere, che il determinante in cui si trasforma il primo membro delle (5) può ridursi ad un determinante avente gli elementi di una sua colonna della forma:

$$\sum_{t=1}^{n} R'_{it}\, dp'_t + dx'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $R'_{rs} = R'_{sr}$, o, ciò che è lo stesso, che il sistema (6) si trasforma, in virtù delle (13), in un sistema della forma:

$$\sum_{t=1}^{n} R'_{it}\, dp'_t + dx'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $R'_{rs} = R'_{sr}$.

Applicando la trasformazione (13) al sistema (6), e ponendo:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} R_{it}\frac{\partial P_t}{\partial p'_h}+\frac{\partial X_i}{\partial p'_h}=M_{ih}\\ \sum_{t=1}^{n} R_{it}\frac{dP_t}{dx'_h}+\frac{dX_i}{dx'_h}=N_{ih}\end{aligned}\right\}\ (i,\ h=1,2,\ldots,n),$$

esso diviene:

$$\sum_{h=1}^{n} M_{ih}\,dp'_h+\sum_{h=1}^{n} N_{ih}\,dx'_h=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Risolvendo rispetto alle dx'_i, si ricava:

$$\sum_{t=1}^{n} R'_{it}\,dp'_t+dx'_i=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

dove:

$$R'_{rs}=\begin{vmatrix} N_{11}\ldots N_{1,\,r-1}\ M_{1s}\ N_{1,\,r+1}\ldots N_{1n}\\ N_{21}\ldots N_{2,\,r-1}\ M_{2s}\ N_{2,\,r+1}\ldots N_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ N_{n1}\ldots N_{n,\,r-1}\ M_{ns}\ N_{n,\,r+1}\ldots N_{nn}\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} N_{11}\ N_{12}\ldots N_{1n}\\ N_{21}\ N_{22}\ldots N_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ N_{n1}\ N_{n2}\ldots N_{nn}\end{vmatrix}.$$

Poniamo:

$$|\,N_{ih}\,|=D,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial N_{ir}\,\partial N_{hs}}=-\frac{\partial^2 D}{\partial N_{is}\,\partial N_{hr}}=D_{ih}=-D_{hi} \qquad (i,h\neq r,s);$$

avremo:

$$R'_{rs}=\frac{1}{D}\sum_{i,h} D_{ih}\,(M_{is}\,N_{hs}-M_{hs}\,N_{is}),$$

ed analogamente:

$$R'_{sr}=-\frac{1}{D}\sum_{i,h} D_{ih}\,(M_{ir}\,N_{hr}-M_{hr}\,N_{ir}),$$

quindi:

$$R'_{rs}-R'_{sr}=\frac{1}{D}\sum_{i,h} D_{ih}\Big[(M_{ir}\,N_{hr}-M_{hr}\,N_{ir})+(M_{is}\,N_{hs}-M_{hs}\,N_{is})\Big].$$

Ora:

$$M_{ik}N_{hk}-M_{hk}N_{ik}=\left[\sum_{t=1}^{n}R_{it}\frac{\partial P_t}{\partial p'_k}+\frac{\partial X_i}{\partial p'_k}\right]\left[\sum_{u=1}^{n}R_{hu}\frac{dP_u}{dx'_k}+\frac{dX_h}{dx'_k}\right]$$

$$-\left[\sum_{t=1}^{n}R_{ht}\frac{\partial P_t}{\partial p'_k}+\frac{\partial X_h}{\partial p'_k}\right]\left[\sum_{u=1}^{n}R_{iu}\frac{dP_u}{dx'_k}+\frac{dX_i}{dx'_k}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}R_{it}R_{hu}\left(\frac{\partial P_t}{\partial p'_k}\frac{dP_u}{dx'_k}-\frac{\partial P_u}{\partial p'_k}\frac{dP_t}{dx'_k}\right)+\sum_{t=1}^{n}R_{it}\left(\frac{\partial P_t}{\partial p'_k}\frac{dX_h}{dx'_k}-\frac{\partial X_h}{\partial p'_k}\frac{dP_t}{dx'_k}\right)$$

$$+\sum_{u=1}^{n}R_{hu}\left(\frac{\partial X_i}{\partial p'_k}\frac{dP_u}{dx'_k}-\frac{\partial P_u}{\partial p'_k}\frac{dX_i}{dx'_k}\right)+\left(\frac{\partial X_i}{\partial p'_k}\frac{dX_h}{dx'_k}-\frac{\partial X_h}{\partial p'_k}\frac{dX_i}{dx'_k}\right).$$

D'altra parte si ha, come è noto:

$$[P_i,P_h]=0,\quad [X_i,X_h]=0,\quad [P_i,X_i]=[P_h,X_h],$$
$$[P_i,X_h]=0\quad (i\neq h),$$

quindi:

$$\sum_{k=1}^{n}[M_{ik}N_{hk}-M_{hk}N_{ik}]=\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}R_{it}R_{hu}[P_t,P_u]+\sum_{t=1}^{n}R_{it}[P_t,X_h]$$

$$+\sum_{u=1}^{n}R_{hu}[X_i,P_u]+[X_i,X_h]=\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}R_{it}R_{hu}[P_t,P_u]+\sum_{t\neq h}R_{it}[P_t,X_h]$$

$$-\sum_{u\neq i}R_{hu}[P_u,X_i]+R_{ih}\{[P_h,X_h]-[P_i,X_i]\}+[X_i,X_h]=0.$$

Ne segue:

$$R'_{rs}-R'_{sr}=-\frac{1}{D}\sum_{i,h}\left\{D_{ih}\sum_{k\neq r,s}(M_{ik}N_{ik}-M_{hk}N_{hk})\right\}$$

$$=-\frac{1}{D}\sum_{k\neq r,s}\sum_{ih}D_{ih}(M_{ik}N_{hk}-M_{hk}N_{ik}).$$

Ognuna delle somme interne rappresenta lo sviluppo d'un determinante ottenuto sostituendo in D agli elementi della colonna r-esima le quantità $M_{1k}, M_{2k},\ldots, M_{nk}$, e a quelli della colonna s-esima le quantità $N_{1k}, N_{2k},\ldots, N_{nk}$. Ma, poichè k è diverso da r e da s, ciascuno di questi determinanti ha la colonna s-esima eguale ad una delle altre sue colonne d'indice diverso da r, e quindi è nullo, sicchè si ha infine $R'_{rs}=R'_{sr}$.

Messina, 9 febbrajo 1899.

Milano, 1899. — Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

1016? ...

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. N°

NEUE FOLGE. 5. | NOUVELLE SÉRIE. 5.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M.
Prix par an 5 fr.

PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK | JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

HERAUSGEGEBEN VON | PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1891. STOCKHOLM. N° 4.

NEUE FOLGE. 5. | NOUVELLE SÉRIE. 5.

BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

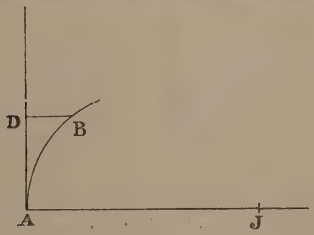
PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton.

Par G. VIVANTI à Mantova.

Aujourd'hui, où l'on poursuit avec activité l'étude des classes de grandeurs contenant des éléments infiniment petits et infiniment grands, il n'est pas peut-être sans intérêt de rappeler, que NEWTON a eu lieu de considérer une classe de cette nature. On lit en effet dans les *Philosophiae naturalis principia mathematica*[1] (lib. I, sect. I, scholium ad lemma XI):

Caeterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem;



hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse, nec infinite magnam, seu intervallum AJ [le diamètre du cercle osculateur] finitae esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3: quo in casu circulus nullus per punctum A inter

tangentem AD et curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, etc., habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat DB successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, etc., habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est eiusdem generis cum circularibus, secundus infinite maior, et quilibet posterior infinite maior priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite maior minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 et AD^3, inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$ etc. Et rursus inter binos quosvis angulos huius seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Voici la traduction en langage moderne de ce passage. Considérons toutes les courbes tangentes à l'axe des x à l'origine et dont les équations dans le voisinage de ce point ont par conséquent la forme $y = ax^m$, où x est une constante quelconque et $m > 1$. Bornons-nous de plus aux branches où $x > 0, y > 0$ c. à. d. supposons toujours $a > 0$. A toute courbe

$$y = ax^m \qquad (a > 0,\ m > 1)$$

nous pouvons faire correspondre un concept (*angulus contactus*) dénotant le degré d'intimité du contact entre la courbe et l'axe des x. Ces concepts, qu'on peut désigner par $\{a, m\}$, sont des grandeurs dans l'acception générale de ce mot; deux de ces grandeurs, telles que $\{a, m\}$ et $\{a', m\}$, sont comparables entre elles, au contraire des deux grandeurs $\{a, m\}$ et $\{a', m'\}$ la première est infiniment grande ou infiniment petite par rapport à l'autre suivant que $m < m'$ ou $m > m'$, quelles que soient d'alileurs les valeurs de a, a'.

[1] Comparez aussi: NEWTON, *Methodus fluxionum,* probl. V, ex. IV, cor. VIII; — GRANDI, *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus,* prop. VI.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

B. G. Teubner in Leipzig.

Sonderabdruck aus dem .... Hefte des .... Jahrgangs.

Eine Auswahl neuer Bücher, Fortsetzungen und neuer Auflagen aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig.

1891. 1892. 1893.

Bachmann, Paul, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. [X u. 151 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 4.—

——— die Elemente der Zahlentheorie. [XII u. 264 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 6.40.

Bardey, Dr. E., algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Vierte Auflage. [XIII u. 378 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 6.—

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. [X u. 863 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 24.—

Clebsch, Alfred, Vorlesungen über Geometrie. Unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet von Dr. Ferdinand Lindemann, ord. Professor an der Universität zu Königsberg in Pr. II. Band. I. Teil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. Mit vielen Figuren im Text. [VIII u. 650 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 12.—

Czuber, Emanuel, Theorie der Beobachtungsfehler. Mit 7 in den Text gedruckten Figuren. [XIV u. 418 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

Dini, Ulisse, ordentlicher Professor an der Universität zu Pisa, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth, Professor zu Freiburg i. Br., und Adolf Schepp, Premier-Lieut. a. D. zu Wiesbaden. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 12.—

Eberhard, Dr. V., Privatdocent an der Universität zu Königsberg i./Pr., zur Morphologie der Polyeder. Mit vielen Figuren im Text und 2 Tafeln. [IV u. 245 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

Forsyth, Dr. Andrew Russell, F. R. S., Professor am Trinity College zu Cambridge, Theorie der Differentialgleichungen. Erster Theil: Exakte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. [XII u. 378 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 12.—

Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss, ord. Lehrer an der Realschule „Philanthropin" in Frankfurt a. M. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 16.—

Heymann, Woldemar, Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen, nebst einem Anhang verwandter Aufgaben. gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 12.—

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik. III. Band. A. u. d. T.: Vorlesungen über Electricität und Magnetismus. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität zu Berlin. Mit viel Figuren im Text. [X u. 228 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

Klein, Felix, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. Robert Fricke. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie. Mit einigen in den Text gedruckten Figuren. [XV u. 712 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 24.—

XI. Eine Erweiterung des Maximumbegriffes.

Es seien u und v reelle Functionen der reellen Variablen x und y. Beide seien entweder durchweg stetig oder wir betrachten nur solche Gebiete, innerhalb deren sie stetig sind. Auch der erste Differentialquotient nach beiden Variablen sei innerhalb des betrachteten Gebietes stetig. Betrachten wir $u = \varphi(x, y)$ und $v = \psi(x, y)$ als Flächen über einer gemeinsamen x, y-Ebene, so können wir die weiteren Bedingungen, denen wir das betreffende Gebiet von u und v unterwerfen, folgendermassen ausdrücken: Jede zur x, y-Ebene parallele Ebene soll immer nur eine der Tangenten der Fläche in jedem von ihr getroffenen Punkte enthalten, insbesondere also soll sie nicht selber Tangentenebene der Fläche sein. Die in sie fallende, der x, y-Ebene parallele Tangente einer der Flächen scheidet dann auf der Fläche die Richtungen, in welcher die Ordinate derselben wächst von denjenigen, in denen sie abnimmt. Die Projection dieser Tangente auf die x, y-Ebene möge daher die Scheidelinie des Berührungspunktes genannt werden.

Betrachten wir jetzt beide Flächen gleichzeitig, so werden im Allgemeinen in jedem Punkte (x, y) die Scheidelinien der beiden Flächen sich schneiden und vier Winkelräume bilden. Jedem dieser Winkelräume entspricht ein anderes Verhalten der Flächenordinaten, wenn man von (x, y) aus nach allen Richtungen fortschreitet. In einem Winkelraume werden u und v gleichzeitig zunehmen, im Scheitelraume dazu beide abnehmen; bewegt man sich von (x, y) aus in einem der beiden anderen Winkelräume, so wird dagegen u zunehmen, wenn v wächst und umgekehrt.

Es wird aber auch Punkte geben, für welche die beiden Scheidelinien zusammenfallen, also von den vier Fällen nur zwei bestehen bleiben. Man findet diese Punkte, wenn man aus

$$1)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0,$$

welche Gleichungen die Bedingung für die zur x, y-Ebene paralle Tangente enthalten, dx und dy eliminirt. Man erhält dann die Gleichun

$$2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Sie stellt eine Curve in der x, y-Ebene dar. Die über einem Punk derselben liegenden Punkte der beiden Flächen haben also die Eigenscha dass die beiden zur x, y-Ebene parallelen Tangenten in ihnen unter si parallel sind, bezw. dass die Tangentenebenen in diesen Punkten sich einer Parallelen zur x, y-Ebene schneiden.

Die Punkte der Curve können zweierlei Art sein, je nachdem dur das Zusammenfallen der beiden Scheidelinien in ihnen die beiden erst oder die beiden letzten der vier oben erwähnten Fälle ausgeschlossen wurde Bleibt nur vom Punkte aus ein gleichzeitiges Steigen oder ein gleic zeitiges Fallen auf beiden Flächen möglich, so wollen wir ihn einen B gleitpunkt der beiden Flächen nennen. Die Tangentenebenen beid Flächenpunkte und ebenso ihre Normalen schneiden die x, y-Ebene dann bei auf derselben Seite des Punktes (x, y). Im anderen Falle dagegen, in welche nur die Möglichkeit eines Steigens auf der u-Fläche unter gleichzeitige Fallen auf der v-Fläche oder umgekehrt übrig bleibt, wollen wir de Punkt einen Scheidepunkt der Flächen nennen. Man erkennt ihn dara dass die Tangentenebenen, sowie die Normalen in den beiden Punkten de Flächen die x, y-Ebene auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Pr jection der Punkte treffen. Die durch 2) dargestellte Curve kann nun n Punkte der einen Art enthalten, sie kann auch aus Stücken zusammengeset sein, von denen einige aus Scheidepunkten, andere aus Begleitpunkte bestehen.

Die Uebertragung der Betrachtungen auf mehr als zwei Functione mit der entsprechenden Anzahl von Variablen macht keine Schwierigkei Die Scheidepunkte sind für die nationalöconomische Theorie der Preisbildun von Bedeutung, und es sind Untersuchungen auf diesem Gebiete, welche die vo liegende Notiz veranlasst haben.* Dort bedeuten u und v die Vortheile des Au tausches variabler Mengen x und y zweier Güterarten für zwei Tauscl contrahenten. Es werden die Werthe der Variablen gesucht, für welch ein Zuwachs des Vortheils u des einen Contrahenten nur auf Kosten de anderen möglich ist, das heisst ein Abnehmen von v zur Folge hat. E sind die Werthe von x und y, die Scheidepunkten angehören. In gewisser Sinne bezeichnen daher die Scheidepunkte bedingte Maxima, nämlich solche

---

* Vergl. meine Abhandlung: „Zahl und Maass in der Oeconomik“ in de Tübinger Zeitschr. f. d. ges. Staatsw. Bd. 49, S. 579.

denen die eine Function nicht zunehmen kann, ohne dass die zweite egebene Function abnimmt. So mag es sich rechtfertigen, dass wir in er Ueberschrift von einer Erweiterung des Maximumbegriffes sprachen. eberdies berechtigt auch die analytische Methode der Auffindung der egleit- und Scheidepunkte durch Nullsetzen des Differentials der Functionen zu, in diesen, auf zwei und mehr Functionen bezüglichen Punkten naloga der Maxima und Minima einer Function einer Variablen zu er-icken, da diese als Specialfall in jenen enthalten sind.

Als Beispiel mögen die in der Preistheorie häufig verwendeten liptischen Paraboloide

$$u = a\sqrt{bx - y^2}, \quad v = c\sqrt{dy - x^2}$$

enen. Als Ort der Scheidepunkte (in diesem Falle) erhält man die Hyperbel

$$4xy - bd = 0.$$

Concentrische Flächen zweiten Grades ergeben immer als Ort der gleit- und Scheidepunkte die beiden Achsen in der x, y-Ebene und zwar thalten, je nach der Wahl der Flächen, die beiden Achsen Punkte erlei oder verschiedener Art.

Es liegt nahe zu vermuthen, dass dieser erweiterte Maximumbegriff h vielleicht auf Functionen einer complexen Variablen übertragen lasse, lem man u und v den besonderen Bedingungen unterwirft, denen der lle und der imaginäre Theil einer solchen Function $w = u + iv$ gehorchen ss. Es geht dann aber die Gleichung 2) über in

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

ul diese zerfällt, da u und v reell sind, in $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, womit a h $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ gleich 0 werden. Es ergiebt sich demnach zunächst, dass d etwa vorhandenen Begleit- und Scheidepunkte nicht mehr eine Curve blen, sondern als einzelne Punkte zerstreut liegen. Es verliert aber ü rdies die allgemeine Gleichung dieser Punkte wegen der angenommenen B iehungen zwischen u und v ihren sonst bestehenden reellen Sinn. E miniren wir nämlich aus den Gleichungen 1) mit Hilfe der Bedingungs-gl chungen $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ diese Ableitungen, so ergiebt sich

$$dx : dy = \sqrt{-1},$$

da heisst, die Richtung der gemeinsamen Scheidelinie zwischen den ab-nehmenden und den zunehmenden Werthen von u und v wird imaginär. Es existiren also überhaupt keine Punkte, welche die Bedingung der Bgleit- oder Scheidepunkte reell erfüllen.

Karlsruhe, April 1893. Dr. Andreas Voigt.

Ueber die Relationen
wischen einer gegebenen Curve $y = f(x)$ und
iner daraus abgeleiteten Curve $y = k \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{k}{f'(x)}$,
mit specieller Anwendung auf die Ellipse.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

ohen philosophischen Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Carl Völker

aus Cassel.

Marburg.

Universitäts-Buchdrukerei (R. Friedrich).

1880.

Seiner lieben Braut!

der Verfasser.

Die Gleichung einer auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogenen Curve sei gegeben in der Form:

$$y = f(x)$$

Man ziehe zu jeder Normalen dieser Curve durch einen in der Abscissenaxe im constanten Abstande k vom Coordinatenanfangspunkte angenommenen Punkt K eine Parallele bis zum Durchschnitte mit dem possitiven oder negativen Theil der Axe der Y und durch diesen Durchschnittspunkt eine Parallele zur Axe der X bis zum Durchschnitte mit der zum betreffenden Curvenpunkte gehörigen Ordinate; der geometrische Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist eine Curve, welche den Gegenstand der folgenden Betrachtungen bildet. Wir sind zu dieser Untersuchung veranlasst worden durch das Lesen einer kleinen Schrift von Hochheim*) über die »Differentialcurven der Kegelschnitte«, worin unter »Differentialcurve« einer gegebenen Curve $y = f(x)$ diejenige Curve verstanden wird, welche nach der Gleichung: $y = k \cdot \frac{dy}{dx} = k \cdot f^{1}(x)$ zu construiren ist, wenn k einen beliebig angenommen constanten Parameter bedeutet.

Die von uns betrachtete Curve dagegen ist gemäss der eben erklärten Entstehungsweise durch die Gleichung:

$$\text{(I.)} \quad \ldots \quad y_1 = \frac{k}{f^{1}(x)}$$

bestimmt.

---

*) Ad. Hochheim, Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitte. Halle 1874.

§. 1.

Aus der Gleichung der Hauptcurve $y = f(x)$ und der ersten derivirten Curve $y_1 = \frac{k}{f^1(x)}$ folgt:

1) Die Hauptcurve und die erste derivirte Curve h gemeinschaftliche Punkte für die Werthe der Abscissen, w aus der Gleichung:

$$(\text{II.}) \ldots . f(x) . f^1(x) = k$$

für x hervorgehen.

2) Soll der Constructionspunkt K in Fig. 1 ein solcher dass die von ihm aus construirten Punkte der derivirten C auf der ursprünglichen Curve selbst liegen, so dass die der Curve mit der Hauptcurve identisch wird, so müssen Coordinaten jenes Punktes (x_1, y_1) der Differentialgleich

$$(\text{III.}) \ldots . x_1 + y_1 . f^1(x) - f(x) . f^1(x) = o$$

genügen. Wenn nun der Constructionspunkt fest, d. h abhängig von den Coordinaten des jedesmaligen Tange punktes sein soll, so muss:

a) das von x_1 und y_1 freie Glied constant,

b) $f^1(x)$ constant, was jedoch nur bei der Geraden findet, daher in allen anderen Fällen

c) $y_1 = o$ sein.

Dass die Erfüllung dieser Bedingung keine allgemeine häufige ist, leuchtet ein.

Man überzeugt sich leicht, dass unter allen Curven die Parabel, deren Scheitel in der Axe der X liegt, die E schaft hat, unter Anwendung der angegebenen Constru von dem festen Punkte $(x = \pm p;\ y = o)$ als erste der Curve die Hauptcurve wieder zu liefern. p ist hierbei der Parameter der Parabel. Wählt man $x = +p$, so führ Construction auf den Tangentialpunkt wieder zurück. $x = -p$ hingegen trifft man auf den senkrecht ober- unterhalb des Tangentialpunkts liegenden Punkt der urspr lichen Parabel.

3) Ebenso wie die erste derivirte Curve aus der Hauptcurve steht, so entsteht die zweite derivirte Curve aus der ersten. allgemeine Gleichung der zweiten derivirten Curve ist:

$$\text{(IV.)} \quad \ldots \quad y_2 = -\frac{f^{\mathrm{I}}(x)^2}{f^{\mathrm{II}}(x)}$$

4) Die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte der Haupt- ve und der zweiten derivirten Curve liefert daher die ichung:

$$\text{(V.)} \quad \ldots \quad f(x) \,.\, f^{\mathrm{II}}(x) + f^{\mathrm{I}}(x)^2 = o$$

Werthe von x.

5) Die Coordinaten des Punktes (x_1, y_1), von welchem construirt, die zweite derivirte Curve mit der Hauptcurve itisch wird, müssen die Gleichung:

$$\text{(VI.)} \quad \ldots \quad x_1 - y_1 \frac{k \,.\, f^{\mathrm{II}}.(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^2} + \frac{k \,.\, f(x) \,.\, f^{\mathrm{II}}(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^2} = o$$

iedigen. Die obigen drei Bedingungen unter 2) gelten auch . Aus der Differentialgleichung:

$$\frac{k \,.\, f(x) \,.\, f^{\mathrm{II}}(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^2} = m$$

:

$$\frac{dy}{C\, y^{\frac{m}{k}}} = dx$$

he Gleichung für $m = -k$ integrirt:

$$y^2 = 2\,C\,(x + C_1)$$

Gleichung einer Parabel liefert.

Für $m = k$ hingegen resultirt

$$y = e^{(x + C_1)\,C}$$

Gleichung der logarithmischen Linie.

Wollte man in den Gleichungen (III.) und (VI.) $x_1 = o$ n, so würde die Ordinate $y_1 = f(x)$, also bei der Con- tion eine abhängige Grösse sein.

Liegt demnach der Constructionspunkt K in der Axe der so haben alle Curven, deren Gleichungen durch irgend e Annahme des Verhältnisses von $m:k$ aus der Gleichung:

$$\text{(VII.)} \ldots\ldots y = \left[\frac{C(k-m)}{k}(x+C_1)\right]^{\frac{k}{k-m}}$$

hervorgehen, sowie die logarithmische Linie mit ihren zwei derivirten Curven gleiche Gestalt.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass bei Annahme Constructionspunktes in der Ebene der XY die derivi Curven gegen die Hauptcurven um ein constantes Stück, Ordinate des Constructionspunktes, parallel der Axe der verschoben sind.

6) Ist demnach

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Parabel, und wählt man die Constructi strecke so, dass k gleich dem halben Parameter der Para ist, so ist die Hauptcurve mit allen ihren derivirten Cur identisch; stellt hingegen $y = f(x)$ die Gleichung einer lo rithmischen Linie dar, so ist diese mit allen ihren derivi Curven von gerader Ordnung und ihrer ersten Different curve identisch.

7) Die aus den Gleichungen:

$$\text{(VIII.)} \ldots\ldots f^{\mathrm{I}}(x)^3 + k \,.\, f^{\mathrm{II}}(x) = 0 \text{ und}$$
$$\text{(IX.)} \ldots\ldots k \,.\, f^{\mathrm{II}}(x) + f^{\mathrm{I}}(x) = 0$$

entspringenden Werthe von x liefern: Aus (VIII.) die Absci der gemeinschaftlichen Punkte der ersten und zweiten derivi Curven, aus (IX.) die Abscissen der gemeinschaftlichen Pu der zweiten derivirten Curve und der ersten Differentialc

7) Die erste derivirte Curve hat mit der ersten Different curve gemeinschaftliche Punkte für die Werthe des x, we aus der Gleichung:

$$\text{(X.)} \ldots\ldots f^{\mathrm{I}}(x)^2 = 1$$

für die Abscissen hervorgehen.

§. 2.

Die Punkte (x, y) der Hauptcurve, (x, y_1) der ersten ivirten, (x, y_2) der zweiten derivirten Curve mögen entechende Punkte genannt werden.

Alsdann folgt aus den Gleichungen $y = f(x)$, (I.) und (IV.):

1) Hat die Hauptcurve für eine bestimmte Abscisse einen minationspunkt, so liegt der entsprechende Punkt der ersten ivirten Curve im Unendlichen, der der zweiten derivirten ve in der Axe der X, wenn $f^{II}(x)$ für den Werth dieser isse nicht verschwindet.

2) Einem Beugungspunkte der Hauptcurve entspricht ein minationspunkt der ersten derivirten Curve und ein im ndlichen liegender Punkt der zweiten derivirten Curve.

3) Steht eine Normale der Hauptcurve senkrecht auf der der Y, so liegt der dem Schnittpunkt der Normalen und Hauptcurve entsprechende Punkt der ersten derivirten ve sowie der der zweiten derivirten Curve in der Axe der X, $f^{II}(x)$ für den Werth der zugehörigen Abscisse einen bemten Werth behält.

4) Hat die Hauptcurve eine Spitze, in welcher der Krümgshalbmesser gleich Null ist, so läuft die Tangente am prechenden Punkte der ersten derivirten Curve der Axe Y parallel, während der entsprechende Punkt der zweiten irten Curve in der Axe der X liegt, wenn nur $f^{I}(x)$ für Werth dieser Abscisse einen bestimmten Werth behält.

§. 3.

1) Für jeden Schnittpunkt der Hauptcurve mit der ersten irten Curve ist die absolute

änge der Tangente der Hauptcurve $= \dfrac{\sqrt{k^2 + f(x)^2}}{f^{I}(x)}$

» » Subtangente » » $= \dfrac{f(x)}{f^{I}(x)}$

» » Normalen » » $= \sqrt{k^2 + f(x)^2}$

» » Subnormalen » » $= k$

2) Für jeden Schnittpunkt der ersten mit der zweit
derivirten Curve ist die absolute

Länge d. Tangente der 1. derivirten Curve $= \sqrt{\frac{k^2}{f^{\mathrm{I}}(x)^2} + \frac{f^{\mathrm{I}}(x}{f^{\mathrm{II}}(x}}$

» » Subtangente » » » $= \frac{f^{\mathrm{I}}(x)}{f^{\mathrm{II}}(x)}$

» » Normalen » » » $= k\sqrt{1 + \frac{1}{f^{\mathrm{I}}(x)}}$

» » Subnormalen » » » $= k.$

3) Für einen beliebigen Punkt (x, y) der Hauptcurve
die Subtangente:

$$= \frac{f(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)}$$

für den entsprechenden Punkt die der ersten derivirten Cur

$$= \frac{f^{\mathrm{I}}(x)}{f^{\mathrm{II}}(x)}$$

Somit liefern die aus Gleichung:

$$\text{(XI.)} \; \ldots . \; f(x) . f^{\mathrm{II}}(x) = f^{\mathrm{I}}(x)^2$$

hervorgehenden reellen Werthe von x die Abscissen der Pun
deren zugehörige Subtangenten für beide Curven gleich s

4) Die Subnormale für einen beliebigen Punkt (x, y)
Hauptcurve ist

$$= f(x) . f^{\mathrm{I}}(x)$$

die des entsprechenden Punktes der ersten derivirten Cu

$$= \frac{k^2 . f^{\mathrm{II}}(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^3}$$

Daraus folgt: Für die aus der Gleichung:

$$\text{(XII.)} \; \ldots . \; k^2 . f^{\mathrm{II}}(x) = f(x) . f^{\mathrm{I}}(x)^4$$

resultirenden reellen Werthe des x sind die Subnormalen be
Curven gleich.

In gleicher Weise lassen sich leicht die analogen Gleichun
für die derivirten Curven höherer Ordnung aufstellen, die je
nicht mehr so einfach sind.

5) Für einen beliebigen Punkt (x, y) der ersten derivirten
·ve ist die Subtangente

$$=\frac{f^{\mathrm{I}}(x)}{f^{\mathrm{II}}(x)}$$

des entsprechenden Punktes der zweiten derivirten Curve

$$=\frac{f^{\mathrm{I}}(x) \, . \, f^{\mathrm{II}}(x)}{2 \, . \, f^{\mathrm{II}}(x)^2 - f^{\mathrm{I}}(x) \, . \, f^{\mathrm{III}}(x)}$$

Demnach liefern die aus der Gleichung

$$\text{(XIII.)} \; \ldots \; f^{\mathrm{II}}(x)^2 = f^{\mathrm{I}}(x) \, . \, f^{\mathrm{III}}(x)$$

vorgehenden reellen Wurzeln diejenigen Werthe von x, für
:he beide Curven gleiche Subtangenten haben.

6) Die Subnormale der ersten derivirten Curve ist

$$=\frac{k^2 . f^{\mathrm{II}}(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^3}$$

des entsprechenden Punktes der »Differentialcurve«:

$$= k^2 \, . \, f^{\mathrm{I}}(x) \, . \, f^{\mathrm{II}}(x)$$

Besitzt demnach die Gleichung:

$$\text{(XIV.)} \; \ldots \; f^{\mathrm{I}}(x)^4 = 1$$

e Wurzeln, so haben beide Curven für jede einer solchen
·zel entsprechende Abscisse gleiche Subnormalen.

7) Die Tangenten und Normalen an entsprechenden Punkten
ıd einer Curve und ihrer ersten derivirten Curve bilden
Sehnenviereck, wobei der Durchmesser des Kreises gleich
Entfernung des Durchschnittspunktes der Tangenten von
der Normalen ist.

Die Tangente des von den beiden Tangenten an ent-
:henden Punkten (x, y und x, y_1) eingeschlossenen Winkels ist:

$$=\frac{f^{\mathrm{I}}(x)^3 + k \, . \, f^{\mathrm{II}}(x)}{f^{\mathrm{I}}(x)^2 - k \, . \, f^{\mathrm{I}}(x) \, . \, f^{\mathrm{II}}(x)}$$

Hieraus folgt:

8) Jeder der Gleichung:

$$\text{(XV.)} \; \ldots \; f^{\mathrm{I}}(x)^3 + k \, . \, f^{\mathrm{II}}(x) = 0$$

gende reelle Werth von x liefert eine Abscisse, für welche
Tangenten an entsprechenden Punkten beider Curven ein-

ander parallel laufen. Der Durchmesser des dem Sehnenviere
zugehörenden Kreises ist dann unendlich gross.

9) Die aus der Gleichung:

$$\text{(XVI.)} \quad \ldots\ldots \quad f^{\text{I}}(x) - k f^{\text{II}}(x) = o$$

resultirenden reellen Wurzeln liefern die Werthe der Absciss aller der Punkte, an welchen die Tangenten der entsprechend Punkte beider Curven senkrecht zu einander stehen. D Sehnenviereck ist alsdann ein Rechteck.

Das Sehnenviereck reducirt sich auf einen Punkt, fa $f(x) f^{\text{I}}(x) = k$ ist.

§. 4.

1) Verschiebt man die Hauptcurve längs der Axe der um die Strecke m, so ist ihre Gleichung:

$$y^{\text{I}} + m = f(x),$$

die der ersten derivirten Curve:

$$\text{(XVII.)} \quad \ldots\ldots \quad y_1^{\text{I}} = \frac{k}{f^{\text{I}}(x)}$$

und die der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XVIII.)} \quad \ldots\ldots \quad y_2^{\text{I}} = -\frac{f^{\text{I}}(x)^2}{f^{\text{II}}(x)}$$

d. h. Eine Verschiebung der Hauptcurve parallel zur Axe der Y ändert die Lage und Gestalt der derivirten Curven nicht.

2) Verschiebt man die Hauptcurve längs der Axe der X um eine Strecke n, so ist ihre Gleichung:

$$y = f(x^{\text{I}} + n),$$

die der ersten derivirten Curve:

$$\text{(XIX.)} \quad \ldots\ldots \quad y_1 = \frac{k}{f^{\text{I}}(x^{\text{I}} + n)},$$

die der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XX.)} \quad \ldots\ldots \quad y_2 = -\frac{[f^{\text{I}}(x^{\text{I}} + n)]^2}{f^{\text{II}}(x^{\text{I}} + n)}$$

d. h. Eine Verschiebung der Hauptcurve parallel zur Axe der X

ewirkt eine Verschiebung der beiden ersten derivirten Curven
n eine gleiche Strecke in derselben Richtung.

3) Dreht man die Hauptcurve um den Coordinatenanfangs-
unkt, so ist ihre Gleichung:

$$\text{(XXI.)} \quad \ldots \quad \xi \sin \vartheta + \eta \cos \vartheta - f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) = o,$$

e der ersten derivirten Curve:

$$\text{XII.)} \quad \ldots \quad \eta_1 = k \,. \frac{\cos \vartheta - \dfrac{d f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)}{d \eta}}{\dfrac{d f(\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta)}{d \xi} - \sin \vartheta},$$

e der zweiten derivirten Curve:

$$\text{(XXIII.)} \quad \ldots \quad \eta_2 = \frac{k}{\dfrac{d \eta_1}{d \xi}};$$

mnach wird durch eine Drehung der Hauptcurve um den
ordinatenanfangspunkt im Allgemeinen die Lage und Gestalt
r beiden ersten derivirten Curven geändert.

In den in diesem §. erwähnten Eigenschaften stimmen
ther die beiden ersten derivirten Curven mit ihrer zugehörigen
fferentialcurve überein.

4) Construirt man von einem Punkte (k, o) eine Anzahl
n derivirten Curven zu einer gegebenen Curve, so findet man,
ss alle derivirten Curven gerader Ordnung unabhängig
n der Constructionsstrecke k sind.

Daraus folgt: Construirt man von beliebigen Punkten
der Axe der X zu einer gegebenen Curve eine Anzahl
n derivirten Curven, so sind je zwei von gerader
d gleicher Ordnung von gleicher Lage und Gestalt.

Die erste und zweite derivirte Curve der Ellips

§. 5.

Gleichung und Gestalt der ersten derivirten Curve.

Ist die auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezoge Ellipse, deren grosse Axe in der Axe der X und deren Mitt punkt im Coordinatenanfangspunkt liegt, gegeben durch d Gleichung:

$$(1) \quad \ldots \quad y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

so ist nach pag. 3. Gleichung (I.) die Gleichung ihrer erst derivirten Curve:

$$(2a) \quad \ldots \quad y = \mp \frac{k\,a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

oder:

$$(2b) \quad \ldots \quad b^2 x^2 y^2 + k^2 a^2 x^2 - k^2 a^4 = o$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt:

1) Bezeichnet man die vierte Proportionale von k, a u b mit m, so ergibt sich folgende Construction für die er derivirte Curve:

Beschreibt man mit der halben grossen Axe der gegeben Ellipse als Radius einen Kreis, so ist die zu jeder beliebig Abscisse x (natürlich $< a$) gehörige Ordinate der zu construirend Curve: die vierte Proportionale zu x, m und h, wobei h e der Abscisse x entsprechende Ordinate jenes Hauptkreises i.

2) Die Curve besteht aus zwei symmetrisch zu den C ordinatenaxen liegenden Hälften, deren eine sich von der positiv und deren andere sich von der negativen Axe der X zwisch den Geraden $x = \pm a$ in der Weise entfernt, dass die Axe der Asymptote wird. (Fig. 2).

3) Die Curve hat in den Punkten:

$$\left(x = \pm a \sqrt{\frac{2}{3}}\,;\; y = \pm \frac{k\,a}{b\sqrt{2}}\right)$$

Vendepunkte. Der Neigungswinkel der Tangente erreicht an iesen Punkten sein Minimum.

4) So lange $3\,x^2 < 2\,a^2$ oder $y^2 > \frac{k^2\,a^2}{2\,b^2}$ ist, kehrt die urve der Abscissenaxe ihre convexe Seite zu, von da ab ist e bis zum Durchschnitt mit der Axe der X concav zu dieser.

5) Die Ordinaten der den Wendepunkten entsprechenden llipsenpunkte sind $y = \pm \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Daraus folgt:

$$y_e \,.\, y = \frac{k\,.\,a\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{k\,.\,x}{2}$$

$$2\,y_e \,.\, y = k\,.\,x$$

h. das Rechteck aus der Constructionsstrecke k und der den endungspunkten zugehörigen Abscisse ist doppelt so gross e das Rechteck aus der Ordinate des Inflexionspunktes und r seines entsprechenden Punktes der Ellipse.

6) Unter Berücksichtigung der eingeführten Bezeichnungen 1) ist:

$$x\,.\,y = h\,.\,m$$

h. die Rechtecke, von denen jedes gebildet ist aus der scisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivirten rve, verhalten sich wie die zu den entspechenden Ellipsen-nkten gehörenden Ordinaten des Hauptkreises der Ellipse.

Vermittelst dieser Gleichung lassen sich leicht zu jeder Abscisse zugehörigen Ordinaten der ersten derivirten Curve finden.

7) Für $x = e$ ist $y = \pm \frac{k\,a}{e}$ d. h. ist das Product $k\,.\,a$ gleich er Constanten C, und construirt man zu einem System con-aler Ellipsen mit Hülfe von $k = \frac{C}{a}$ die zugehörigen ersten ivirten Curven, so gehen alle diese durch die vier Punkte $\left(e, \pm \frac{C}{e}\right)$.

8) Genügt ein Punkt (x_1, y_1) der Gleichung (2b) so genüg ihr auch der Punkt $(-x_1, -y_1)$ d. h. jede durch den Co ordinatenanfangspunkt gelegte Sehne der ersten derivirten Curv wird in diesem Punkte halbirt.

9) Zieht man von den beiden Brennpunkten der Ellips zwei Strahlen ϱ und ϱ_1 nach einem Punkte (x, y) der erste derivirten Curve so ist:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = 4\,e\,x$$

d. h. das Rechteck aus der Summe und der Differenz zwei nach einem Punkte der ersten derivirten Curve gezogen Brennstrahlen ist gleich dem aus der Abscisse des Punktes un der doppelten linearen Excentricität der Ellipse.

Da nun für zwei Brennstrahlen r und r_1 nach dem en sprechenden Punkte der Ellipse für diese die nämliche Relatio

$$(r + r_1)(r - r_1) = 4\,e\,x$$

gilt, so folgt:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = (r + r_1)(r - r_1)$$

Für $x = \dfrac{e}{4}$ resultirt:

$$(\varrho + \varrho_1)(\varrho - \varrho_1) = (a + b)(a - b)$$

10) Ist $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung eines Kreises, so ist d seiner ersten derivirten Curve:

$$(3) \;\ldots\; y = \mp \frac{k\,\sqrt{r^2 - x^2}}{x}$$

welche Gleichung aus (2a) hervorgeht, indem man $a = b = r$ set

§. 6.

Gleichung und Gestalt der zweiten derivirten Curve.

Nach §. 1. (IV.) ist die Gleichung der zweiten derivirt Curve der im vorigen §. gegebenen Ellipse:

$$(4a) \;\ldots\; y = \pm \frac{b}{a^3} \,.\, x^2 \sqrt{a^2 - x^2}$$

oder:

$$(4b) \;\ldots\; a^6\,y^2 + b^2\,x^6 - a^2\,b^2\,x^4 = o$$

Hieraus folgt:

1) Die Curve geht auch durch folgende Construction her-
: Beschreibt man um die gegebene Ellipse den zugehörigen
uptkreis, so ist die zu jeder Abscisse $x < a$ gehörende
dinate y der zu construirenden Curve gleich der vierten
oportionale zu a, b und der Länge, welche der vierten
portionale von a, x und der vierten Proportinale von a, h
d x entspricht.

2) Die Curve besteht aus zwei symmetrisch zu den Co-
inatenaxen liegenden Hälften, die zwischen den Geraden
$= \pm a$ verlaufen und von denen die eine Hälfte oberhalb, die
lere unterhalb der Abscissenaxe sich befindet.

3) Der Coordinatenanfangspunkt ist Berührungspunkt der
e der X mit der Curve.

4) Die Punkte $\left(x = \pm a \sqrt{\frac{2}{3}};\ y = \pm \frac{2b}{3\sqrt{3}}\right)$ sind Cul-
ationspunkte der Curve.

5) Die Punkte

$$\left(= \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}};\ y = \pm \frac{b}{4} \sqrt{\frac{1}{3}\left(5\sqrt{\frac{11}{3}} - 7\right)}\right)$$

Inflexionspunkte.

6) So lange $x < \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}}$ ist, kehrt die Curve
Abscissenaxe die convexe Seite zu.

7) Der Coordinatenanfangspunkt ist ausserdem ein Doppel-
kt, in dem sich die beiden Curvenäste berühren.

Die Curve besteht demnach aus vier congruenten Theilen.
r Quadrant geht unter dem Winkel von 0° vom Coordinaten-
ngspunkte, welcher ein Doppelpunkt ist, in dem sich zwei
enäste berühren, aus, ändert seine Krümmung, indem er
h einen der Inflexionspunkte

$$\left(= \pm \frac{a}{2} \sqrt{3 - \sqrt{\frac{11}{3}}};\ y = \pm \frac{b}{4} \sqrt{\frac{1}{3}\left(5\sqrt{\frac{11}{3}} - 7\right)}\right)$$

der convexen zur concaven Krümmung übergeht, erreicht

bei $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $y = \frac{2b}{3\sqrt{3}}$ seinen oberen Culminatio punkt und schneidet die Axe der X für $x = a$ unter ein rechten Winkel.

Die Curve ist scheinbar eine Schleifenlinie (Fig. 3.).

8) In Gleichung (4a) $a = b = r$ gesetzt, liefert die Gleich der zweiten derivirten Curve des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

nämlich:

$$(5) \ldots . \; y = \pm \frac{x^2}{r^2}\sqrt{r^2 - x^2}$$

Ausserdem gilt von der zweiten derivirten Curve der Elli dasselbe wie von der ersten in §. 5. 8) und 9).

9) Für $x = e$ geht die Curve durch die Punkte $\left(\pm e \pm \frac{b^2 e}{a^3}\right.$

§. 7.

Die Polargleichungen der beiden ersten derivirten Curv

Unter Beibehaltung der Axe der X als feste Axe und Coordinatenanfangspunktes als Pol resultirt aus Gleichung vermittelst der Substitution:

$$x = r \cos \varphi;\; y = r \sin \varphi$$

die Polargleichung der ersten derivirten Curve als:

$$(6) \ldots . \; r^4 b^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + r^2 k^2 a^2 \sin^2 \varphi - k^2 a^4 =$$

Es folgen hieraus für r die Werthe:

$$r_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = \pm \frac{a}{b \cos \varphi}\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4\, b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi} - k\right)}$$

$$r_{\left.\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}} = \pm \frac{a}{b \cos \varphi}\sqrt{-\frac{k}{2}\left(\sqrt{k^2 + 4\, b^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi} + k\right)}$$

Da die beiden letzten Wurzeln imaginär sind, so f dass nur zwei Punkte der Curve im Abstande $r_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}}$ vom symmetrisch entfernt liegen.

Die Polargleichung der zweiten derivirten Curve ergibt sich
Gleichung (4b) als:

$$7) \;\ldots\; r^6 b^2 \cos^6 \varphi - r^4 a^2 b^2 \cos^4 \varphi + r^2 a^6 \sin^2 \varphi = o.$$

Es fliessen hieraus für r die Werthe:

$$r_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = o$$

$$r_{\left.\begin{smallmatrix}3\\4\\5\\6\end{smallmatrix}\right\}} = \pm \frac{a}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2b\cos\varphi} \sqrt{b^2\cos^2\varphi - 4a^2\sin^2\varphi}}$$

Ferner folgt aus Gleichung (7) und den Werthen von r:

1) Da in Gleichung (7) der Coefficient von r und das
olute Glied fehlt, so schneidet jede durch den Pol gehende
ade die Curve in zwei mit ihm zusammenfallenden Punkten.
Coordinatinatenanfangspunkt oder Pol ist also ein Doppel-
kt. (cf. §. 6. 7).

2) So lange

$$tang\,\varphi < \frac{b}{2a}$$

t gibt es für r vier reelle Werthe; d. h. eine durch den
angspunkt gehende Gerade kann die Curve ausserdem noch
ier Punkten schneiden.

§. 8.

iehungen der Ellipse zu ihrer ersten derivirten Curve.

1) Für die Durchschnittspunkte der Ellipse und ihrer ersten
irten Curve sind die Coordinaten:

$$x_1 = + k \cdot \frac{a^2}{b^2};\; y_1 = + \frac{1}{b}\sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_2 = - k \cdot \frac{a^2}{b^2};\; y_2 = + \frac{1}{b}\sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_3 = - k \cdot \frac{a^2}{b^2};\; y_3 = - \frac{1}{b}\sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

$$x_4 = + k \cdot \frac{a^2}{b^2};\; y_4 = - \frac{1}{b}\sqrt{b^4 - k^2 a^2}$$

2) Die Ellipse und ihre erste derivirte Curve haben nur lange reelle Schnittpunkte als

$$k < \frac{b^2}{a}$$

ist. Für $k = \frac{b^2}{a}$ ist $y = o$; $x = a$; d. h. in diesem Falle [b]rühren sich die beiden Curven in den Endpunkten der gros[sen] Axe der Ellipse.

3) Aus §. 5. (1) und (2a) folgt:

$$y_e \cdot y = \frac{k \cdot h}{x} \cdot h$$

d. h. die Rechtecke, gebildet aus den Ordinaten entsprechen[der] Punkte einer Ellipse und ihrer ersten derivirten Curve, s[ind] gleich den Rechtecken, gebildet aus der zur gemeinschaftlich[en] Abscisse gehörigen Ordinate des Hauptkreises h und der vier[ten] Proportionale von k, h und x.

4) $\frac{y_e}{y} = \frac{b^2}{k\,a^2}\,x$; oder: $y_e = \frac{b^2}{k\,a^2} \cdot x \cdot y$ d. h. die Rechte[cke] aus einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ers[ten] derivirten Curve verhalten sich wie die zu den betreffen[den] Abscissen gehörigen Ordinaten der Ellipse.

5) $y = \frac{k \cdot a}{b} \cdot \frac{h}{x}$ oder: $\frac{x \cdot y}{h \cdot k} = \frac{a}{b}$ d. h. das Rechteck [aus] einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivi[rten] Curve steht zu dem Rechtecke aus der zu dieser Abscisse [ge]hörigen Ordinate des Hauptkreises und der Constructionstreck[e] in einem constanten Verhältnisse, nämlich dem der bei[den] Halbaxen der Ellipse $a : b$.

6) $\frac{x \cdot y}{h \cdot k} = \frac{x_1 \cdot y_1}{h_1 \cdot k}$; $\frac{x \cdot y}{x_1 \cdot y_1} = \frac{h}{h_1}$ d. h. die Rechtecke [aus] einer Abscisse und der zugehörigen Ordinate der ersten derivi[rten] Curve verhalten sich wie die zu den Abscissen gehöri[gen] Ordinaten des Hauptkreises.

Aus 3) folgt, dass das Rechteck aus der Ordinate der ersten -ivirten Curve und der entsprechenden der Ellipse unabhängig von der Halbaxe b.

7) Construirt man demnach ein System von Ellipsen mit Hauptaxe $2a$, welche in der Axe der X liegt, und zu jeder -selben die zugehörige erste derivirte Curve, so sind für je -e gemeinschaftliche Abscisse die Rechtecke aus je zwei ent- -echenden Ordinaten gleich.

8) Für $a = b$ folgt aus 4)

$$\frac{y_k}{y} = \frac{x}{k}$$

.. die Ordinaten zugehöriger Punkte eines Kreises uud seiner -en derivirten Curve verhalten sich wie die zugehörige Abscisse -Constructionstrecke k.

9) Ist a in den beiden Gleichungen §. 5. (1) und (2a) -abel, so entspricht der Gleichung (1) ein System von Ellipsen, -chen die Axe $2b$ gemein ist, und der Gleichung (2a) die -aar der zugehörigen ersten derivirten Curven.

Durch Elimination der Veränderlichen a folgt aus beiden -chungen:

$$(8a) \quad \ldots \quad x = \pm \frac{b^2 - y^2}{k} \quad \text{oder:} \quad y^2 = b^2 \mp k x$$

$$(8b) \quad \ldots \quad x = o.$$

Haben demnach alle Ellipsen eines Systems die Axe $2b$ -ein, so sind die geometrischen Oerter der Punkte, in denen -d Ellipse von ihrer ersten derivirten Curve geschnitten wird, -beiden Parabeln, deren Gleichungen (8a) sind und die Axe -r Y.

10) Es seien a und b in den Gleichungen §. 5. (1) und (2a) -bel, dagegen $\frac{a}{b}$ constant. Nach Elimination der Variabeln -lg:

$$(9) \quad \ldots \quad x = \pm k \frac{a^2}{b^2}$$

-l die Schnittpunkte ähnlicher Ellipsen und ihrer zugehörigen

ersten derivirten Curven liegen auf der positiven bezw. negative Richtung der Axe der X und zwar im Abstande $k \cdot \frac{a^2}{b^2}$ vo Coordinatenanfangspunkte entfernt.

Für $a = b$ erhält man:

$$(10) \ldots \; x = \pm k$$

d. h. der geometrische Ort aller Schnittpunkte eines Systen concentrischer Kreise und ihrer zugehörigen ersten derivirt Curven ist der Constructionspunkt und der im gleichen Abstan vom Coordinatenanfangspunkte nach entgegengesetzter Richtu liegende Punkt.

§. 9.

Beziehungen der Ellipse zu ihrer zweiten derivirten Curv

1) Für die Durchschnittspunkte der Ellipse und ihrer zweit derivirten Curve sind die Coordinaten:

$$x = \pm a; \; y = o$$

[cf. §. 6. (7)].

2) Aus den Gleichungen (1) des §. 5. und (4a) des §. folgt:

$$\frac{y_e}{y} = \frac{a^2}{x^2}$$

d. h. die Ordinate der Ellipse verhält sich zur entsprechend Ordinate der zweiten derivirten Curve wie das Quadrat d grossen Halbaxe zum Quadrate der gemeinschaftlichen Abscis.

3) Es ist:

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{k\,x\,(a^2 - x^2)}{a^2}; \; {}^{*})$$

daher gilt hier Analoges wie §. 8. 7).

4) Aus §. 6. 8) folgt:

Die Rechtecke aus der Summe und der Differenz je zwe nach entsprechenden Punkten der beiden ersten derivir Curven und der Ellipse gezogenen Brennstrahlen sind einan gleich.

---

*) y_1 und y_2 haben die Werthe des y in den Gleichungen: §. 5.) bezw. §. 6. (4a).

5) Ist a in den Gleichungen (1) und (4a) variabel, so ist r geometrische Ort der Schnittpunkte aller Ellipsen und ihrer tsprechenden zweiten derivirten Curven der Coordinaten-fangspunkt.

6) Ist b in den Gleichungen (1) und (4a) variabel, so ist geometrische Ort der Schnittpunkte aller Ellipsen und ihrer sprechenden zweiten derivirten Curven die Gerade $x = \pm a$.

7) Desgleichen ist in diesem Falle die Gerade $x = \pm a$ der ometrische Ort der Schnittpunkte aller ersten und der ihnen sprechenden zweiten derivirten Curven.

Ist daher bei einem System von Ellipsen die Halbaxe b iabel, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der psen und ihrer entsprechenden ersten derivirten Curven der-be wie der jener mit ihren entsprechenden zweiten derivirten ven, nämlich die Gerade $x = \pm a$.

8) Da die Proportion 2) auch für den Kreis vom Radius a en muss, so folgt:

Construirt man zu einem System von Ellipsen ihre zweiten virten Curven und zu jenen die zugehörigen Hauptkreise ie deren zweiten derivirten Curven, so verhält sich je eine inate der Ellipse zu ihrer entsprechenden der zweiten derivirten ve, wie je eine Ordinate des betreffenden Hauptkreises zu r entsprechenden der zweiten derivirten Curve. Oder mit ren Worten: Die Ordinaten der Ellipsen verhalten sich in m Falle zu den entsprechenden Ordinaten der Hauptkreise so wie die entsprechenden Ordinaten der zugehörigen zweiten irten Curven.

§. 10.

Die erste derivirte Curve und eine Gerade.

Ist die Gleichung der Geraden

$$(11) \quad . \; . \; . \; . \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$$

gibt sich durch Elimination von y aus den Gleichungen (11) (2b):

$$(12) \ldots . x^4 - \frac{2p}{\cos\alpha} x^3 + \left(\frac{p^2}{\cos^2\alpha} + \frac{k^2\, a^2}{b^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}\right) x^2 - k^2\, a^4 \operatorname{tang}^2 \alpha =$$

1) Jede Wurzel dieser Gleichung liefert eine Abscisse eine Schnittpunktes, dessen zugehörige Ordinate sich aus (11) ergib Da demnach die Curve von der Geraden höchstens in vie Punkten geschnitten werden kann, so ist die Curve von de vierten Ordnung.

2) Da die Gleichung (12) von geradem Grade und da absolute Glied negativ ist, sowie alle Coefficienten reell sind, s ergeben sich stets mindestens zwei reelle Wurzeln, also auc stets mindestens zwei reelle Schnittpunkte der Curve und de Geraden.

3) Für $p = o$ geht die Gleichung (12) über in:

$$(13) \ldots . \; x^4 + \frac{k^2\, a^2}{b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha} x^2 - k^2\, a^4 \sin^2 \alpha = o,$$

deren Wurzeln sind:

$$x_{\substack{1\\2}} = \pm \frac{a}{b \operatorname{tang} \alpha} \sqrt{\frac{k}{2} \left(\sqrt{k^2 + 4\, b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha} - k\right)}$$

$$x_{\substack{3\\4}} = \pm \frac{a}{a \operatorname{tang} \alpha} \sqrt{-\frac{k}{2} \left(\sqrt{k^2 + 4\, b^2 \operatorname{tang}^2 \alpha} + k\right)}$$

d. h. jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Gera schneidet die Curve nur in zwei Punkten, deren Coordinat paarweise gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sin

4) Es sei $\alpha = o$; also $x = p$; $y = \mp \frac{k\, a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - p^2}}{p}$.

Eine Gerade parallel der Axe der Y schneidet demnac so lange $p < a$ ist, die Curve in zwei Punkten, welche symmetris zur Axe der X liegen. Für $p > a$ schneidet die Gerade d Curve überhaupt nicht.

5) Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht die Gleichung (12) über in:

$$x = \pm \frac{a^2 \, . \, k}{\sqrt{b^2\, p^2 + a^2\, k^2}}$$

Eine Gerade parallel der Axe der X schneidet also Curve in zwei symmetrisch zur Axe der Y liegenden Punkte

§. 11.

Die zweite derivirte Curve und eine Gerade.

Durch Elimination von y aus den Gleichungen (11) und (4^b) gibt sich:

$$(14) \ldots x^6 - a^2 x^4 + x^2 \cdot \frac{a^6}{b^2} \; cotg^2\,\alpha - \frac{2a^6 p \cos\alpha}{b^2 \sin^2\alpha}\, x + \frac{a^6 p^2}{b^2 \sin^2\alpha} = o$$

Entsprechend dem vorigen §. folgt aus Gleichung (14).

1) Die Curve ist von der sechsten Ordnung.

2) Für $p = o$ geht Gleichung (14) über in:

$$(15) \ldots\ldots x^6 - a^2 x^4 + x^2 \cdot \frac{a^6}{b^2} \; cotg^2\,\alpha = o,$$

ren Wurzeln sind:

$$x_{1,2} = o; \quad x_{3,4,5,6} = \pm a \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 - 4a^2\, cotg^2\,\alpha}}$$

h. jede durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Gerade neidet ausser in diesem Punkte die Curve noch in vier anderen nkten, so lange $cotg^2\,\alpha < \frac{b^2}{4a^2}$ ist. Ist aber $cotg^2\,\alpha > \frac{b^2}{4a^2}$, schneidet die Gerade die Curve nur im Coordinatenanfangs- nkte. [cf. §. 7. 2)].

3) Für $\alpha = o$ ist $x = p$; $y = \pm \frac{b}{a^3} p^2 \sqrt{a^2 - p^2}$ d. h. jede rade parallel zur Axe der Y schneidet die Curve in zwei nkten für $p < a$.

4) Für $\alpha = 90^0$ resultirt:

$$x^6 - a^2 x^4 + \frac{a^6 p^2}{b^2} = o;$$

dieser Gleichung höchstens zwei positive und höchstens zei negative Wurzeln zukommen, so schneidet jede Gerade rallel zur Axe der X die Curve im Allgemeinen in vier nkten.

§. 12.

Tangente der ersten derivirten Curve.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x, y) der erst[e] derivirten Curve ist:

$$(16^a) \ldots . \; y - \eta = \pm \frac{k a^3}{b x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} (x - \xi)$$

oder:

$$(16^b) \ldots . \; \eta = \mp \frac{k a^3}{b x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left(2x - \frac{x^3}{a^2} - \xi\right)$$

Für $\eta = o$ ist $\xi = 2x - \frac{x^3}{a^2}$; die Tangente am Punkte $(x,$ der ersten derivirten Curve schneidet demnach die Axe der in einem Punkte, dessen Abstand vom Coordinatenanfangspunk $\left[2x - \frac{x^3}{a^2}\right]$ ist.

Hieraus folgt folgende Construction der Tangente a Punkte (x, y) der Curve:

Man construirt die vierte Proportionale zu a, x und d dritten Proportionalen von a und x, schneidet die so erhalte Strecke von der doppelten Abscisse des Berührungspunktes a trägt dann das von der doppelten Abscisse übrig bleiben Stück vom Ursprung auf der Axe der X ab und verbindet d Endpunkt des Abschnittes der Abscissenaxe mit dem gegeben Punkte (x, y). Alsdann ist diese Verbindungslinie Tangen an die Curve.

Ueber den geometrischen Ort aller Schnittpunkte d Tangenten eines Systems von ersten derivirten Curven Punkten, welche in einer Parallelen zur Axe der Y liegen, g dasselbe wie bei der »Diffentialcurve« der Ellipse.

2) Setzt man für η in Gleichung (16b) den Werth

$$\mp \frac{k a}{b} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi},$$

so resultirt in Bezug auf ξ folgende biquadratische Gleichun

$$7) \ldots \xi^4 - 2\left(2x - \frac{x^3}{a^2}\right)\xi^3 + \left(4x^2 - \frac{3x^4}{a^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{x^6}{a^2} - x^4\right) = o,$$

ren Wurzeln sind:

$$\xi_{\frac{1}{2}} = x$$

$$\xi_{\frac{3}{4}} = \frac{x}{a^2}\left[(a^2 - x^2) \pm \sqrt{2a^4 - 3a^2x^2 + x^4}\right]$$

Daraus folgt:

a) Die Tangente am Punkte (x, y) schneidet die Curve sserdem in zwei Punkten.

b) Liegt der Berührungspunkt im Endpunkt der grossen xe der Ellipse, so fallen beide Schnittpunkte in das Unendliche.

c) Projicirt man den Berührungspunkt (x, y) sowie die iden Schnittpunkte der Tangente mit der Curve auf die Axe r X, so ist der zu diesen drei Punkten gehörige vierte rmonische Punkt:

$$\left\{\frac{x\left[(a^2 - x^2) \pm x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)(2a^2 - x^2)}\right]}{\left[(a^2 - x^2)^2 - a^2 - x^2\right]};\ o\right\},$$

lcher für $x = \pm a$ mit dem Coordinatenanfangspunkt zu- nmenfällt.

§. 13.

Tangente der zweiten derivirten Curve.

Sind (x, y) die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist Gleichung der Tagente der Curve:

$$(18a) \ldots\ y - \eta = \pm \frac{bx(2a^2 - 3x^2)}{a^3\sqrt{a^2 - x^2}}(x - \xi)$$

er:

$$(18b) \ldots\ \eta = \pm \frac{bx(2a^2 - 3x^2)}{a^3\sqrt{a^2 - x^2}}\left[\frac{2x^2 - a^2}{2a^2 - 3x^2} \cdot x + \xi\right]$$

1) Für $\eta = o$ ist: $\xi = \dfrac{2x^2 - a^2}{3x^2 - 2a^2} \cdot x$; die Tangente schneidet die Axe der X im Abstande $\dfrac{2x^2 - a^2}{3x^2 - 2a^2} \cdot x$ vom Coordinaten- angspunkte.

2) Setzt man $\eta = \pm \frac{b}{a^3} \xi^2 \sqrt{a^2 - \xi^2}$, so erhält man
Abscisse des Tangentialpunktes aus folgender Gleichung, welc
in Bezug auf ξ vom sechsten Grade ist:

$$(19) \ldots \xi^6 - a^2 \xi^4 - \frac{(2a^2 - 3x^2)^2}{x^2 - a^2} . x^2 \xi^2 - \frac{(2x^2 - a^2)(2a^2 - 3x^2) 2x}{x^2 - a^2}$$

$$- \frac{(2x^2 - a^2)^2}{x^2 - a^2} . x^4 = 0.$$

Nach Absonderung der Wurzeln:

$$\xi_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = x$$

bleibt:

$$(20) \ldots . \quad \xi^4 + 2x\xi^3 + \xi^2 (3x^2 - a^2) + 2x\xi (2x^2 -$$

$$- \frac{x^2 (2x^2 - a^2)^2}{x^2 - a^2} = 0.$$

Da diese Gleichung von geradem Grade und das absol
Glied negativ ist, so kommen ihr mindestens zwei reelle Wurz
zu, deren eine positiv, deren andere negativ ist. Im Allgemein
indessen hat die Tangente ausserdem vier Punkte mit der Cur
gemein. Liegt der Berührungspunkt im Coordinatenanfang
punkte, so folgt aus Gleichung (19) für $x = o$:

$$\xi^6 - a^2 \xi^4 = o,$$

welcher Gleichung die Wurzeln

$$\xi_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = o; \quad \xi_{\left.\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}} = o; \quad \xi_{\left.\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right\}} = \pm a$$

zukommen. Es fallen hier zwei jener Schnittpunkte mit de
Berührungspunkte zusammen.

Dasselbe gilt von dem Punkte $x = + \frac{a}{\sqrt{2}}$; für diesen Wer
liefert Gleichung (19) die Wurzeln:

$$\xi_{\left.\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right\}} = o; \quad \xi_{\left.\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right\}} = o; \quad \xi_{\left.\begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix}\right\}} = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

§. 14.

ahl der Tangenten von einem Punkte (ξ, η) an die erste derivirte Curve.

Die Coordinaten des Berührungspunktes (x, y) der vom ınkte (ξ, η) gezogenen Tangenten bestimmen sich aus der eichung:

$$(2b) \quad \ldots \quad b^2 x^2 y^2 + k^2 a^2 x^2 - k^2 a^4 = o$$

ıd der (durch implicite Differentiation resultirenden) Gleichung r Tangente:

$$(21) \quad \ldots \quad b^2 x y (y - \eta) = (b^2 y^2 + k^2 a^2)(x - \xi).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen einmal y und dann x, folgt:

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} (k^2 a^2 + b^2 \eta^2) x^6 - a^2 b^2 \eta^2 x^4 - 2a^4 k^2 x^3 \xi + a^6 k^2 \xi^2 = o \\ \text{und:} \\ b^6 \xi^2 y^6 + 3\, a^2 b^4 k^2 \xi^2 y^4 + a^2 b^2 k^2 (3\, a^2 k^2 \xi^2 - a^2 b^2 \eta^2) y^2 \\ \qquad - 2a^6 b^2 k^4 \eta y + k^6 a^6 (\xi^2 - a^2) = o. \end{array} \right.$$

Daraus folgt:

1) Die erste derivirte Curve der Ellipse ist von der sechsten (asse, da sich im Allgemeinen von einem Punkte (ξ, η) sechs Ingenten an dieselbe ziehen lassen.

2) Werden von einem Punkte (ξ, η) alle möglichen Ingenten gezogen, so ist:

a die algebraische Summe der Abscissen der Berührungspunkte
b » » » » Producte von je vier Abscissen
c » » » » Producte von je fünf Abscissen
gich Null.

Ferner ist auch:

d die algebraische Summe der Producte von je drei Ordinaten d Berührungspunkte gleich Null.

3) Für $\xi = o$ und $\eta = o$ ergibt sich aus Gleichung (22):

$$x = o; \; y = \infty$$

d.ı. befindet sich der Punkt (ξ, η) im Coordinatenanfange, sc allen die Tangenten von diesem Punkte an die Curve mit de Axe der Y zusammen, sind also Asymptoten.

4) Für $\xi = \pm a;\ \eta = o$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l} x^6 - 2a^3 x^3 + a^6 = o \\ y^6 + 3a^2 b^2 k y^4 + 3a^4 k^4 y^2 = o \end{array}\right\},$$

welche Gleichungen als reelle Wurzeln:

$$x_{\substack{1\\2}} = \pm a;\ y_{\substack{1\\2}} = o$$

besitzen; d. h. liegt der Punkt (ξ, η) im einen oder ande Endpunkte der grossen Axe der Ellipse, so lässt sich von h aus nur eine Tangente ziehen.

5) Für $\eta = o$ liefern die Gleichungen (22):

$$x = \sqrt[3]{a^2 \xi}$$

$$y = \pm \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a \sqrt[3]{a \xi^2} - \xi^2}}{\xi}$$

Liegt demnach der Punkt (ξ, η) auf der Axe der X zwisch den beiden Geraden $x = \pm a$, so lassen sich von demsell zwei Tangenten an die Curve ziehen, deren Berührungspun symmetrisch zur Axe der X liegen.

6) Für $\xi = o$ ist:

$$x_{\substack{1\\2\\3\\4}} = o;\ x_{\substack{5\\6}} = \pm \frac{a b \eta}{\sqrt{k^2 a^2 + b^2 \eta^2}}$$

$$y = -\frac{a^2 k^2}{b^2 \eta}$$

d. h. von einem Punkte der Axe der Y lassen sich ebenfs zwei Tangenten ziehen, deren Berührunspunkte mit der Cu symmetrisch zur Axe der Y liegen.

Eine der vorhergehenden Untersuchung entsprechende trachtung zeigt, dass die zweite derivirte Curve der Elli von der achten Classe ist.

§. 15.

O[rt]hogonale Trajectorie einer Schaar von ersten derivirten Curven.

Durch Elimination von k aus den Gleichungen:

$$y = \mp \frac{k a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

u[n]d:

$$(b^2 y^2 + k^2 a^2) \frac{dy}{dx} - b^2 x y = o$$

[fol]gt:

$$a^2 y\, d y - x (a^2 - x^2)\, dx = o$$

[F]ührt man die Integration vorstehender Differentialgleichung [a]u[s], so ergibt sich:

$$(23) \; . \; . \; . \; . \; y = \pm \frac{x}{a \sqrt{2}} \sqrt{2 a^2 - x^2}$$

[a]l[s] Gleichung jener orthogonalen Trajectorie, welche durch den [Co]ordinatenanfangspunkt geht und die von beliebigen Punkten [a]n [d]er Axe der X construirten ersten derivirten Curven der [E]llipse schneidet.

Diese Curve geht durch folgende Construction hervor: [M]a[n] beschreibe mit $a\sqrt{2}$ als Radius einen Kreis und nehme [d]e[n] Mittelpunkt desselben als Coordinatenanfangspunkt an, [p]r[oj]cire alsdann einige Radien auf die Abscissenaxe, bilde die [v]ie[rt]e Proportionale zu $a\sqrt{2}$, x und dem vom Schnittpunkte [d]es Radius und des Kreises auf die Axe der X gefällten Per[pend]ikel und trage die so erhaltene Strecke vom Fusspunkte [d]ies[e]s Perpendikels aus auf demselben ab. Alsdann ist der [j]ed[es]mal zuletzt erhaltene Punkt ein Punkt jener Curve.

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen und hat die [G]e[st]alt einer Schleife. Der zwischen den positiven Coordinatenaxen [li]eg[en]de Quadrant geht unter einem halben rechten Winkel vom [C]o[or]dinatenanfangspunkte aus, steigt mit concaver Krümmung [g]eg[e]n die Axe der X, erreicht bei $x = a$; $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ seinen oberen

Culminationspunkt und schneidet endlich die Abscissenaxe un einem rechten Winkel bei $x = a\sqrt{2}$; $y = o$. Der Mittelpunkt Curve ist ihr einziger Inflexionspunkt. (Fig. 4).

Die Curve stimmt daher in ihren besonderen Punkten der Lemniskate vollständig überein und weicht nur in ihr Laufe etwas von derselben ab.

Ihre Gleichung in Polarcoordinaten ist.

$$(24a) \quad \ldots \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{\cos^2 \Theta} \sqrt{\cos 2\Theta}$$

oder:

$$(24b) \quad \ldots \quad r = \frac{2a\sqrt{2\cos 2\Theta}}{(\cos 2\Theta + 1)}$$

Aus den Gleichungen der Curve tritt sogleich die l abhängigkeit derselben von der Halbaxe b der Ellipse herv Daraus folgt:

Construirt man zu einer Schaar von Ellipsen, welche die in der Axe der X liegende Hauptaxe (2a) gemein hab von beliebigen Punkten der Abscissenaxe zu jeder dersel eine Schaar von ersten derivirten Curven, so ist die orthogon Trajectorie aller dieser Curven diejenige, deren Gleichung in und (24) angegeben wurde.

Die Gleichung der ersten derivirten Curve dieser Trajectorie

$$(25a) \quad \ldots \quad y = \pm \frac{k\,a\sqrt{2}\ \sqrt{2a^2 - x^2}}{2(a^2 - x^2)}$$

oder:

$$(25b) \quad \ldots \quad 2(a^2 - x^2)\,y^2 = k^2 a^2 (2a^2 - x^2)$$

Die Curve besteht aus vier congruenten Theilen; der zwisc den positiven Coordinatenaxen liegende Quadrant geht seinem oberen Culminationspunkte $\left(x = o;\ y = \frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ aus, st mit convexer Krümmung gegen die Axe der X, hat die Ger $x = +a$ zur Asymptote, kehrt aus dem Unendlichen zur nimmt in dem Inflexionspunkt, welcher zwischen $x = a$ $x = a\sqrt{2}$ liegt, concave Krümmung gegen die Abscissenaxe und schneidet letztere lothrecht in $x = a\sqrt{2}$. (Fig. 5).

Die Abscisse des Inflexionspunktes bestimmt sich aus der chung:

$$x^6 - 6a^2 x^4 + 6a^4 x^2 + 3a^6 = o.$$

§. 16.

beiden ersten derivirten Curven und die „Differentialcurve".

Nach §. 5. (2a) ist die Gleichung der ersten derivirten Curve:

$$y = \mp \frac{ka}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

der entsprechenden Differentialcurve ist:

$$y_\alpha = \mp \frac{kb}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Hieraus folgt:

1) $$y \cdot y_\alpha = k^2$$

. . das Rechteck aus jeder Ordinate der ersten derivirten e und jeder zur selben Abscisse gehörigen Ordinate der ent-chenden Differentialcurve ist constant und zwar gleich dem drat über der gemeinschaftlichen Constructionsstrecke.

2) Demnach verhalten sich die Ordinaten der ersten derivirten e zu einander umgekehrt wie die Ordinaten der ent-chenden Differentialcurve.

3) Für einen Schnittpunkt beider Curven ist:

$$y^2 = k^2; \text{ oder } y = \pm k.$$

rdinaten der Schnittpunkte sind also unabhängig von den axen a und b der Ellipse.

onstruirt man demnach eine Schaar von Ellipsen mit igen Axen, deren grosse Axen immer in der Axe der X , und zu jeder derselben die zugehörige erste derivirte sowie die entsprechende Differentialcurve, so sind die etrischen Oerter der Schnittpunkte aller ersten derivirten n und aller Differentialcurven die Geraden $y = \pm k$.

4) Ist in den Gleichungen (2) und (4) die Halbaxe b d
Ellipse variabel, so folgt durch Elimination dieser Grösse a
denselben:

$$(26a) \quad \ldots \quad y = \pm \frac{1}{a} \sqrt{k x (a^2 - x^2)}$$

und

$$(26b) \quad \ldots \quad x = o.$$

Haben demnach alle ersten und zweiten derivirten Curv
von Ellipsen die Hauptaxe $2a$ gemein, so sind die geometrisch
Oerter der Punkte, in welchen jede erste derivirte Curve v
ihrer entsprechenden zweiten geschnitten wird, die Curve, der
Gleichung (26a) ist, und die Axe der Y.

Die Curve, welche durch die Gleichung (26a) dargestellt wi
hat die in (Fig. 6) angegebene Gestalt. Sie liegt symmetrisch
den Coordinatenaxen innerhalb der Ellipse und besteht aus zv
Curvenästen, die sich im Coordinatenanfangspunkte berühren. H
und in den Punkten ($x = \pm a$; $y = o$) schneidet sie die Axe der
lothrecht und hat für die Werthe $\left(x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}};\ y = \pm \sqrt{\frac{2k}{3\sqrt{}}}\right.$
Culminationspunkte. Wendepunkte sind nicht vorhanden. A
vier Theile wenden der Abscissenaxe die concave Seite zu.

Ich, Carl Völker, Sohn des Stationsvorstehers Carl Völker, gelischer Confession, wurde geboren am 21. Mai 1857 zu Cassel. Schulbildung erhielt ich auf der höheren Bürgerschule zu Hofgeismar auf der Realschule I. Ordnung zu Cassel. Von der letztgenannten lt wurde ich am 16. September 1876 mit dem Zeugniss der Reife ssen. Vom Herbste des Jahres 1877 an studire ich an der Universität arburg Mathematik und Naturwissenschaften und besuchte hier die sungen der Herren Professoren und Docenten: Bergmann, Braun, Drach, Dunker, Feussner, Greeff, Hess, Melde, Stegmann, gel, Wagener, Wigand.

Allen diesen meinen hochverehrten Lehrern fühle ich mich zu n Danke verpflichtet.

Fig. 1.

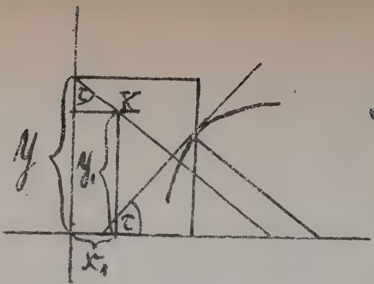


Fig. 2.

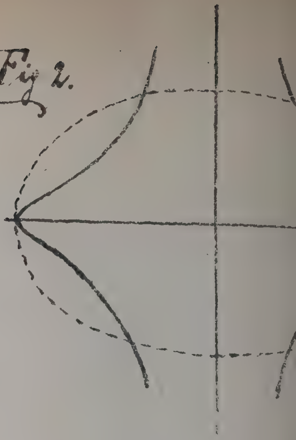


Fig. 3

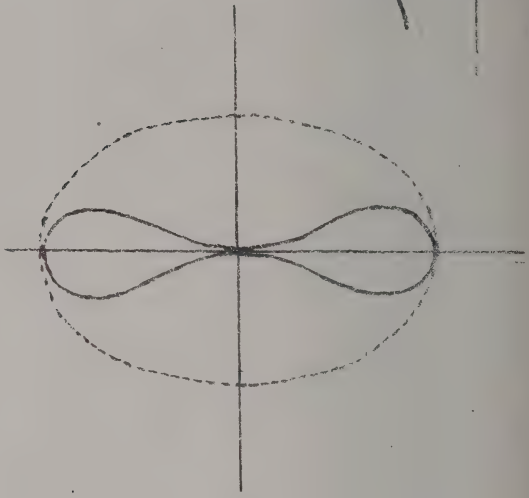


Fig. 4.

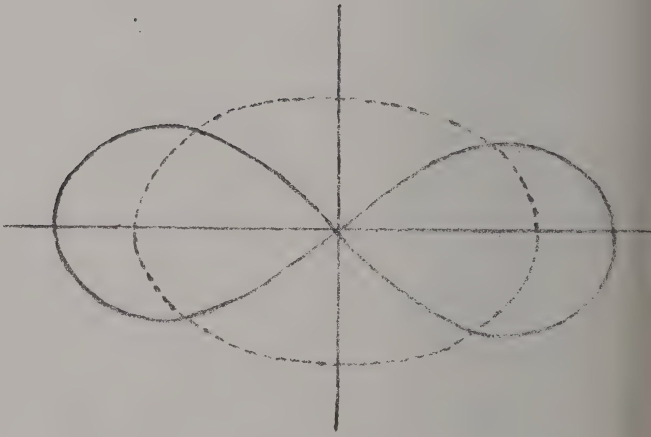


Fig. 5.

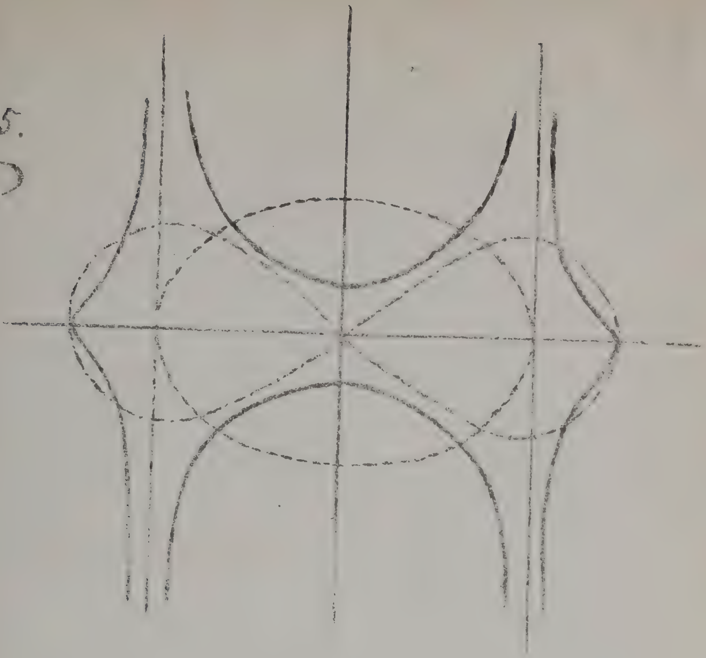
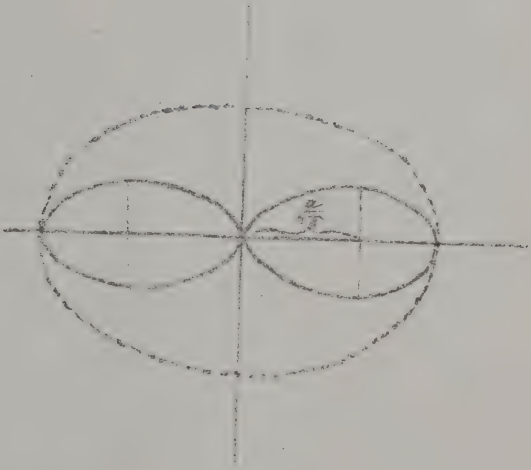


Fig. 6.



Voss, A.

II A 2. DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG.

VON

A. VOSS

IN WÜRZBURG.

Inhaltsübersicht.

D. Integralrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

a) Das unbestimmte Integral.

b) Das bestimmte Integral.

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

III. Anwendungen.

E. Anhang.

Litteratur.

1) Ältere Werke.

G. W. Leibniz, Mathematische Schriften, hrsg. v. *C. J. Gerhardt*, Lond. u. Berl. 1849—1863.

Joh. Bernoulli, Opera omnia, 4 Bde. Lausanne u. Genf 1742.

De l'Hospital, Analyse des infiniment petits, Paris 1696, 1715, 1735.

J. Newton, Opuscula, 3 Bde. Lausanne 1714.

**Brook Taylor,* methodus incrementorum, Lond. 1717.

**J. Stirling,* Methodus differentialis, Rom 1730.

**C. Maclaurin,* Treatise of fluxions, Edinburgh 1742.

L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, 2 Bde. 1748; deutsch v. *A. C. Michelson,* Berl. 1788—90; *F. Maser,* Berlin 1885.

— Institutiones calculi differentialis, Petrop. 1755 (Calc. diff.); dtsch. v. *A. C. Michelson,* Berl. 1790—93.

— Institutiones calculi integralis, 3 Bde., Petrop. 1768—1770. 2. Ausg. 1792—1794 in 4 Bdn., deutsch von *Salomon,* Wien 1828—1830 (4 Bde).; zitiert ist unter der Abkürzung (Calc. int.) die Ausg. von 1768 u. Bd. 4 der von 1794.

J. A. Cousin, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris 1796.

J. L. Lagrange, insbesondere Leçons sur le calcul des fonctions, 2. éd. 1806; oeuvr. 10 (calc. des fonct.), Théorie des fonctions analytiques (1797) 2. éd. 1813, oeuvr. 9 (Th. des fonctions).

S. F. Lacroix, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, 2. éd. Paris t. I, 1810; t. II, 1814; t. III, 1819 (*Lacroix,* traité).

2) Neuere Werke.

A. L. Cauchy, Cours d'analyse algébrique, Paris 1821; deutsch von *B. Hutzler,* Königsb. 1828; *Itzigsohn,* Berlin 1885.

— *Résumé des leçons à l'école polytechnique, Paris 1823.

— Leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829 (Calc. diff.); dtsch. v. **H. Schnuse,* Braunschw. 1836.

— Exercices de Mathématiques, 1, 1826.

— *Résumés analytiques, Turin 1833.

— Exercices d'analyse et de physique mathématique, 4 Bde. 1839—1847.

S. F. Lacroix, Traité de calcul différentiel et intégral, 5. éd., Paris 1837, 8. éd. mit Noten von *Hermite, Serret,* 1878/79.

F. Minding, Handbuch der Differential- u. Integralrechnung, 1, Berlin 1836.

F. Moigno, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, t. I, 1840; t. II, 1, 1844 t. IV, 1, 1861 (Moigno).

A. de Morgan, Differential and integral Calculus, London 1842.

**D. Gregory,* Examples of the progresses of the differential and integral calculus Cambridge, 2 Bde., 1841—46.

O. Schlömilch, Handbuch der Differential- und Integralrechnung, 3 Lieferungen Greifswald 1847/48.

A. Cournot, Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, 2 Bde., éd. 2, Paris 1857.

R. Hoppe, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Berlin 1865.

— Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten Leipzig 1845.

L. Natani, Die höhere Analysis, Berlin 1867.

G. F. Meyer (nach *Dirichlet*), Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, Leipzig 1871.

J. Bertrand, Traité de calcul différentiel et intégral, 2 Bde., Paris 1864—1870.

Ch. Hermite, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 1. Bd., Paris 1873.

J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral. Paris, 2 Bde., éd. 1, 1868, éd. 2, 1880; deutsch bearb. von *A. Harnack,* 2 Bde., Leipzig 1884/86 (Serret-Harnack), 2. Aufl. 1896 von *G. Bohlmann.*

J. Thomae, Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale, Halle 1875 (Thomae, Einleitung.)

J. Hoüel, Cours de calcul infinitésimal, 4 Bde., Paris 1878—1881.

J. Todhunter, Treatise on the differential Calculus, 8. ed. London 1878.

R. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, 2 Bde., Bonn 1877/80.

E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., 2 Bde., Berlin 1878/81.

J. Worpitzky, Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung, Berlin 1890.

A. Harnack, Die Elemente der Differential- u. Integralrechnung, Leipzig 1882. (Harnack, Elemente.)

M. Pasch, Einleitung in die Differential- u. Integralrechnung, Leipzig 1882.

A. Genocchi u. *G. Peano,* Calcolo differenziale, Torino 1884. (Genocchi-Peano, Calcolo); dtsch. von *G. Bohlmann* u. *A. Schepp,* Lpz. 1898/99.

**U. Dini,* Fondamenti per la teorica delle funzione di variabili reali, Pisa 1878. (Dini, Fondamenti).

H. Laurent, Traité d'analyse, Paris, 1—7, 1885—1891.

K. Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, Berlin 1886.

J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886. (Tannery, Introduction.)

Ch. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, Paris 1886.

Ch. Sturm, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 8. éd. *Prouhet,* 2. Bde., Paris 1884, 9. éd. A. St. Germain, 1888; deutsch von *Th. Gross,* Berlin 1897.

P. Mansion, Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'université de Gand, Paris 1887.

**G. Teixeira,* Curso de analyse infinitesimal, Porto 1888/1889; 3. Aufl. 1892/94.

É. Picard, Traité d'analyse, 1, Paris 1891. (Picard, traité.)

U. Dini, Grundlagen für die Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse, deutsch von *J. Lüroth* u. *A. Schepp,* Leipzig 1892. (Dini-Lüroth.)

Ch. Hermite, Cours de M. Hermite, rédigé par M. Andoyer, Paris, éd. II, 1883, éd. IV, 1891.

O. Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, Leipzig, Bd. 1, 1893, Bd. 2, 1896. Bd. 3 in Vorbereitung 1899. (Stolz, Grundzüge.)

B. Riemann, Gesammelte Werke, hsg. von *H. Weber* und *R. Dedekind,* 2. Aufl. von *H. Weber,* Leipzig 1892.

C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique, 2. éd. 3 Bde. Paris 1893—1896. (Jordan, Cours.)

O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, 2 Bde., 4. Aufl. Braunschw. 1895.

L. Kronecker, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und mehrfachen Integrale, hsgeg. von *E. Netto,* Leipzig 1894. (Kronecker, Vorl.)

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, dtsch. v. *Th. Friesendorf* u. *E. Prümm,* Lpzg. 1896.

E. Pascal, Calcolo infinitesimale, 3 Bde., Milano 1895.

G. Peano, Lezioni di Analisi infinitesimale, 2. Vol. Torino 1893.

Ph. Gilbert, Cours d'Analyse infinitésimale, 4. éd. Paris et Bruxelles 1892.

* *

L. Carnot, Métaphysique du calcul infinitésimal (1799), 6. éd., Paris 1860.
C. J. Gerhardt, Die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855.
H. Weissenborn, Die Prinzipien der höheren Analysis, Halle 1856.
A. Harnack, Über den Gebrauch des Unendlichen in der Mathematik, Festschrift Dresden 1887.
P. du Bois-Reymond, Allgemeine Funktionentheorie, Tübingen 1882.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Leipzig, Bd. 1 2. Aufl. 1894; 2, 1894; 3, 1894—1897.
F. Klein, Über Arithmetisierung der Mathematik, Gött. Nachr. 1895, p. 82.
G. Bohlmann, Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung, Ber. d. M. 6, 1899.

Eingeklammerte Bezeichnungen bedeuten die für häufiger zitierte Schriften gewählten Abkürzungen. Ein * zeigt an, dass die betreffende Schrift nicht von mir selbst eingesehen und benutzt werden konnte. Lehrbücher sind — bis auf einige wenige Ausnahmen — in das vorstehende Verzeichnis nicht mit aufgenommen worden.

B. Einleitung.

1. Historisches. In der Entwickelung der Infinitesimalrechnung lassen sich folgende, allerdings oft gleichzeitig neben einander fort wirkende Epochen unterscheiden*):

I. Die Anfänge der Infinitesimalrechnung im Zusammenhang mit den Problemen der Quadratur, der Tangentenkonstruktion und dem umgekehrten Tangentenproblem, von 1600—1668.

II. Die Fluxionsmethode *J. Newton*'s[1]) (1643—1727) und der Algorithmus der Differentialrechnung von *G. W. Leibniz*[2]) (1646—1716).

*) Es ist wohl nicht überflüssig, die Auffassung des Infinitesimalbegriffes bei den im Texte angeführten Mathematikern durch einige Äusserungen derselben zu erläutern.

1) *J. Newton,* Principia (1687), Amsterd. Ausg. 1723, p. 33: Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed *limites*, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos proprius assequi possunt, *quam pro data quavis differentia* . . . Igitur in sequentibus, si quando facili rerum concept[...] consulens dixero quantitates quam minimas vel evanescentes vel ultimas, ca[...] intelligas quantitates magnitudine decrescentes, sed cogita semper diminuend[...] sine limite.

2) *G. W. Leibniz,* Manuscr. v. 26. März 1676 (Mathemat. Schriften e[...] *C. J. Gerhardt*, 5, p. 217): Videndum, an exacte demonstrari possit . . qu[...] differentia non tantum sit infinite parva, *sed omnino nulla,* quod ostendetur, [...] constet, eousque semper posse inflecti polygonum, ut differentia assumta etia[...] infinite parva minor fiat error; und Philosoph. Schriften ed. *Gerhardt,* [...] p. 90 (Essai de Théodicée [1710]): et les infinies ou infiniment petits n'y sig[...]fient que les grandeurs qu'on peut prendre ainsi grandes ou ainsi petites q[...]

III. Die systematische (formale) Ausbildung der Infinitesimalrechnung durch *Joh. Bernoulli* (1667—1748), *L. Euler*[3]) (1707—1783) und *J. L. Lagrange*[4]) (1736—1813); der Versuch des letzteren, dieselbe auf rein algebraischer Grundlage zu entwickeln.

IV. Die Begründung der Infinitesimalrechnung durch *A. L. Cauchy* (1789—1857) mittelst der schon von *C. Maclaurin* und *J. d'Alembert*[5]) wieder hervorgehobenen Methode der Grenzen[5]), und die formalen Fortschritte durch *C. G. J. Jacobi*'s (1804—1851) Arbeiten über die Differentialgleichungen.

V. Die rein arithmetische Durchforschung der Infinitesimalbetrachtungen durch *B. Riemann*'s (1826—1866) Begriff des bestimmten Integrals, in Verbindung mit dem allgemeinen Funktions-

---

l'on voudra, pour montrer, qu'une erreur est moindre que celle qu'on a assignée, c'est à dire, qu'il n'y a aucune erreur* . . . ou bien on entend par l'infiniment petit l'état de évanouissement ou du commencement d'une grandeur. Dagegen auch (1695, Act. erud.) *Gerhardt,* 5, p. 322: Caeterum aequalia esse puto non tantum, quorum differentia est omnino nulla, sed quorum differentia incomparabiliter parva.

3) *L. Euler,* Inst. calc. int. 1755, praefatio: Hic autem limes, qui quasi rationem ultimam incrementorum constituit, verum est objectum calculi differentialis (p. XIV), dagegen p. X u. XI: quod *nihilum* jam hic litera ω exhibitur, d in calculo differentiali *quia ut incrementum quantitatis x spectatur,* signo dx repraesentari ejusque differentiale vocari solet.

4) *J. L. Lagrange,* Calcul des fonctions = (oeuvres 10, p. 7): Le calcul des fonctions sert de plus à lier le calcul différentiel immédiatement à *l'algèbre,* u. p. 8: Au reste je ne disconviens pas, qu'on ne puisse par la considération des limites, envisagées d'une manière particulière démontrer rigoureusement les principes du calcul différentiel . . . mais l'espèce de métaphysique, que l'on est obligé d'y employer est, *sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'Analyse* (vgl. auch p. 269); ferner „sur la métaphysique du calcul intégral", Misc. Taur. 2, 1760 = oeuvres 7, p. 598: Il en est ici comme dans la méthode des infiniment petits, ou le calcul redresse lui-même les fausses hypothèses . . . L'erreur est détruite par une autre erreur . . . La méthode de Newton est au contraire tout à fait rigoureuse. Noch stärker äussert sich *L. Carnot* (1753—1823), Métaphysique de l'analyse infinitésimale 1799 (èd. IV, Paris 1860): l'analyse infinitésimale n'est autre chose qu'un calcul d'erreurs compensées (p. 119, 122, 136).

5) *J. d'Alembert* in der Encyclopédie méthodique (Mathématiques, Paris, éd. von 1784) unter dem Worte différentiel, 1, p. 522; 2, p. 77, 310; vgl. auch *R. Simson,* de limitibus quantitatum et rationum fragmentum, Glasguae 1776.

A. L. Cauchy, Par. C. R. (1843) = oeuvres (1) 8, p. 12: On échappe aux difficultés, quand on considère une fonction dérivée comme la limite entre les accroissements . . . On pourrait nommer différentielle de la variable indépendante l'accroissement de cette variable et différentielle de la fonction donnée le produit de la dérivée par la différentielle . . . Ähnlich auch im Calc. différentiel (1829).

begriff (*K. Weierstrass* [1815—1897]) und der Mengenlehre (*P. du Bois Reymond* [1831—1889], *G. Cantor, U. Dini* und andere).

Diese rein arithmetische Begründung der Infinitesimaloperationen welche für die gegenwärtige *kritische* Periode der Mathematik charakteristisch ist, hat zu der Erkenntnis geführt, dass die meisten auf Grund der älteren Arbeiten, deren Hauptzweck die *formale Erweiterung der Methoden* war, gewonnenen Sätze nur *eine durch ganz bestimmte Voraussetzungen beschränkte Gültigkeit* besitzen. Während diese Betrachtungen für die Hauptsätze der Differentialrechnung gegenwärtig zu einem gewissen Abschluss gebracht sind, eröffnet sich noch ein weites Feld insbesondere für die Theorie der uneigentlichen Integrale. Es soll in der folgenden, *die Entwickelung der Infinitesimalrechnung im 19. Jahrhundert* vorwiegend behandelnden Übersicht versucht werden, neben der Darstellung der formalen Operationen auch namentlich die kritischen Gesichtspunkte hervortreten zu lassen.

C. Differentialrechnung.

I. Funktionen einer Variablen.

2. Vordere und hintere Derivierte. Ist $y = f(x)$ eine im endlichen Intervalle a, b definierte, d. h. eindeutige und endliche Funktion, und x und $x + \Delta x$ zwei Punkte desselben, denen y und $y + \Delta y$ als Funktionswerte zugehören, so heisst das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

der *Differenzenquotient* von $f(x)$, gebildet für die Stelle x. Falls nun ein (zunächst auch endlicher) völlig bestimmter Grenzwert

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

existiert, unabhängig von der Art, wie das positive oder negative Δx gegen Null konvergiert, so hat $f(x)$ an der Stelle x eine *Derivierte*[6]) oder *Ableitung*[7]), oder *einen vollständigen Differentialquotienten*[8]), der durch $\frac{dy}{dx}$ nach *Leibniz* (Manuscr. v. November 1676, *Gerhardt*

6) *A. L. Cauchy,* Calc. différ. (1829), p 18: Cette limite, lorsqu'elle existe ... Das Wort derivare ist von *Leibniz* gebildet (*M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 182), das Wort differentiare desgl. (Leibniz, ed. *Gerhardt,* 5, p. 266), vgl. auch *L. Euler,* Inst. calc. diff. p. 115.

7) *A. L. Crelle,* Sammlung math. Aufsätze 1, p. 199 (Berl. 1821); Differential- und Integralrechnung heissen daher hier auch Ableitungs- und Zurückleitungsrechnung.

8) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 3.

Entdeckung d. h. Analys. p. 140) bezeichnet wird; $f(x)$ heisst daselbst *differentiierbar*[9]). Ergeben sich *zwei* verschiedene Grenzwerte, je nachdem Δx entweder nur alle positiven oder nur alle negativen Werte durchläuft, so hat $f(x)$ bezüglich eine *einseitige, vordere* oder *hintere*[10]) rückwärts oder vorwärts genommene[11]) Derivierte, dérivée à droite où à gauche[12]) derivata a destra o a sinistra[13]); $f(x)$ ist dann vorwärts oder rückwärts differentiierbar[14]). Notwendig ist für die Existenz einer Derivierten zunächst die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion[15]), doch kann man, wenn der Funktionswert an einer bestimmten Stelle einen (endlichen oder auch unendlichen) *Sprung* macht, die Derivierte daselbst in bestimmter Weise als unendlich ansehen, andererseits auch für $x = \infty$ von einem Grenzwert der Derivierten reden; so namentlich für den Fall, wo $f(x)$ bei Annäherung an $x = a$ stetig über alle Grenzen wächst. — Ist abgesehen von besonderen Punkten des Intervalles eine Derivierte für jeden Punkt derselben vorhanden, so bezeichnet man die hierdurch definierte *derivierte Funktion*[16]) durch

$$f'(x), \quad y',^{17)}$$

$$D(y), \quad Df(x), \quad \frac{d f(x)}{d x}\,^{18)},$$

lie Funktion heisst dann daselbst differentiierbar[19]).

---

9) *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79, p. 32; daselbst auch der Begriff ler *gewöhnlichen* Funktion, die in Bezug auf keine Richtung in der betreffenden Stelle ∞ viele Maxima oder Minima besitzt. (Vgl. I A 1, **11.**)

10) Desgl. Math. Ann. 16, p. 221 (1880).

11) *J. Thomae*, Einleitung p. 8 (1875).

12) *J. Tannery*, Introduction p. 65.

13) *Dini-Lüroth*, p. 87; p. 273 für die linke und rechte Derivierte die Beeichnung $d(x)$ und $d_1(x)$.

14) Als *mittleren* Differentialquotienten bezeichnet *P. du Bois-Reymond* elegentlich den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0} \frac{f(x+\varepsilon_1)-f(x-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

Math. Ann. 16, p. 220.

15) Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Derivierten sucht *A. Harnack* zu formulieren (Elemente p. 33 ff.); eine hinreichende edingung bei *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 35; allgemeinere Untersuchungen bei *Dini-Lüroth*, p. 257.

16) *A. L. Lagrange*, J. éc. polyt. 6 (1805) = oeuvr. 7, p. 327.

17) *Lagrange*, Théorie des fonctions = oeuvres 9, p. 33.

18) *Cauchy*, ausführlich z. B. in den Exerc. de math. et de phys. 3, 9—17 (1844). Ältere Bezeichnungen des Differentialquotienten bei *Lacroix*, 1, 147; ganz ungebräuchlich geblieben sind die Bezeichnungen von *Crelle* (1821).

19) Gleichmässig in einem Intervalle differentiierbar heisst eine Funktion, enn nach Annahme eines beliebig kleinen δ immer

3. Die Derivierten der elementaren Funktionen. Die *Differentialrechnung im engeren Sinne* beschäftigt sich mit dem Falle, wo eine Derivierte vorhanden ist. Ihre erste Aufgabe ist die Ermittelung derselben für die einfachsten Funktionen[20]). So ergeben sich die Formeln

$$y = \text{const.},\quad D(y) = 0,$$
$$y = cx,\quad D(y) = c,$$
$$y = x^n,\quad D(y) = nx^{n-1}.^{21)}$$

Die Betrachtung der allgemeinen Potenz, der Exponential- und logarithmischen Funktion erfordert die Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für}\quad n = \pm\infty.$$

Wird derselbe durch e bezeichnet[22]), so folgt

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

und zugleich ergiebt sich

$$y = a^x,\qquad D(y) = a^x \log_e(a),$$
$$y = \log_a(x),\quad D(y) = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Die Differentialquotienten der goniometrischen Funktionen

$$y = \sin x,\quad Dy = \cos x,$$
$$y = \cos x,\quad D(y) = -\sin x$$

beruhen auf den Grenzwerten[23])

$$\lim\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1,\quad \lim\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = 1,\quad \text{für}\ x = 0.$$

Die Derivierten der Kreisfunktionen (des Logarithmus) lassen sich

---

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} - \frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}\right| < \delta,$$

wie auch $|x'-x|$ und $|x''-x|$ kleiner als ein genügend kleines h angenommen werden, *L. Kronecker*; nach *L. Scheeffer,* Acta math. 5, p. 296 (1885).

20) *L. Euler,* Calc. diff. praef. p. VIII: Calculus differentialis est methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium.

21) Für negative und gebrochene n, wo der binomische Satz ausreicht, schon bei *Leibniz,* nova methodus . . . 1664 (Act. erud. = math. Schriften 6, p. 223). Die Differentiation der allgemeinen Exponentialfunktion zuerst bei *Joh. Bernoulli* Acta erud. 1697 = opera 1, p. 183.

22) *Euler,* Introductio 1, p. 90; Inst. calc. diff. p. 160; von *P. S. Laplace* (Théorie des probabilités = oeuvres 7, p. 44) wird noch c geschrieben. Eine Übersicht über die verschiedenen Formen dieser Grenzgleichung bei *O. Stolz* Grundzüge 1, p. 10—11. Vgl. I A 3, **17**; II A 1, Fussn. 147.

23) Nach *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 396 ist *R. Cotes* die exakte Behandlung dieser Grenzwerte zuzuschreiben.

auch durch den Satz gewinnen, dass die Derivierte der inversen Funktion[24]) der reziproke Wert der Derivierten der ursprünglichen Funktion ist; so findet man:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad D(y) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y = \arcsin x, \quad D(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die *Leibniz*'schen Formeln[25])

$$D(cu) = cD(u),$$

$$D(u+v+w+\cdots) = D(u) + D(v) + D(w) + \cdots$$

$$D(uv) = uD(v) + vD(u),$$

$$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD(u) - uD(v)}{v^2}$$

reichen dann zur Differentiation jeder rationalen Funktion der elementaren Funktionen aus.

4. Existenz der Derivierten. Dass eine stetige Funktion mit eventueller Ausnahme einzelner Stellen überhaupt eine Derivierte besitze, wurde zunächst wohl als selbstverständlich angesehen, jedenfalls nicht weiter untersucht. Erst *A. M. Ampère* warf die Frage auf, warum gerade das Verhältnis von Δy zur *ersten* Potenz des Zuwachses Δx einen bestimmten Grenzwert liefere[26]) und versuchte zu beweisen[27]), dass eine stetige Funktion, abgesehen von einzelnen Stellen, immer differentiierbar sein müsse; doch gelang ihm nur der Nachweis, dass bei einer nicht konstanten Funktion der Differentialquotient nicht beständig $+\infty$ oder $-\infty$ sein könne. Zu der Erkenntnis von *stetigen Funktionen*, welche an *unendlich vielen Stellen eines Intervalls* oder an *allen Stellen* derselben nicht differentiierbar sind, führte zuerst der *Riemann*'sche Integralbegriff[28]), insbesondere die *Riemann*'sche, in allen rationalen Punkten unstetige, aber gleichwohl integrabele Funktion, deren Integral an allen rationalen Stellen des Intervalles eine Derivierte nicht besitzt[29]); ferner das *Hankel*'sche Prinzip der Kondensation der Singularitäten[30]) (II A 1, **18**). Die volle Entscheidung

24) Die oft vernachlässigte Begriffsbestimmung der inversen Funktion bei O. *Stolz*, Grundzüge 1, p. 38; allg. Arithm. p. 186.

25) *Leibniz*, nova methodus = math. Schriften 5, p. 220, 222.

26) J. éc. polyt. cah. 13, p. 148 (1806).

27) Ebenda p. 154; vgl. *Dini-Lüroth*, p. 88, 298. Letzter Versuch dieser Art von *Ph. Gilbert*, Brux. mém. 8°, 23 (1872).

28) Hab.-Schrift Gött. 1854, publ. Gött. Abh. 13 (1867) = Werke p. 213.

29) Daselbst p. 228. Vgl. II A 1, **11** u. **18**.

30) Progr. Tübingen 1870 = Math. Ann. 20, p. 63; allgem. Encyklopädie in *Ersch* u. *Gruber*, Artikel „Grenze", 90, p. 189 (1871).

gab aber wohl erst das von *K. Weierstrass*[31]) unter Anwendung eines passend ausgewählten Grenzüberganges für das gegen Null konvergierende $\Delta(x)$ einwurfsfrei durchgeführte, später von *Ch. Wiener*[32]) geometrisch erläuterte Beispiel der Funktion

$$y = \sum_0^\infty a^n \cos(b^n \pi x),$$

welche für ($0 < a < 1$, b ungerade und ganz) an keiner Stelle eine Derivierte besitzt, wenn $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ist, dem sich bald viele andere anreihten.

5. Die vier Derivierten der Funktion eines stetigen Arguments. Die durch diese Untersuchungen bezeichnete Prüfung des allgemeinen Funktionsbegriffes hat dazu geführt, den Begriff der Derivierten erheblich zu *erweitern.* Die *unteren und oberen Limites* (II A 1, 7)[33]) des rechtsseitigen Differenzenquotienten der in der Nähe von $h = 0$ eindeutigen (und endlichen) aber nicht mehr notwendig stetigen Funktion y bezeichnet man als *vordere untere* und *vordere obere Derivierte* an der Stelle x;[34]) ähnlich ist der Begriff der *hinteren oberen und unteren Derivierten* zu fassen. Die vier Derivierten werden bei *Dini-Lüroth*[35]) mit Λ_x, λ_x; Λ_x', λ_x' bezeichnet; ausdrucksvoller erscheint die Bezeichnung von *Pasch*, für die sich doch wohl die *Scheeffer*'sche Schreibart der Dini'schen λ empfiehlt, so dass $D^+f(x)$, $D_+f(x)$; ($D^-f(x)$, $D_-f(x)$) die vorderen (hinteren) oberen und unteren Derivierten bezeichnen. Hat dann z. B. bei einer stetigen Funktion $D^+f(x)$ nur solche Unstetigkeiten, dass $\lim D^+f(x+\varepsilon)$ und $\lim D_+f(x-\varepsilon)$ an jeder Stelle für $\varepsilon = 0$ existieren, so gehen den nun geltenden Gleichungen

$$D^+f(x) = D_+f(x), \quad D^-f(x) = D_-f(x)$$

zufolge die vier Derivierten in die vordere und hintere über. Ist endlich *eine* derselben durchweg stetig, so fallen die drei anderen mit ihr zusammen und bilden die Derivierte im Sinne von **3.**[36])

31) In Vorlesungen seit 1861 (vgl. *H. A. Schwarz*, Ges. Abh. 2, p. 269); zuerst veröffentlicht von *P. du Bois-Reymond*, J. f. M. 79, p. 29 (1875); weitere Litteratur bei *Dini-Lüroth*, p. 204; *E. Pascal*, Esercizi p. 124—128.

32) J. f. Math. 90, p. 221 (1881) nebst der Entgegnung von *Weierstrass*, Funktionenlehre p. 100 (ges. W. 2, p. 228).

33) *Unbestimmtheitsgrenzen* bei *P. du Bois-Reymond*, Progr. Freiburg 1870; Münch. Abh. 12, p. 125 (1876); vgl. im übrigen I A 3, **15** u. II A 1, **7**.

34) Nach *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 52 (1884); im wesentlichen schon bei *U. Dini*, Fondamenti § 145 (1878). Vgl. *Dini-Lüroth*, Kap. 11 u. 12.

35) *Dini-Lüroth*, p. 261; *Scheeffer*, Acta math. 5, p. 281.

36) *Dini*, Fondamenti p. 196; *Dini-Lüroth*, p. 267, 270—273.

Will man — bei stetiger erster Derivierten — zu höheren übergehen, so bleiben diese Begriffe nicht mehr anwendbar; unentbehrlich sind sie namentlich in der Integralrechnung.

6. Die höheren Derivierten. Hat die Derivierte wieder eine Derivierte, so heisst diese die zweite Derivierte und wird durch

$$D^2 f(x),\ f''(x),\ \frac{d^2 y}{d x^2}$$

bezeichnet; man gelangt so zu dem Begriffe der n^{ten} Derivierten vermöge der formellen Beziehung

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f^n(x) = \frac{d}{d x}\left(\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}\right).$$

Die zweite Derivierte kann man auch durch den zweifachen Grenzprozess

$$\lim_{k=0}\ \lim_{h=0}\left\{\frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)}{hk}\right\}$$

definieren. An Stelle dieses nicht bequem brauchbaren Ausdrucks kann nicht allgemein der speziellere

$$\lim_{h=0}\left(\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}\right) h \cancel{= 0}$$

gesetzt werden. Denn dieser Ausdruck hat zur Grenze nur dann $f''(x)$, wenn $f''(x)$ *existiert*, und kann, wenn dies nicht zutrifft, selbst sehr wohl noch einen bestimmten Wert haben[37]). Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf die Definition der höheren Differentialquotienten:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \lim_{h=0}\left[f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) + \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^n f(x)\right] : h^n,$$

die man durch vollständige Induktion ableitet.

7. Der Mittelwertsatz nach Cauchy, Darboux und Weierstrass. *Der Fundamentalsatz oder Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Rolle-scher Satz*, Théorème des accroissements finis. Schon aus geometrischen Betrachtungen (Parallelismus der Tangente in einem Punkte des Kurvenbogens mit seiner Sehne) ergiebt sich der Satz:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'[a + \theta(b-a)]$$
$$0 < \theta < 1.$$

---

37) Vgl. *A. Harnack*, Math. Ann. 23, p. 260; desgl. *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 93, sowie *E. Pascal*, Esercizî p. 174.

Der Beweis setzt voraus, dass die für $a \leqq x \leqq b$ endliche und stetige Funktion $f(x)$ im Intervalle $a < x < b$ überall eine Derivierte besitzt, die auch an einzelnen Stellen bestimmt unendlich werden darf. Er wird nach *O. Bonnet*[38]) auf den speziellen Fall $f(b) - f(a) = 0$ zurückgeführt und ergiebt sich hier aus dem *Weierstrass*'schen Satze (II A 1, **9**, II), dass bei einer stetigen Funktion wenigstens eine bestimmte Stelle des Gebietes vorhanden ist, für die sie ihre obere oder untere Grenze wirklich annimmt.

So tritt der Satz an die Spitze der Differentialrechnung, während er bei *Lagrange* noch als spezieller Fall der *Taylor*'schen Entwickelung erscheint[39]).

Hieraus ergiebt sich nun: Eine in dem ganzen Intervalle endliche und stetige Funktion, die für $a < x < b$ eine Derivierte hat, muss, wenn sie nicht konstant ist, in jedem Teile desselben Stellen mit endlichen, von Null verschiedenen Derivierten enthalten. Und so folgen die auch für die Integralrechnung fundamentalen, von *Dini* und *Scheeffer* aufgestellten Sätze: Wenn die Derivierte entweder beständig oder mit Ausnahme einer abzählbaren Punktmenge (III A 5, **2**), wo über die Beschaffenheit derselben nichts feststeht, Null ist, so ist die Funktion im ganzen Intervalle konstant. Weiss man daher von zwei solchen stetigen und endlichen Funktionen, $f(x)$ und $F(x)$, dass ihre als endlich und bestimmt vorausgesetzten Derivierten im Intervalle bis auf eine abzählbare Menge übereinstimmen, so ist ihre Differenz

$$f(x) - F(x) = \text{const.}$$

Unter Benutzung des allgemeinen Begriffes der Derivierten kann man aber diesen Satz auf den Fall ausdehnen, wo an Stelle der Gleichheit der Derivierten schlechthin, die Gleichheit eines der vier Paare entsprechend bezeichneter Derivierten der Nr. **5** vorausgesetzt wird[40]).

Dagegen ist $f(b) > f(a)$, wenn unter den zuvor angegebenen Voraussetzungen die Derivierte im allgemeinen positiv, d. h. nicht immer Null ist.

---

38) *J. A. Serret,* Calcul diff. 1, p. 17 (1868); vgl. die Bemerkungen von *G. Peano* (Calcolo p. XIV) und die Litteratur daselbst. Nach **5** besteht der Satz auch dann, wenn $f(x)$ samt seiner vorderen Derivierten stetig ist; so schon bei *J. Thomae,* Einleitung p. 10 (1875), dann bei *A. Harnack,* Elemente p. 181. Man vergleiche übrigens den *Bonnet*'schen Beweis mit den älteren Darstellungen; bei *O. Schlömilch,* Handbuch der Diff. (1847) beruht derselbe auf einem eigentlich der Integralrechnung angehörigen Grenzübergange, auch wird θ der zu umfassenden Bedingung $0 \overline{\overline{<}} \theta \leqq 1$ unterworfen (daselbst p. 126).

39) Théorie des fonct. p. 67.

40) *L. Scheeffer,* Acta math. 5, p. 282. Der zur Begründung erforderliche Fundamentalsatz Scheeffer's daselbst p. 184 (1884).

Bei *Ampère*, dem es darauf ankam, den Rest der Taylor'schen Entwickelung in zwei bestimmte Grenzen einzuschliessen, findet sich dieser Satz in der Form, dass $[f(b) - f(a)] : (b - a)$ stets zwischen dem grössten und kleinsten Werte von $f'(x)$ (im Intervall a, b) liege[41]). Bei *Cauchy*[42]) tritt zuerst der *erweiterte Mittelwertsatz* für zwei mit ihren Derivierten stetige Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ auf in der Form:

$$B < \frac{F(b) - F(a)}{f(b) - f(a)} < A,$$

falls A und B die extremen Werte von $F'(x) : f'(x)$ im Intervalle sind; dann in der Form[43])

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{F'(x+\theta h)}{f'(x+\theta h)},$$

wobei jedoch vorauszusetzen ist, dass die Derivierte von $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x, x + h$ weder unendlich noch Null wird. Die Beweise dieser und ähnlicher Sätze[44]) führt man am bequemsten mit Hülfe der Relation[45])

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix} = 0,$$

die in einer allgemeineren Form den *Bonnet*'schen Satz ausdrückt.

Die unmittelbare Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf die *komplexe* Funktion $f(t)$ einer reellen Variablen t giebt nur eine weniger brauchbare Formel[46]). Man kann aber unter der Voraussetzung eines für $a \leqq t \leqq b$ stetigen $f(t)$ zeigen, dass der Punkt

$$l = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nicht ausserhalb irgend einer geschlossenen konvexen Linie liegen

41) *A. M. Ampère*, J. éc. polyt. 1806, p. 153. Der Ampère'sche Satz ist von *H. A. Schwarz* für ein System von n Funktionen verallgemeinert, Ann. di mat. (2) 10, 1880 = Ges. Abh. 2, p. 296. Eine andere Erweiterung bei *Dini-Lüroth*, p. 101.

42) Calc. différ. p. 33—34.

43) Ebenda p. 37 (desgl. *Moigno*, leçons sur le calcul différ. 1, X p. 33 [1840]), auch mit der Bemerkung, dass an den Endpunkten $x, x + h$ die Stetigkeit von $F'(x)$ nicht erforderlich sei.

44) Vgl. z. B. *B. J. Arez*, Teixeira Jorn. 11, p. 187 (1892).

45) *G. Peano*, Calcolo p. XIV. Der erweiterte Mittelwertsatz besteht demnach unter der Voraussetzung, dass die für a bis b stetigen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ zwischen a und b Derivierte besitzen und $f'(x)$ daselbst nirgends ∞ oder 0 wird.

46) Vgl. z. B. *P. Mansion*, Cours d'Analyse p. 97.

kann, welche die Kurve x, y, wo $x+yi=f(t)$, umschliesst[47]). Und für γ als obere Grenze von $|f'(t)|$ wird also $|l|<\gamma$; erreicht nun $|f'(t)|$ für $t=T$ den Wert γ, so folgt

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot\lambda\cdot f'(T),$$

wo $|\lambda|\leqq 1$. Hieraus ergiebt sich für die Funktion einer *komplexen* Variabeln z, die in allen Punkten der Kurve z_0z_1 von der Länge L mit ihrer Derivierten endlich und stetig ist,

$$|f(z_1)-f(z_0)|\overline{\overline{<}}\, gL,$$

wo g die obere Grenze von $|f'z|$; also insbesondere auch

$$f(z_1)-f(z_0)=\lambda(z_1-z_0)f'[z_0+\theta(z_1-z_0)]$$
$$0\leqq\theta\leqq 1,$$

wie *G. Darboux*[48]) schon früher durch eine geometrisch-phoronomische Betrachtung gefunden hatte.

Die Ausdehnung des Mittelwertsatzes auf *höhere* Differenzenquotienten (wohl zuerst durch *Riemann* eingeführt)[49]) wurde von *H. A. Schwarz*[50]) in dem Satze ausgesprochen: Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h=0}\left[\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\right]$$

der für $a\leqq x\leqq b$ stetigen Funktion $f(x)$ für jedes $a<x<b$ Null ist, so ist $f(x)$ eine lineare Funktion. Die Fortsetzung dieser Untersuchungen für höhere Differenzenquotienten ist von *A. Harnack* gegeben[51]).

Die Ausdehnung des Mittelwertsatzes[52]) auf Funktionen von mehr Variabeln möge vorgreifend gleich hier bemerkt werden. Aus der *Identität*

$$\begin{aligned}f(x_1+h_1, x_2+h_2)-f(x_1,x_2)&=f(x_1+h_1,\, x_2+h_2)-f(x_1+h_1,\, x_2)\\&\quad+f(x_1+h_1,\, x_2)-f(x_1,\, x_2)\\&=f(x_1+h_1,\, x_2+h_2)-f(x_1,\, x_2+h_2)+f(x_1,\, x_2+h_2)-f(x_1x_2)\end{aligned}$$

folgt

47) *O. Stolz,* Grundzüge 2, p. 69, wo der Satz *Weierstrass* zugeschrieben wird

48) J. de math. (3) 3, p. 291 (1876); dort eigentlich in der Form des erweiterten Satzes von *Cauchy*.

49) *B. Riemann* (1854), Werke p. 232.

50) J. f. Math. 72, p. 141 (1870) = Ges. Abh. 2, p. 341; Erweiterung bei *Dini-Lüroth,* p. 122.

51) *A. Harnack,* Math. Ann. 23, p. 244—284 (1883/84); vgl. auch die Ausdehnung des *Ampère*'schen Theorems für den zweiten Differenzenquotienten bei *O. Hölder* (Math. Ann. 24, p. 183 [1883/84]).

52) Eine andere Erweiterung nach *Darboux* bei *J. Tannery,* Introduction p. 394.

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = h_2 D_{x_2} f(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) + h_1 D_{x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2)$$
$$= h_1 D_{x_1} f(x_1 + \eta_1 h_1, x_2 + h_2) + h_2 D_{x_2} f(x_1, x_2 + \eta_2 h_2),$$

also unter Voraussetzung der Existenz der Derivierten nach $x_1 \ldots x_n$ für jeden Punkt des Gebietes $x_1 \ldots x_n$ die Darstellung des Zuwachses als eine Summe von mit den Zunahmen der unabhängigen Variabeln multiplizierten Derivierten; in der *unsymmetrischen Form* dieser vielgestaltigen Identitäten liegt der Grund des unsymmetrischen Charakters der Bedingungen, welche weiterhin (**10**) für das *totale Differential* sich ergeben.

8. Die Differentiale. Die *Differentiale*, deren sich *Leibniz* bediente, um die Differentialrechnung möglichst einfach zu begründen, erscheinen gegenwärtig in der eigentlichen Theorie als *überflüssig*[53]), wenn auch bei der hergebrachten Bezeichnung in der Integralrechnung und der Lehre von den Differentialgleichungen schwer zu entbehren und in den Anwendungen auf Geometrie und Mechanik in gleich einfacher Weise kaum durch eine andere Darstellung zu ersetzen. Nach *Cauchy*[54]) heisst in der Gleichung

$$\Delta(f(x)) = \Delta x f'(x) + R \Delta x,$$

alls R mit Δx gegen Null konvergiert, $f'(x)\Delta x$ das Differential von $f(x)$ und wird mit $df(x)$ bezeichnet; hiernach ist dann auch für Δx selbst dx zu schreiben, so dass

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

wird[55]), während der *Zuwachs* $\Delta f(x)$ durch die frühere Gleichung ausgedrückt bleibt. Ähnlich sind auch die Definitionen der höheren Differentiale $d^2(x)$ etc. aufzufassen.

Für die *Anwendungen* auf Geometrie und Mechanik bleibt es dagegen bequemer, dx, dy etc. als Bezeichnungen für die gegen Null konvergierenden Grössen Δx, Δy, ... anzusehen, dergestalt, dass die Gleichungen zwischen den Differentialen erst dann einen vollkommen richtigen Sinn erhalten, wenn man den entsprechenden Grenzübergang nach Division mit einem als Einheit gewählten Differential als

53) So schon *d'Alembert* in der Encyclopédie math. 1, p. 523; *A. Harnack*, Festschrift, Dresden 1887, p. 1; ähnlich auch *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 18. Ganz neuerdings *H. Poincaré*, rev. enseign. math. 1 (1899), p. 196.

54) *A. L. Cauchy*, Exerc. d'analyse et de phys. 3, p. 7—16 (1844) = oeuvr. (2) 8, p. 12 ff.; vgl. auch *Ch. Hermite*, Cours d'analyse, p. 65 (1873) u. *C. Jordan*, Cours 1, p. 62; *Du Bois-Reymond*, Allg. Funktionenth. p. 82, 128.

55) Daher wurde früher $f'(x)$ auch wohl Differentialkoeffizient genannt (*S. F. Lacroix*, traité 1, p. 147 [1810]; *Cauchy*, Calc. diff. p. 18).

ausgeführt ansieht, womit zugleich ihre Verhältnisse in die *Symbole* $\frac{dy}{dx}$ [56]) etc. wieder übergehen[57]).

Hierbei wird es nötig, die „Ordnung des Unendlichkleinwerdens" der Differentiale genau zu beachten, was schon *Leibniz*[58]) als einen wesentlichen Teil seines Algorithmus ansah; die strenge Festsetzung dieser Begriffe brach sich allgemein wohl erst mit *Cauchy* Bahn[59]); gute Vorarbeiten findet man schon bei *S. L'Huilier*[59a]).

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

9. Die partiellen Derivierten und das totale Differential. Bei einer Funktion der Variabeln $x, y, z, \ldots$

$$u = f(x, y, z \ldots)$$

kann man die *partiellen Differentialquotienten* und die *partiellen Differentiale* ohne weiteres definieren[60]). Die ersteren bezeichnete *Euler* durch[61])

---

56) Als *Symbol* bezeichnet schon *S. L'Huilier* (Princ. calc. diff. expositio p. 36 (Fussnote 59a) den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$; später *B. Bolzano* (1847) (die Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851, p. 67). Über die verschiedene Auffassung der „unendlich kleinen Grössen" vgl. die Zusammenstellung bei *P. Mansion*, Résumé du cours d'analyse, p. 212—224. Eine formale Theorie der unendlich kleinen Grössen, bei der die 4 Spezies für dieselben erklärt werden, stellte *O. Stolz* auf, Innsbr. Ber. 14, p. 21 (1884), Arithmetik 1, p. 205 (1885).

57) *P. du Bois-Reymond* missbilligt diese Vorstellung, Funktionenth. p. 141.

58) *Leibniz,* historia et origo calculi differentialis, ed. *Gerhardt* 9, 5, p. 394.

59) *Cauchy,* Analyse algébr. p. 27—34 (1821); Exerc. de math. 10, p. 145 (1826). Unter diesen Voraussetzungen ist noch immer *Leibniz'* Äusserung zutreffend: Quoniam tamen methodus directa *brevior et utilior ad inveniendum,* sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, ed. *Gerhardt,* 5, p. 322.

59a) *S. L'Huilier,* Principiorum calc. diff. et int. expositio, Tubingae 1795, praefatio p. II; Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (Berlin, Decker, 1786), insbes. p. 31 u. ff.

60) Hierbei ist zu beachten, dass unter $\frac{\partial f(xy)}{\partial x}$ für $y = b$ nicht zu verstehen ist

$$\lim_{y=b,\, h=0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

sondern

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h, b) - f(x, b)}{h}.$$

61) *Euler,* Calc. diff. p. 195. *Lacroix* schlug vor, einfacher $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \cdots$ zu schreiben (traité 1, p. 243, 1810), ein Gebrauch, der sich in Frankreich lange erhalten hat (so noch *Ch. Hermite,* Cours d'analyse 1873); gegenwärtig auch dort bei *A. Picard, C. Jordan, G. Darboux* u. a. die *Jacobi*'sche Schreibart.

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \quad \left(\frac{du}{dy}\right), \cdots \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right), \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right); \cdots$$

Lagrange bei *zwei* Variabeln durch[62])

$$u',\ u_1;\quad u'',\ u_1',\ u_{11};$$

Jacobi[63]) durch

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots;$$

die *Cauchy*'sche Bezeichnung[64]), bei der $d_x u$ als partielles Differential nach x, also $d_x u = D_x(u)\,dx$ und ähnlich $d_x d_y(u)$ geschrieben wird ist gegenwärtig wohl aufgegeben.

Wird nun das *totale* Differential als *Summe der Differentiale definiert*, so wird die Frage nach dem Zusammenhang des Zuwachses von u mit den partiellen Differentialen durch den *Satz vom totalen Differential* beantwortet. Aus dem Mittelwertsatze Nr. 7 folgt nämlich, falls sämtliche erste partielle Derivierte *stetige* Funktionen in $x, y, \ldots$ sind:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \cdots$$
$$+ R_1 \Delta x + R_2 \Delta y + R_3 \Delta z + \cdots,$$

wo jedes R_i mit $\Delta x, \Delta y \ldots$ gegen Null konvergiert, so dass das totale Differential bis auf Glieder höherer als erster Ordnung die Änderung von u darstellt. Eine genauere Prüfung der beim Beweise erforderlichen Voraussetzungen insbesondere für *zwei* Variabele zeigt, dass der Satz schon dann gilt, wenn $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ an der Stelle x, y existieren und *eine* dieser Funktionen in der Umgebung derselben in beiden Variabeln stetig ist[65]). Analoge Sätze lassen sich auch für mehr Variable und höhere Differentiale aufstellen, scheinen aber bisher nur selten besonders formuliert zu sein[66]).

Endlich folgt die *Hauptregel des Differentiierens*[67]):

$$du = \sum_i \sum_k \frac{\partial u}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_k} dx_k,$$

---

62) *Lagrange,* oeuvres 9, p. 144.

63) *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 22 = Werke 3, p. 395, 396; auch 4, p. 145 = J. f. Math. 23. Nach *P. Stäckel* ist der *Jacobi*'sche Vorschlag schon 1786 von *A. M. Legendre* gemacht (*Ostwald,* Klassikerbibliothek Nr. 78, p. 65 (1896).

64) *Cauchy,* Exercices d'analyse 3, p. 16 (1844).

65) *J. Thomae,* Einleitung p. 37; vgl. auch *O. Hölder,* Diss., Stuttgart 1882, p. 69.

66) Sie finden sich bei *R. Bettazzi*, Giorn. di mat. 22, p. 133 (1884).

67) *P. du Bois-Reymond*, Funktionentheorie p. 136; *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 136.

falls u eine Funktion der Variabeln $y_1 \dots y_m$, deren jede von $x_1 \dots x_n$ abhängt, unter der jedenfalls hinreichenden Voraussetzung der Stetigkeit sämtlicher (ersten) Differentialquotienten, durch welche der Algorithmus der formalen Differentialrechnung zum Abschluss gelangt. Die Differentiation der *impliciten Funktionen* pflegte man früher auf dieselbe zu begründen, doch zeigt diese Darstellung nur[68]), wie unter Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der Derivierten dieselbe gefunden werden kann, während die eigentliche Frage darin besteht, zu präzisieren, wann durch eine Gleichung von der Form

$$f(x_1 x_2 \dots x_n, y) = 0$$

y als stetige Funktion der x_i so definiert wird, dass $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ existiert. Bei der gegenwärtigen Ausbildung der funktionentheoretischen Grundlagen hat dies keine Schwierigkeit[69]). So folgt der *Fundamentalsatz:* Ist $f(x, y)$ nebst seinen beiden ersten Derivierten nach x, y in der Nähe der Stelle x_0, y_0, für die $f(x_0, y_0) = 0$, stetig, und $\frac{\partial f}{\partial y}$ daselbst nicht Null, so *existiert* in der Nähe von x_0, y_0 eine einzige stetige Funktion $y = \varphi(x)$, welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ identisch befriedigt, für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt und eine Derivierte nach x besitzt. Letztere kann *nunmehr* nach der Hauptregel durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d y}{d x} = 0$$

gefunden werden.

Alsdann erhält man durch den Schluss von n auf $n + 1$ [69a]) das allgemeine *Theorem über die Existenz der durch die Gleichungen*

$$f_1(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0 \dots f_m(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m) = 0$$

definierten Funktionen $y_1 \dots y_m$:

In der Nähe der Stelle $x_i^0, y_k^0, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m$, für die jene Gleichungen erfüllt sind, existiert ein einziges System von in $x_1, \dots x_n$ stetigen Funktionen $y_1, \dots y_m$, welche jene Gleichungen befriedigen und erste Derivierte nach $x_1, \dots x_n$ besitzen, falls die ersten Derivierten der f nach den x und y in der Nähe dieser Stelle stetig sind, und die *Funktionaldeterminante* (**41**) der f nach den y daselbst nicht Null ist; man erhält diese Derivierten aus den Gleichungen

---

68) Ausdrücklich hervorgehoben z. B. bei *O. Stolz,* Grundz. p. 168.

69) Vgl. *Genocchi-Peano,* Calcolo p. 149—151; *U. Dini,* *Analisi 1, p. 163 (1878), sowie *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 162.

69a) So ausführlich bei *Genocchi-Peano,* p. 153 ff.; mit Hülfe der Integralrechnung bei *R. Lipschitz,* Analysis 2, p. 598.

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_i} = 0$$

$$k = 1, \ldots m; \quad i = 1, \ldots n.$$

Für die sog. *Ausdrücke von unbestimmter Form* $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ etc. vgl. man II A 1, **13.**[70])

10. Die höheren partiellen Derivierten. Bei den rationalen Funktionen überzeugt man sich leicht davon, dass der Wert der höheren partiellen Derivierten unabhängig ist von der Reihenfolge der Differentiation. Die Untersuchung der allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes kommt auf die des *Fundamentalsatzes der zweiten partiellen Derivierten*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

zurück. Noch *Cauchy* begründete denselben durch die *Euler*'sche Überlegung[71]), dass $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x \Delta y}$ der formalen Darstellung nach eine in Δx und Δy symmetrische Funktion ist, ohne den hierbei erforderlichen doppelten Grenzübergang besonders zu untersuchen[72]). Es lassen sich aber leicht Beispiele angeben, in denen der Satz nicht zutrifft[73]). *H. A. Schwarz* stellte zunächst fest, dass derselbe einwurfsfrei begründet werden kann, wenn die vier zweiten Derivierten nach x und y stetige Funktionen von x, y sind, und zeigte sodann, dass schon die Stetigkeit *einer* zweiten Derivierten nach x und y in diesen beiden Variabeln hinreichend ist, wenn zugleich die beiden ersten Derivierten auch in x und y stetig sind[74]).

Nach *Thomae* genügt es jedoch schon, wenn $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ stetige Funktionen von x und y sind[75]); noch umfassendere Bedingungen hat *Dini*[76]) angegeben.

---

70) *J. Tannery,* Introduction p. 250—267, sowie die Beispiele bei *E. Pascal,* Esercizi p. 233—248.

71) Calc. diff. p. 192; ähnlich auch bei *O. Schlömilch,* Handbuch 1, p. 126.

72) Calcul differ. p. 220; Exercices d'analyse 3, p. 33 (1844).

73) Vgl. z. B. *H. A. Schwarz,* Schweiz. Verhandl. 1873, p. 259 = Ges. Abh. , p. 280; *Genocchi-Peano,* Calcolo p. 174; über die ältere Litteratur des Satzes siehe *H. A. Schwarz,* a. a. O. p. 275.

74) *Schwarz,* a. a. O. p. 284; der von *H. Blanchet,* J. de math. 6, p. 65 (1841) für den Satz gegebene Beweis kann wohl nicht als völlig streng angesehen werden.

75) *J. Thomae,* Einleitung p. 22 (1875). Vgl. *G. Peano,* *Mathesis 10, . 153 (1890).

76) *U. Dini,* *Analisi infinitesimale 1, p. 122 (1878). Man vgl. die zusammenfassende Darstellung bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 146ff., wo auch die formale Erweiterung auf höhere Derivierte, p. 151—155.

Bei der Erweiterung dieser Betrachtungen auf höhere Derivierte versteht man unter der *Ordnung* derselben die Gesamtzahl aller auszuführenden Differentiationen. Geschehen diese nur nach *einer* Variabeln, so erhält man die *reinen* Differentialquotienten; alle übrigen werden als *gemischte* bezeichnet. Auch hier besteht der Satz von der Unabhängigkeit des Wertes von der Reihenfolge der Operationen unter analogen Voraussetzungen wie vorhin. Erst vermöge desselben erhält das Symbol

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \quad (m = i_1 + i_2 + \cdots i_n)$$

einen bestimmten Sinn; zugleich ergeben sich nun auch die entsprechenden Bemerkungen für die Existenz der höheren Differentiale[77]).

Man findet nun auch die *höheren Derivierten des Funktionensystems* $y_1 \ldots y_m$ bei **9**. Unter Voraussetzung der Stetigkeit sämtlicher zweiter Differentialq. der f nach den x und y existieren auch die zweiten Derivierten der y nach den x; man erhält die $\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \partial x_j}$ aus den m Gleichungen, die für $k = 1, \ldots m$ aus der Schlussgleichung von **9** durch Differentiation nach x_j hervorgehen, u. s. w.

III. Anwendungen.

11. Die Taylor'sche Entwickelung für Funktionen einer Variabeln. Der *Taylor*'sche Satz, ursprünglich von *B. Taylor* durch die Methode der endlichen Incremente gefunden[78]), erscheint erst nach der Mitte des 18. Jahrhunderts als eines der Fundamentaltheoreme der Differentialrechnung[79]).

77) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 155—160.

78) *Brook Taylor,* *Methodus incrementorum 1717, p. 21—23 (vgl. indess *Joh. Bernoulli*'s berechtigte Priorität von 1694, Opera omn. 1, p. 125); ähnlich ist auch die Herleitung bei *L. Euler* (Calc. diff. p. 333) und *J. L. Lagrange* (Berl. Nouv. mém. [1772] = Oeuvr. 3, p. 445), aber dort auf n Variable erweitert, und in die symbolische Form

$$\Delta u = e^{\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \cdots} - 1$$

gebracht, vgl. *P. S. Laplace* (Par. Mem. 1770 [80], p. 105); ähnlich auch bei *F. Lacroix* (traité 3, p. 60 [1819]).

79) Die Bezeichnung Theorema Taylorianum wird auf *S. L'Huilier* zurückgeführt. Indess sagt derselbe in der Exposition élémentaire (1786), p. 47 nur „le beau Théorème que Taylor a le premier developpé . . .“; in dem Princ. Calc. diff. (1795) Cap. III, p. 48 heisst es „Theorema quod Taylorianum dicitur“, woraus eher zu folgen scheint, dass die Bezeichnung schon damals in Gebrauch gewesen.

Die *Taylor'sche Entwickelung* (der *verallgemeinerte Mittelwertsatz*)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + R_n$$

ist von der *Taylor'schen Reihe* zu unterscheiden. Zur Bestimmung des *Restgliedes* R_n sind die verschiedensten Methoden angewandt worden; eine der ältesten ist wohl die von *d'Alembert*[80]), der wenigstens formal den Rest durch ein n-faches Integral ausdrückte. *Laplace* ermittelte denselben durch die Methode der partiellen Integration[81]); *Lagrange*'s Restformel[82]) in der Théorie des fonctions beruht ebenfalls auf einer Integration. Erst bei *Ampère*[83]) und *Cauchy*[84]) erscheint der Satz als eine Folge der *Mittelwertsätze.*

In einer verhältnissmässig sehr allgemeinen Form hat so *O. Schlömilch* zuerst den Rest bestimmt[85]). Ist nämlich $f(x)$ eine mit den $n-1^{\text{ten}}$ Derivierten im Intervalle x bis $x+h$ stetige Funktion und existiert die n^{te} Derivierte innerhalb desselben ebenfalls, so ist für $a = x + h$

$$\varphi(k) = f(a-k) + \frac{k}{1} f'(a-k) + \frac{k^2}{2!} f''(a-k) + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a-k)$$

eine von $k=0$ bis $k=h$ stetige Funktion, für die $\varphi(0) = f(a)$ und

$$\varphi'(k) = -\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a-k)$$

wird, und auf die der erweiterte *Cauchy*'sche Mittelwertsatz (7)

$$\varphi(k) = \varphi(0) + \frac{\psi(k) - \psi(0)}{\psi'(\theta k)} \varphi'(\theta k)$$

80) *J. d'Alembert,* Recherches sur différents points importants du système du monde 1, p. 50 (nach *Lacroix,* traité 3, p. 396).

81) *P. S. Laplace,* Théorie analytique des probabilités (1812) = oeuvres 7, p. 193.

82) Théorie des fonctions 1813, éd. 2 (éd. 1, 1797), p. 67: d'où resulte ce théorème nouveau remarquable par sa simplicité et généralité . . .

83) *Ampère* begründet so das *Lagrange*'sche Resultat in den Leçons sur le calcul des fonct. (J. Éc. polyt. cah. 12 [1805]); ib. cah. 13 (1806) werden für den Rest die beiden Grenzen $M\frac{h^n}{(n+1)!}$ und $N\frac{h^n}{(n+1)!}$ gefunden mit M und N als den extremen Werten von $f^{(n+1)}x$ im Intervalle $x, x+h$.

84) So im Calcul différ. (1829), wo die *Lagrange*'sche und die *Cauchy*'sche Restformel p. 75 gegeben werden (auch schon früher in den Exercices de math. 1, p. 27, 28 [1826]).

85) *O. Schlömilch,* Handbuch 1, p. 177; J. de math. (2) 3, p. 384 (1858); daselbst auch p. 121 die unabhängig von Schlömilch gefundene Formel von *E. Roche* aus den Mém. de l'Acad. de Montpellier (1858). Noch allgemeiner ist die Formel von *É. Roche* ib. 1863.

angewendet werden kann, falls die sonst willkürliche, von 0 bis h endliche und stetige Funktion $\psi(x)$ eine für keinen Wert zwischen 0 und h verschwindende oder unendlich grosse Derivierte hat. Hieraus folgt, wenn man $a = x + h$, $k = h$ setzt,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + R_n$$

$$R_n = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{\psi'(1-\theta')h} \frac{h^{n-1}(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a + \theta' h),$$

und für die jedenfalls gestattete Annahme $\psi(x) = x^p$

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^n(x + \theta h)$$

sowie für $p = n$, $p = 1$

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x + \theta h)$$

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x + \theta h)$$

als *Schlömilch*'sche, *Lagrange*'sche und *Cauchy*'sche Form des Restes, wobei θ jedesmal seinen besonderen Wert (> 0, < 1) hat. Die n^{te} Derivierte von $f(x)$ braucht innerhalb x, $x + h$ nicht durchweg endlich zu sein; ebenso ist nicht nötig, dass $f^n(x)$ an den Grenzen des Intervalles existiert[86]); das allgemeinere Theorem, dass die Existenz von $f'(x) \ldots f^{n-1}(x)$ an der Stelle $x + h$ nicht erforderlich ist, findet sich bei *O. Stolz* vermöge einer von *É. Roche* gegebenen Formel bewiesen[87]). — Von den auf der Integralrechnung beruhenden Ableitungen des Satzes mag hier ausser der oben erwähnten auf der Methode der partiellen Integration fussenden von *Laplace*, welche neuerdings durch *L. Kronecker*[88]) eine formal elegante Darstellung erhalten hat, noch die von *C. Jordan*[89]) erwähnt werden; sie führen zu der Integralform des Restes

$$R_n = \int_x^{x+h} dt \cdot \frac{f^n(t)(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

86) Vgl. *J. Tannery,* Fonctions d'une variable, p. 246.

87) *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 97—100.

88) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1884, p. 841—862.

89) *C. Jordan,* Cours 1, p. 245. Bei diesen Ableitungen ist jedoch die Stetigkeit der n^{ten} Ableitung vorauszusetzen, falls man nicht in eine genauere Erörterung der Integraloperationen eintreten will. Hinsichtlich der Interpretation der Taylor'schen Entwickelung vgl. man auch: *J. Plücker,* mechan. Deutung d. T. Satzes, Diss. Marburg, 1823 = Werke 1, p. 41; *A. Möbius,* Leipz. Ber. 1844 = Werke 4, p. 627.

die den formalen Vorzug besitzt, von einer unbestimmten Grösse θ frei zu sein.

12. Ausdehnung auf mehrere Variable. Ist $f(x, y)$ eine Funktion, welche sämtliche partielle Derivierte n^{ter} Ordnung besitzt, so kann man durch zweimalige Anwendung der *Taylor*'schen Entwickelung nach *Lagrange*[90]) für $y + h$, $x + k$ eine analoge erhalten, bei der indessen der Rest eine unbequeme Form annimmt[91]). Eine übersichtlichere Formel erhält man nach *Cauchy*[92]), wenn man vermöge der Substitution $h = th_1$, $k = tk_1$ die auf die Funktion *einer* Variabeln t zurückgeführte Funktion $f(x, y)$ im Intervall 0 bis t entwickelt. So entsteht

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \cdots + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!}\left[h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x + \theta h, y + \theta k) + \cdots\right];$$

doch muss man jetzt die Stetigkeit der $n + 1$ n^{ten} Differentialquotienten in x, y voraussetzen[93]). Die einzelnen Koeffizienten lassen sich durch die symbolische Bezeichnung

$$\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f$$

darstellen; die Erweiterung auf n Variable erhellt hieraus von selbst.

13. Verallgemeinerungen. Vermöge der *Darboux*'schen Erweiterung des Mittelwertsatzes ergiebt sich die Taylor'sche Entwickelung für Funktionen einer komplexen Variabeln, wobei dem *Lagrange*'schen Rest nur ein Faktor hinzuzufügen ist, dessen Betrag $\overline{\gtrless} 1$ ist[94]).

Eine andere Erweiterung der Taylor'schen Entwickelung entsteht durch die Betrachtung der *Ampère'schen Interpolationsfunktionen*[95]) $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$. Man erhält so die Formel[96])

---

90) Théorie des fonctions p. 134.

91) Die vollständige Ausführung bei *O. Stolz*, p. 143.

92) Calc. différ. p. 244 (1829); kurz zuvor war durch *A. M. Ampère* (Gerg. Ann. 17, p. 317 [1827]) die Taylor'sche Entwickelung mit Hülfe des Mittelwertsatzes in eben dieser Form für n Variable allgemein aufgestellt.

93) *Peano*, Calcolo p. 145 (p. XXV); desgl. *O. Stolz*, Grundzüge 1, p. 161.

94) *Darboux*, J. de math. (2) 3, p. 294 (1876); *P. Mansion*, Brux. S. sc. 9. B (1885/86), p. 37; die genaueren Voraussetzungen bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 93.

95) Siehe die Litteratur bei *G. Peano*, Calcolo p. XXI.

96) Vgl. *Hermite*, J. f. Math. 84, p. 70, 79; *R. Lipschitz*, Par. C. R. 96, p. 119 (1878).

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1 x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x_1 x_2 x_3)$$
$$+ \cdots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{n!} f^n(\xi),$$

wo ξ ein Mittelwert von $x_1, \ldots x_n, x$ ist, falls $f(x)$ eine Derivierte n^{ter} Ordnung in diesem Intervalle besitzt. In dieser Formel ist als spezieller Fall die von *Crelle*[97]) betrachtete Verallgemeinerung der Taylor'schen Entwickelung enthalten (vgl. I E). Der Mittelwertsatz ist überhaupt von fundamentaler Bedeutung für alle Restbestimmungen, so z. B. auch bei dem Rest der *Lagrange*'schen Reihe[98]) (in Integralform bei *Popoff*[99])), sowie bei einer exakten Begründung der weitreichenden formalen Entwickelungen *H. Wronski*'s[100]). Aber die steigende Komplikation dieser Restausdrücke selbst vermindert ihre Anwendungsfähigkeit, wie schon die Theorie der Lagrange'schen Reihe gezeigt hat, und damit auch das Interesse an denselben. — Weitere Verallgemeinerungen der Taylor'schen Entwickelung in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln II B 1.

14. Die Taylor'sche Reihe. Die *Taylor'sche Reihe* geht aus der *Taylor*'schen Entwickelung hervor, wenn sämtliche $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n endliche bestimmte (wenn auch nicht beständig unter einer festen Grenze liegende) Werte haben (Voraussetzung V_1), und zugleich das Restglied R_n mit wachsendem n gegen Null konvergiert (Voraussetzung V_2). Denn alsdann wird

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \cdots \text{ in inf.}$$ [101])

Da der Inhalt von V_2 wegen der völlig unbekannten Grösse θ nicht unmittelbar beurteilt werden kann, haben sich bis in die neuere Zeit über die *Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe* unrichtige Vorstellungen erhalten. Abgesehen davon, dass *Lagrange* die Voraussetzung V_1 als

97) *A. L. Crelle,* J. f. Math. 22, p. 249 (1839); es ist dies die durch den Rest ergänzte ursprüngliche Formel *Taylor*'s; andere Beweise bei *J. Caqué* (J. de math. 10, p. 379 [1845]); *O. Schlömilch* (Zeitschr. Math. Phys. 2, p. 269 [1857], 25, p. 48 [1880]).

98) Vgl. z. B. *Glashan,* Amer. J. 4, p. 282 (1881).

99) *A. Popoff,* Par. C. R. 53, p. 798 (1861).

100) Exposé des méthodes générales de *H. Wronski,* par *A. Leauté* (J. de math. (3) 7, p. 185 (1881) u. flgde. Bde. Vgl. auch *E. Marchand,* Sur le changement des variables, Ann. éc. norm. 3, p. 137, 343 (1886), sowie über *Wronski's* Arbeiten im allg. die Encyclopédie math. par *A. de Montferrier* 3, p. 401.

101) Der Fall $x = 0$ giebt die nach *Colin Maclaurin* (*Treatise on fluxions, § 828, Edinburg 1742) unnötiger Weise besonders benannte Reihe *J. Stirling*'s (1717).

hinreichend ansah, wurde auch die Ansicht desselben, dass die Reihe, wenn sie konvergiere, notwendig auch den Wert $f(x+h)$ darstelle[102], erst spät in Zweifel gezogen, obwohl bereits *Cauchy*[103] darauf aufmerksam machte, dass für $e^{-\frac{1}{x^2}}$ in der Nähe von $x=0$ die Reihe den Wert Null besitzt, also nicht die Funktion darstellt, und andererseits die prinzipielle Art, in der *P. L. Dirichlet* die analoge Frage bei den trigonometrischen Reihen untersucht hatte, sowie die Möglichkeit, dass bei konvergenter Reihe der Rest nicht verschwindet, zur Vorsicht hätte mahnen können.

Erst *Du Bois-Reymond* suchte *analytisch* vollständig definierte Funktionen zu konstruieren, für die trotz V_1 die Reihe divergiert[104]; in völlig strenger Weise aber hat *A. Pringsheim* die Existenz von Funktionen nachgewiesen, bei denen trotz V_1 die Reihe *divergiert*[105], oder *konvergiert*, aber zur Summe nicht die erzeugende Funktion der Derivierten hat[106], oder bei denen nur eine *einseitige Entwickelbarkeit* an einer Stelle besteht[107]. Und während *Du Bois-Reymond* noch 1876 den Ausspruch that: „Von den notwendigen Bedingungen für die Taylor'sche Entwickelung, falls dergleichen existieren, haben wir nicht die geringste Vorstellung"[108], konnte *A. Pringsheim*[109] 1893 den folgenden Satz aussprechen:

Damit die für $0 \leqq h < R$ eindeutige Funktion $f(x+h)$ daselbst darstellbar sei durch die Taylor'sche Reihe

$$f(a+h) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n$$

ist notwendig und hinreichend,

---

102) Théorie des fonctions chap. 5, § 30 = oeuvr. 9, p. 65; Calcul des fonct. leçon 3 = oeuvr. 10, p. 72.

103) *Cauchy,* Calc. diff. p. 105; über das Cauchy'sche Beispiel vgl. *A. Pringsheim,* Math. Ann. 44, p. 51.

104) *P. du Bois-Reymond,* Math. Ann. 21, p. 119 (1876).

105) *A. Pringsheim,* Math. Ann. 42, p. 159 (1893) [auch Münch. Ber. p. 211 (1892]).

106) Ebenda p. 161, 165.

107) *Pringsheim,* Math. Ann. 44, p. 54 (1894); vgl. auch Chicago Congr. Pp. p. 295 (1893). Aus einer im Nachlass von *Ch. Cellérier* vorgefundenen Note (Bull. Darb. 14, p. 142 [1890]) geht hervor, dass C. sich vielleicht schon vor 1885 mit diesen Fragen beschäftigt hat.

108) Math. Ann. 21, p. 109 (Münch. Abh. Nov. 1876). Notwendig und hinreichend ist freilich neben V_1 das Verschwinden des Integralrestes, aber man kann daraus nicht auf bestimmte Eigenschaften der vorgelegten Funktion schliessen. Vgl. *Pringsheim,* Math. Ann. 44, p. 60.

109) Math. Ann. 44, p. 57—82 (August u. Dezember 1893); vgl. auch *Pascal,* Esercizi p. 196—207.

1) dass $f(x)$ für $a \overline{\overline{<}} x < a + R$ endlich sei und für $x = a$ rechtsseitige, für $a < x < a + R$ vollständige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;

2) dass für irgend einen positiven oder negativen ganzzahligen Wert p (incl. $p = 0$) der Ausdruck

$$\lim \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(a+h) k^n$$

gleichmässig gegen Null konvergiere für alle h, k des Gebietes

$$0 \leqq h \leqq h + k \leqq r < R,$$ [110])

oder auch, dass das *Cauchy*'sche Restglied für jeden einzelnen den Bedingungen $0 \leqq h \leqq r < R$ genügenden Wert h und alle θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ mit n gleichmässig verschwinde[111]), während dieselbe Forderung für den *Lagrange*'schen Rest eine unnötige Beschränkung enthalten würde[112]).

15. Analytische Funktionen einer reellen Variabeln. Demgemäss bilden nun die *analytischen Funktionen einer reellen Variabeln* eine besondere Klasse K_0 innerhalb der Klasse K der unbeschränkt differentiierbaren Funktionen einer reellen Variabeln[113]). Während die Funktion eines komplexen Argumentes innerhalb eines Kreises dann schon analytisch ist, wenn sie daselbst eindeutig, endlich und stetig und monogen (d. h. im komplexen Sinne gleichmässig differentiierbar) ist[114]), wird für die Funktionen einer reellen Veränderlichen ausser der Forderung unbeschränkter Differentiierbarkeit noch erforderlich das Vorhandensein gewisser Eigenschaften des Unendlichwerdens von $f^n(x)$ für $n = \infty$.

Hierdurch ist zugleich die prinzipiell verschiedene Bedeutung bezeichnet, die die Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments gegenüber der Lehre von den Potenzreihen einer reellen Variabeln einnimmt.

Die Untersuchung der nicht K_0, sondern nur K angehörigen Funktionen ist durch *É. Borel* neuerdings in Angriff genommen[115]).

16. Maximum und Minimum einer Funktion. Unter dem *absoluten Maximum oder Minimum* (*Extremum*[116])) einer Funktion in

110) a. a. O. p. 68. 111) p. 73. 112) p. 76.

113) p. 79. Vgl. II A 1, **12**.

114) Über den prinzipiellen Unterschied in der Tragweite dieser Bedingung und derjenigen der unbeschränkten Differentiierbarkeit (im reellen Sinne) vgl. *Pringsheim*, a. a. O. p. 58.

115) Vgl. II A 1, Fussn. 124.

116) *R. Baltzer*, Elem. d. Math. 5. Aufl. 1, p. 217; *P. du Bois-Reymond*, Math. Ann. 15, p. 564 (1879).

einem gewissen Gebiete möge hier ihre *obere* oder *untere* Grenze, falls sie dieselbe *erreicht*, verstanden werden. Zur Bestimmung derselben lassen sich nur allgemeine arithmetische Vorschriften anwenden. In den meisten Fällen handelt es sich dagegen um die *relativen Extreme*, d. h. um die Frage, wann an einer bestimmten Stelle ein absolutes Extremum in Bezug auf einen dieselbe *umgebenden* beliebig kleinen Bereich vorhanden ist, um ein „extremum inter propinquos" nach *Du Bois-Reymond*'s Bezeichnung[117]).

Für eine Funktion der n unabhängigen Variabeln $x_1, \dots x_n$ entsteht so als *Forderung eines relativen Minimums*

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \cdots x_n + h_n) - f(x_1, \cdots x_n) > 0$$

für *alle* $|h_i| < \varepsilon$, mit Ausnahme von $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$. Werden unter den $x_1 \dots x_n$ noch gewisse Bedingungen festgesetzt, so entstehen die *Extreme mit Nebenbedingungen* (*bedingte Extreme*). Von *O. Stolz*[118]) werden noch *eigentliche* und *uneigentliche* Extreme unterschieden; die letzteren finden statt, wenn in der obigen Ungleichung neben dem Zeichen $>$ für gewisse h_i beständig auch das Zeichen $=$ vorkommt; als Beispiel kann die beständig positive Funktion

$$f(x) = \left(x \sin \frac{a}{x}\right)^2$$

in der Umgebung von $x = 0$ dienen.

Bei der *Untersuchung der Extreme mittelst der Differentialrechnung* setzt man meistens die Existenz vollständiger Derivierten in dem ganzen Umfange, in dem diese gebraucht werden, *voraus*. Solche Extreme kann man *gewöhnliche* nennen[119]); von ihnen ist im folgenden fast ausschliesslich die Rede, obwohl die *aussergewöhnlichen* Extreme (z. B. bei einseitigen ersten Derivierten, nicht vorhandenen zweiten Derivierten etc.) häufig genug in den Anwendungen auftreten[120]).

---

117) *Du Bois-Reymond* ebenda p. 565. Die Terminologie in der Lehre der Maxima und Minima ist eine sehr schwankende. Am verbreitetsten ist wohl der Gebrauch, die relativen Extreme des Textes absolute oder Extreme schlechthin, die bedingten relative zu nennen, so z. B. *R. Lipschitz* (Analysis 2, p. 306); *A. Mayer*, Leipz. Ber. p. 122 (1889); *O. Stolz*, Grundz. 1, p. 200. Dagegen heissen nach *G. Peano* (Calcolo diff. p. 191) die absoluten Maxima des Textes relative und umgekehrt; *C. Jordan* (Cours 1, p. 22) setzt obere Grenze und Maximum als gleichbedeutend. Den *relativen Charakter* der Extreme in der Differentialrechnung hat schon *J. d'Alembert* betont (Encyclopédie math. 2, p. 367 [éd. 1784]).

118) Grundzüge p. 200, 211.

119) *A. Mayer*, Leipz. Ber. 33, p. 28 (1881) gebraucht diesen Ausdruck in einem etwas anderen Sinne.

120) Über derartige Fälle vgl. man z. B. *E. Pascal*, Esercizi p. 215—222 (1895).

17. Extreme der Funktionen einer Variabeln. Bei Funktionen *einer* Variabeln folgt aus dem Fundamentalsatze der Differentialrechnung (7) sofort, dass wenn eine Derivierte vorhanden ist, dieselbe notwendig verschwinden muss, wenn an der betreffenden Stelle ein relatives Extremum stattfinden soll, und dass bei einseitigen Derivierten dieselben nicht von gleichem Vorzeichen sein können[121]).

Ist nun $f'(x_0) = 0$ und $f'(x)$ im Intervalle $x_0 \pm h$ so beschaffen, dass es an der Stelle x_0 von positiven zu negativen Werten übergeht, so ist $f(x)$ daselbst ein Maximum. Diese Regel[122]), welche die Existenz des Extremums auch dann zu entscheiden gestattet, wenn $f'(x_0)$ nicht vorhanden sein sollte[123]), verwandelt sich, wenn $f''(x_0)$ existiert, in die Bedingung, dass das Maximum (Minimum) dem Falle $f''(x_0) < 0 \; (> 0)$ entspricht. Verschwinden dagegen mit $f(x_0)$ auch noch

$$f''(x_0), \ldots f^{n-1}(x_0),$$

während $f^n(x_0) \neq 0$ ist, so ist sicher bei ungeradem n kein Extremum vorhanden, während bei geradem n das Maximum (Minimum) dem negativen (positiven) Vorzeichen von $f^n(x_0)$ entspricht[123a]); dies Kriterium versagt nur dann, wenn für x_0 alle Derivierten Null sind[124]).

18. Extreme bei mehreren unabhängigen Variabeln. Auch bei Funktionen von *mehr* Variabeln ist für die Existenz eines gewöhnlichen Extremums notwendig das Verschwinden der sämtlichen ersten Derivierten[125]). Aber erst *Lagrange*[126]) lehrte zunächst bei zwei Variabeln, dann allgemein, vermöge der Transformation der Glieder zweiter Ordnung in der *Taylor*'schen Entwickelung

$$f(x_1 + \xi_1, \cdots x_n + \xi_n) = f(x_1, \cdots x_n) + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \xi_i \xi_k + \cdots$$

auf eine Summe von Quadraten, den Fall des Maximums von dem des Minimums unterscheiden, und auch der *Cauchy*'sche Satz[127]), dass, unter Voraussetzung der Entwickelung

$$f(x_1 + \xi_1, \cdots x_n + \xi_n) = f(x_1, \cdots x_n) + (f_2) + (f_3) + \cdots + (f_n) + R_{n+1},$$

121) *O. Stolz,* Grundzüge 1, p. 200.

122) *Cauchy,* Calc. différ. p. 63.

123) Ein derartiges Beispiel bei *A. Harnack,* Math. Ann. 23, p. 261.

123a) Diese Regel nach *Lagrange,* Misc. Taur. 1 = oeuvr. 1, p. 4 schon bei *Maclaurin.*

124) *L. Scheeffer,* Leipz. Ber. (1886) = Math. Ann. 35, p. 542. Für den Fall einseitiger n^{ter} Differentialquotienten ist das Kriterium erweitert bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 207.

125) Für zwei Variable bei *L. Euler,* Calc. diff. p. 648.

126) Misc. Taur. 1 (1759) = oeuvr. 1, p. 1—20, insbes. p. 7; Th. des fonct. p. 263.

127) Calc. différ. p. 234.

in der (f_i) das Glied i^{ter} Dimension in ξ_i, R_{n+1} den Rest bedeutet, für den Fall des Verschwindens sämtlicher

$$(f_2), (f_3), \ldots (f_{n-1})$$

bei geradem n und definitem Charakter von (f_n) mit Sicherheit auf ein Extremum zu schliessen ist, dagegen bei ungeradem n ein solches nicht stattfindet, findet sich schon bei *Lagrange*[128]).

19. Der semidefinite Fall nach Peano und Scheeffer. Den wahrscheinlich bei Untersuchungen über krumme Flächen schon früher bemerkten Fall, wo die quadratische Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\xi_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\xi_1\xi_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\xi_2^2$$

semidefinit ist[129]), d. h. für gewisse Werte von ξ_1 und ξ_2 verschwindet, die nicht beide Null sind, während sie für alle anderen Wertsysteme von ξ_1, ξ_2 von unverändertem Zeichen ist, finde ich zuerst ausdrücklich hervorgehoben von *Gergonne*[130]). Über denselben haben sich bis in die neueste Zeit unrichtige Vorstellungen erhalten, weil man die Entscheidung der Frage nach der Existenz des Extremums von dem *Verhalten der Funktion für diese besonderen Inkremente* abhängig zu machen suchte[131]). Erst *Peano* wies die Unrichtigkeit dieser Vorstellung nach durch das Beispiel

$$f(x_1 x_2) = (x_1^2 - 2px_2)(x_1^2 - 2qx_2),$$
$$p > 0,\ q > 0,$$

bei welchem ein Minimum für die Stelle 0, 0 *nicht* vorhanden ist.

Unabhängig von *Peano* war *L. Scheeffer* von seiten der Variationsrechnung aus zu einer kritischen Untersuchung der Extreme veranlasst worden. Sein Satz, durch den die Unmöglichkeit, *allgemein* durch die Betrachtung *einzelner* Entwickelungsglieder die Entscheidung zu gewinnen, dargethan wurde, lautet[132]): Lässt sich eine positive ganze Zahl n und eine positive Zahl a finden, so dass die extremen

128) Th. des fonctions p. 266. Ein strenger Beweis dieses Satzes zuerst bei *Peano* (Calcolo p. 197); etwas kürzer bei *L. Scheeffer* (Math. Ann. 37, p. 557); vgl. *C. Jordan* (Cours 1, p. 377); mit der Ausdehnung auf implicite Funktionen von *A. Mayer* (Leipz. Ber. 41, p. 124 [1889]).

129) Nach der von *L. Scheeffer* (Math. Ann. 35, p. 555 [1885]) eingeführten Bezeichnung.

130) Gerg. Ann. 20, p. 331 (1830).

131) So noch bei *Serret-Harnack* Bd. 1; berichtigt im Bd. 2, 1, p. 380 mit Beziehung auf *Peano*'s Beispiel (Calcolo diff. p. XXIX [1884]).

132) *L. Scheeffer,* Leipz. Ber. 1886 = Math. Ann. 35, p. 554; vgl. *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 211. Letzterer dehnte den von *Scheeffer* nur für zwei Variable bewiesenen Satz auf n aus (Wien. Ber. 99, p. 499 [1890]); Grundz. 1, p. 237.

Werte von $f(x_1 x_2)$ auf jedem um den Punkt (0, 0) mit dem Radius $r < \delta$ beschriebenen Kreise absolut genommen grösser als ar^n sind, so kommt die Untersuchung auf das Verhalten der ganzen rationalen Funktion G_n hinaus, die aus den $n+1$ ersten Gliedern der *Lagrange*schen Entwickelung von f in der Nähe von 0, 0 gebildet wird. Die weitere Diskussion ist einfach[133]), wenn G_n eine ganze homogene Funktion ist; im allgemeinen Falle führt ein der *Puiseux*'schen Untersuchung der singulären Stellen einer algebraischen Funktion nachgebildetes Verfahren zum Ziel, das nach einer endlichen Zahl von Operationen seinen Abschluss findet, falls nicht G_n das Quadrat einer rationalen Funktion von ξ_1, ξ_2 zum Faktor hat[134]).

20. Die Arbeiten von Stolz. Da die *Scheeffer*'schen Gesichtspunkte, soweit sie die Durchführung der Operationen betreffen, sich nicht unmittelbar auf mehr als zwei Variable ausdehnen lassen, formulierte *O. Stolz* in Verfolgung des *Lagrange*'schen Gedankens, bei zwei Variabeln die Untersuchung auf eine einzige zurückzuführen[135]), zunächst den *Scheeffer*'schen Satz für n Variable, und gebraucht eine Methode, welche bei drei Variabeln, allerdings nicht ohne Komplikation, zur Entscheidung führt[136]).

21. Die Arbeiten von v. Dantscher. An einen anderen Punkt der *Scheeffer*'schen Arbeit knüpfte *v. Dantscher* an[137]). Zur Existenz eines etwa bei dem Punkte 0, 0 stattfindenden Extremums genügt es nicht, dass die Funktion $f(x, y)$ auf jeder durch den Nullpunkt gehenden *Geraden* ein Extremum besitze; ja es kann hierzu nicht einmal die entsprechende Eigenschaft auf allen rationalen Kurven, die durch den Nullpunkt verlaufen, ausreichend sein[138]). Achtet man jedoch auf die *beiderseitige Ausdehnung* des Intervalles auf jeder solchen Geraden, in dem die Funktion grösser oder kleiner ist als ihre Nachbarwerte, so gelangt man zu einer sicheren Entscheidung[139]). Bezeichnet man nämlich diese Geraden durch

$$x = \lambda\varrho, \quad y = \mu\varrho, \quad \lambda^2 + \mu^2 = 1$$

und ist auf jeder derselben für *alle* Werte eines gleichen Intervalles

---

133) *Scheeffer*, a. a. O. p. 556.

134) *Scheeffer*, p. 572. Vgl. auch die Darstellung bei *C. Jordan*, Cours 1, p. 381.

135) Théorie des fonctions p. 256.

136) Wien. Ber. 99, p. 496 (1890); 100, p. 1167 (1891); 102, p. 85 (1893). Vgl. auch die Darstellung in Grundz. 1.

137) *V. v. Dantscher*, Math. Ann. 42, p. 89 (1893).

138) *L. Scheeffer*, Math. Ann. 35, p. 548.

139) *v. Dantscher*, a. a. O. p. 91.

$$-p_{\lambda\mu} < \varrho < +q_{\lambda\mu}, \quad f(\lambda\varrho, \mu\varrho) - f(0, 0) < 0,$$

so ist ein wahres Maximum vorhanden, wenn die untere Grenze der kleinsten der positiven Zahlen p, q von Null verschieden ist.

Und hieraus ergiebt sich eine Methode der Untersuchung, welche ebenfalls nach einer endlichen Zahl von Operationen abschliesst oder die Unmöglichkeit eines solchen Abschlusses zu erkennen giebt[140]. Die Fortbildung dieser Untersuchung für mehr als zwei Variable scheint aber gegenwärtig noch nicht zum Abschluss gelangt zu sein.

22. Bedingte Extreme. Soll $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ ein Extremum sein, während die Bedingungen

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \dots \varphi_k = 0 \quad (k < n)$$

bestehen, so kann man, falls k der x durch die übrigen als ausdrückbar angesehen werden, diesen Fall auf den der unabhängigen Variabeln zurückführen. Aber schon *Lagrange* hat diese unzweckmässige und bei mehreren Variabeln gar nicht ausführbare Behandlung durch seine *Methode der Multiplikatoren* ersetzt, nach welcher die *notwendigen* Bedingungen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

erhalten werden[141]. Bereits *Cauchy*[142] bemerkt, dass wegen der Vertauschbarkeit von f mit jedem der φ eine Reziprocität in den Extremen hervortrete, aber erst *A. Mayer* hat diesen — in den einfachsten Fällen natürlich oft bemerkten und namentlich bei den isoperimetrischen Problemen (II A, 9) hervortretenden — *Reziprocitätssatz* genau präzisiert[143]. Bestehen nämlich zwischen den $n+1$ Variabeln

$$x_0, x_1 \dots x_n$$

Bedingungen

$$\varphi_0 = 0, \dots \varphi_r = 0,$$

in denen wenigstens *ein* Parameter y_0 vorkommt, so besteht zwischen der Lösung der Aufgabe, x_0 zu einem Extremum für konstantes y_0 zu machen, und der reciproken durch Vertauschung von x_0 und y_0 entstehenden, die Beziehung, dass, wenn

$$x_0 = X(y_0)$$

den extremen Wert von x_0 liefert, umgekehrt die Auflösung dieser Gleichung

$$y_0 = Y(x_0)$$

140) A. a. O. p. 102, 109, 131.

141) *Lagrange,* Th. des fonct. p. 268; Mécanique analytique = oeuvr. 11, p. 78.

142) *Cauchy,* Calc. differ. p. 250, 252.

143) *A. Mayer,* Leipz. Ber. 41, p. 308 (1889).

einen extremen Wert von y_0 bei konstantem x_0 bestimmt, dessen Charakter sich vollständig durch $\frac{\partial x_0}{\partial y_0}$ bestimmen lässt.

Da die allgemeinen Methoden *Scheeffer*'s eine besondere Behandlung für jeden einzelnen Fall erfordern, suchte *A. Mayer*[144]) ferner in verschiedenen Arbeiten solche Fälle auf, in denen, wie auch im semidefiniten Falle, die Benutzung der Entwickelungsglieder höherer Dimension notwendig und allgemein durchführbar wird. Von der, bis jetzt nicht völlig bewiesenen, Voraussetzung ausgehend, dass ein Extremum sicher vorhanden sei, wenn ein solches auf allen analytischen Kurven

$$x_i = \xi_i + t\xi_i^{(1)} + t^2\xi_i^{(2)} + \cdots$$

durch den betreffenden Punkt ξ_i stattfindet, ergiebt sich, dass für ganze Funktionen zweiter und dritter Ordnung die Untersuchung der dritten und vierten *Variation* in Bezug auf t (d. h. des Entwickelungskoeffizienten der entsprechenden Potenz von t) bereits „im allgemeinen" hinreichend ist.

23. Definite homogene Formen. Wann ist nun eine ganze rationale Funktion, insbesondere eine homogene Form definit oder semidefinit oder indefinit? Diese Frage lässt sich für die *quadratischen Formen* mittelst ihrer Transformation auf eine Summe von Quadraten beantworten, und führt zu einem eleganten, auch in dem Falle, wo noch lineare Bedingungen zwischen den Variabeln bestehen, übersichtlichen Kriterium[145]). Die bereits von *Lagrange*[146]) gegebene Anregung, den definiten Charakter höherer Formen allgemein zu charakterisieren, ist neuerdings durch *D. Hilbert* weiter gefördert. Während eine definite (positive) *binäre Form* (I B 2) immer als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, lässt sich eine solche *biquadratische ternäre Form*

144) *A. Mayer,* Leipz. Ber. 41, p. 129 (1889), daselbst der Ausdruck des *Scheeffer*'schen Theorems für bedingte Extreme; desgl. Leipz. Ber. 44, p. 54 (1892); vgl. auch die älteren Arbeiten in Leipz. Ber. 33, p. 28 (1881); daselbst p. 42 Bemerkungen über den schon von *Cauchy* (Calc. diff. p. 233) angeführten Fall, wo die notwendigen Bedingungen des Extremums für eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Werten bestehen. (Vgl. *S. Spitzer,* Arch. Math. 22, p. 187 [1854].)

145) In den Grundzügen (abgesehen von *Lagrange*) schon bei *Cauchy* (Calc. differ. p. 246); zum ersten Male für n unabhängige Variable bei *J. J. Sylvester* (Lond. Trans. 143, p. 481 [1853]; auch Phil. mag. 1852); Beweis der *Sylvester*schen Formel bei *B. Williamson* (Quart. J. 7, p. 48 [1872/73]). Die Behandlung von *F. Richelot* in den Astr. Nachr. 48, p. 273 (1858) wurde in kürzerer Weise dargestellt durch *F. Brioschi* (Ann. di mat. (1), 2 p. 61 [1859]); sodann durch *O. Stolz,* mit spezieller Beziehung auf die Theorie der Extreme, Wien. Ber. 68, p. 1063 (1868); man vgl. auch *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 248.

146) Th. des fonctions, p. 266.

durch die Summe dreier Quadrate darstellen[147]), aber unter den definiten Formen einer (geraden) Ordnung n von m Variabeln, abgesehen von den drei besonderen Fällen $n = 2$, m beliebig; n beliebig, $m = 2$; $n = 4$, $m = 3$, finden sich immer auch solche, die überhaupt nicht als eine endliche Summe von Quadraten sich darstellen lassen[148]). Die Entscheidung für höhere Formen ist also überhaupt keine zum Falle $n = 2$ analoge Aufgabe der Formentheorie[148a]), sondern die Frage ist nach dem Extremum der homogenen Function $G_n(x_1, \ldots x_n)$ unter der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

zu stellen.

24. Independente Darstellung höherer Derivierten. Da für $y = \varphi(x)$, $f(x) = F(y)$ die Gleichung

$$f^{(n)}(x) = \sum_k X_k^n F^{(k)}(y), \quad k = 1, \ldots n$$

besteht, in der die X_k^n von der Form des $F(y)$ unabhängige Funktionen k^{ten} Grades der $1, 2 \ldots n - k + 1^{\text{ten}}$ Derivierten von $\varphi(x)$ sind, so kann man dieselben aus den linearen Gleichungen bestimmen, die aus n für $F(y)$ passend gewählten Funktionen (z. B. Potenzen von y) entstehen. Dies ist von *Hess*[149]) mit Benutzung der Determinantentheorie geschehen; zweckmässiger ist das auf der Vergleichung beider Seiten der obigen Gleichung mit Hülfe der Taylor'schen Reihe beruhende Verfahren *Hoppe*'s[150]) und *U. Meyer*'s[151]). *Schlömilch* gab dann[152]) die Formeln für die von ihm als zweites Hauptproblem bezeichnete Aufgabe, die $F^{(n)}(y)$ durch die $f^{(k)}(x)$ auszudrücken, d. h. die independenten Formeln zur Vertauschung der unabhängigen Variabeln; erst *Steinbrück*[153]) wies auf die selbstverständliche Identität

---

147) *D. Hilbert,* Math. Ann. 32, p. 342 (1888).

148) Ebenda p. 344.

148a) Vgl. indess den weiteren Satz von *D. Hilbert,* Acta math. 17, p. 169 (1893), nach dem jede ternäre definite Form als Quotient zweier Summen von Quadraten von Formen darstellbar ist.

149) *E. Hess,* Zeitschr. Math. Phys. 17, p. 1—12 (1872); für mehr Variable ähnlich bei *F. Mertens,* Krakau. Ber. 20, p. 251 (1890).

150) *R. Hoppe,* Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipz. 1845 (J. f. Math. 32, p. 78); erste allgem. Behandlung der Aufgabe, von welcher z. B. noch J. f. Math. 32, p. 1 (1846) durch *Schlömilch* ganz spezielle Fälle betrachtet werden.

151) *U. Meyer,* Arch. Math. 9, p. 96 (1847).

152) *O. Schlömilch*, Leipz. Ber. 1857; Zeitschr. Math. Phys. 3, p. 65 (1858); Kompendium 2, p. 16 (1879).

153) *G. Steinbrück*, Diss. Berl. 1876, p. 2.

der beiden Fragen hin, vermöge der neben der obigen Gleichung auch

$$F^{(n)}(y) = \sum Y_k{}^n f^{(k)}$$

wird. Ein wesentlicher Fortschritt aber ergab sich, als nach *Götting*'s Entwickelung der Potenz y^k [154]) *Most* den n^{ten} Differentialquotienten mittelst des *Cauchy*'schen Integrals in die Betrachtung einführte[155]); eine Konsequenz davon war die Erweiterung des Problems auf die Derivierten einer Funktion von beliebig vielen Variabeln. Übrigens ist die Integraldarstellung nur ein Durchgangspunkt, denn es genügt, falls $y = \varphi(x)$ und $F(y)$ als konvergente Potenzreihen vorausgesetzt werden, in der Entwickelung von $f(x + \xi)$ den Koeffizienten von

$$\frac{1}{n!}\xi^n$$

zu nehmen; derselbe ist nach dem polynomischen und Taylor'schen Satze gleich

$$f^n(x) = \sum F^k(y) \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots} \left(\frac{\varphi^{k_1}(x)}{k_1!}\right)^{i_1} \left(\frac{\varphi^{k_2}(x)}{k_2!}\right)^{i_2} \cdots,$$

wobei

$$i_1 + i_2 \quad + \cdots = k,$$
$$i_1 k_1 + i_2 k_2 + \cdots = n,$$

womit *Faà di Bruno*'s Formel[156]) gefunden ist.

Die *Most*'schen Resultate hat neuerdings *Königsberger* elementar nach der Methode der vollständigen Induktion hergeleitet[157]). Erwähnt sei noch eine Untersuchung von *Fr. Meyer*[158]) über den algebraischen Charakter der *Bruno*'schen Formel.

D. Integralrechnung.

I. Funktionen einer Variabeln.

a) Das unbestimmte Integral.

25. Die unbestimmte Integration. *Euler* definiert die Integralrechnung folgendermassen: Calculus integralis est methodus, ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum,

154) *R. Götting,* Math. Ann. 3, p. 276 (1870).

155) *R. Most,* Math. Ann. 4, p. 499 (1871).

156) *Faà di Bruno,* Ann. fis. mat. (1855), erweitert bei *Most,* a. a. O. p. 502. Durch die im Texte angedeutete, übrigens schon von *S. F. Lacroix* (traité 1, p. 325 [1810]) angegebene Methode wird eigentlich die Ausbildung einer besonderen Theorie überflüssig.

157) *L. Königsberger,* Math. Ann. 27, p. 473 (1886).

158) *Fr. Meyer,* Math. Ann. 36, p. 435, 453 (1890); man vgl. auch Mon.h. 1, p. 33 (1890).

et operatio, qua hoc praestatur, integratio vocari solet[159]). Gegenwärtig pflegt man dagegen aus der eigentlichen Integralrechnung die Lehre von den Differentialgleichungen (II A 4—8) auszuscheiden, und dieselbe auf den Fall zu beschränken, wo aus der functio derivata die functio integra (primitive F. nach *Lagrange*'s Bezeichnung[160])) gesucht werden soll.

Giebt es überhaupt zwei stetige Funktionen $F(x)$ und $\Phi(x)$, deren Differentialquotient (allgemeiner deren vorwärts genommene Derivierte) $f(x)$ ist, so ist nach dem Fundamentalsatze der Differentialrechnung

$$F(x) - \Phi(x) = \text{const.}$$

Der Ausdruck[161])

$$\int f(x)\,dx + \text{const.}$$

stellt daher *alle* Integralfunktionen der bezeichneten Art von $f(x)$ vor, wenn $\int f(x)\,dx$ *irgend eine* derselben bedeutet; er heisst das *unbestimmte Integral* von $f(x)$. Aus den Formeln der Differentialrechnung (3) ergeben sich so die für die Elemente der Integralrechnung ausreichenden Formeln

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \gtrless -1), \quad \int \frac{dx}{x} = l(x) + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Wird die Integralfunktion so bestimmt, dass sie für $x = a$ verschwindet, so heisst das Integral ein *bestimmtes*, und wird durch

$$J = \int_a^x f(x)\,dx$$

bezeichnet[162]).

---

159) *Euler,* Inst. calc. int. 1, p. 1 (1768); ähnlich Calc. diff. praefatio p. VIII (1755).

160) *Lagrange,* Fonct. analyt. = oeuvr. 9, p. 33.

161) Das Zeichen $\int$ (eigentlich ein S = Summe, vgl. Fussn. 186) stammt von *Leibniz,* dem Begründer der Integralrechnung (*Joh. Bernoulli,* opera 1, p. 96; vgl. auch dessen Lectiones mathematicae, opera 3, p. 387), Manuscr. v. 29. Okt. 1675 (*Gerhardt,* Entdeckung der höheren Analysis p. 125); zum ersten Mal gedruckt in der Geometria recondita 1686 (*Leibniz,* math. Schriften 5, p. 226); zu allgemeiner Anwendung kam es seit 1696, wo *Joh. Bernoulli* (*Leibniz,* Schriften 7, p. 262) dasselbe annahm.

162) Diese Bezeichnung der *Grenzen des Integrals* rührt von *J. B. Fourier*

Ist also $F(x)$ eine der stetigen durch das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ dargestellen Funktionen, so wird

$$J = F(x) - F(a);$$

für den Substitutionsprozess auf der rechten Seite werden häufig die Zeichen

$$|F(x)|_a^x, \quad |_a^x F(x)$$ [163]

gebraucht.

26. Die rationalen Funktionen. Das Integral einer Funktion ergiebt sich, sobald durch eine der folgenden Methoden: Zerlegung der Funktion in eine Summe einfacherer, Substitution einer neuen Variabeln, partielle Integration, Differentiation resp. Integration nach einem Parameter etc., von denen die drei ersten unmittelbar mittelst der Differentialrechnung begründet werden können, das vorgelegte Integral auf die elementaren Integrale zurückgeführt werden kann.

Die Integration der irreducibeln rationalen gebrochenen Funktionen[164] $F(x):f(x)$, bei denen $F(x)$ von vorneherein von niedrigerem Grade als $f(x)$ vorausgesetzt werden soll, beruht auf der *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} + \cdots,$$

wo $a, b, \ldots$ die Wurzeln von $f(x) = 0$ und $A, B, \ldots$ Konstanten sind, zu deren Berechnung die von *Lagrange*[165]) herrührende Entwickelung

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} = \left| \frac{F(x+h)}{f(x+h) \cdot (x-a-h)} \right|_{h^{-1}}$$

---

her (Théorie analyt. de la chaleur p. 252 [1822] = oeuvr. 1, p. 226). Nach *Lacroix*, 3, p. 468 schrieb *Euler*

$$\int f(x)\,dx \begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix}.$$

Kronecker (Vorlesungen p. 1) beanstandet die Bezeichnung „bestimmtes" Integral; schon der Bearbeiter des Artikels Integralrechnung in *Ersch* und *Gruber's Encyclopädie* Teil 19, p. 183 (1841) schlug den Namen „abgegrenztes Integral" vor.

163) Eingeführt von *F. Sarrus* (Gerg. Ann. 14, p. 197 (1823); auch Par. sav. étr. 10 (1848); man vgl. auch *Moigno* 4, 1, p. XI und 1, sowie *Cauchy*, Exercices d'analyse 3, p. 100 (1844).

164) *Leibniz* und *Joh. Bernoulli*, Act. erud. 1702/3 (*Leibniz*, math. Schriften 5, p. 350; *J. Bernoulli*, opera 1, p. 393); vgl. auch *Dirksen*, J. f. Math. 1, p. 53 (1826); *L. A. Crelle*, J. f. Math. 9, p. 32 (1832).

165) *Lagrange*, Berl. nouv. mém. 1792/93 = oeuvr. 5, p. 640.

ıach *Jacobi*'s[166]) Bezeichnung angewandt werden kann. Bei komplexen Wurzeln von $f(x)$ tritt hiernach das Resultat in imaginärer Form auf. Man vermeidet dies bei reellen Funktionen durch paarweises Zusammenfassen der komplex konjugierten Teile; diese sehr weitläufige Behandlung wird vereinfacht durch die Methode, die komplexen Partialıenner in der Form

$$\frac{A_n x + B_n}{((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_1 x + B_1}{(x-a)^2+b^2}$$

ınzusetzen[167]), doch müssen auch hier noch die einzelnen Glieder lurch partielle Integration auf logarithmische und Kreisfunktionen reduziert werden.

Diese Rechnungen werden vermieden durch den von *Baltzer* vieder hervorgehobenen Ansatz[168])

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\frac{F_1(x)}{f_1(x)} + \sum \frac{A_l}{x-a_l} + \sum \frac{B_k x + C_k}{(x-b_k)^2 + c_k{}^2}$$

$f_1(x)$ der grösste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, $F_1(x)$ eine ganze Funktion, deren Koeffizienten, ebenso wie die B_k, C_k durch Auflösung linearer Gleichungen zu bestimmen sind). Lässt man an Stelle lieser Formel den Ausdruck

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{P}\right) + \frac{N}{Q}$$

reten, wo Q das Produkt der einfachen Wurzelfaktoren von $f(x)$, ? der grösste gemeinsame Faktor von $f(x)$ und $f'(x)$, M (und N) on niedrigerem Grade sind wie P (und Q), so gelangt man zur Beıerkung von *Hermite*[169]), dass diese letzte Zerlegung *rational* ausgeführt werden kann, ohne die Wurzeln von $f(x)$ zu kennen, so dass iese selbst nur zur Kenntnis des aus $\frac{N}{Q}$ entspringenden transcendenten ntegralteiles erforderlich sind. Im übrigen gehören diese Partialruchzerlegungen in das Gebiet der *Algebra*, der es obliegt, zu zeigen, ass die angegebenen Entwickelungen 1) auf eine *einzige* Art möglich

166) *C. G. J. Jacobi*, Diss. Berol. 1825 = Werke 3, p. 12; auch 6, p. 27. Der oeffizient A_α ist immer gleich $F(a):f_1(a)$, wo $f_1(x) = f(x):(x-a)^\alpha$.

167) So schon bei *Euler*, Calc. int. 1, p. 24 (Salomon); *Lacroix*, traité 2, . 15 (1814); desgl. *F. Minding*, Handbuch der Diff.- u. Integralrechn. 1, p. 167;) auch noch bei *J. Hoüel*, 2, p. 390 (1878).

168) *R. Baltzer*, Leipz. Ber. p. 535 (1873), mit dem Hinweis auf *Newton*'s ıadratura curvarum (1704); das Verfahren indessen weit früher schon von *Veierstrass* bei ähnlichen Reduktionen gebraucht.

169) *Hermite*, Ann. Éc. norm. (2) 1, p. 215 (1872), Cours d'analyse p. 265 (1873).

sind[170]), 2) durch *rationale* Operationen ausgeführt werden können sobald man die irreducibeln reellen Faktoren von $f(x)$ als bekannt voraussetzt[171]). (Vgl. I B 1 a, **2. 5. 14**). Eine dem heutigen Standpunkt entsprechende Behandlung der Integrale rationaler Funktionen ist wegen der Vieldeutigkeit der Integrale erst auf Grund der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln möglich.

27. Transcendente Funktionen. Auf den Fall der rationalen Funktionen lassen sich die Integrale der *rationalen* Funktionen von den *goniometrischen* oder der *Exponentialfunktion* durch Substitution zurückführen. Insbesondere gilt das auch noch von der rationalen *ganzen* Funktion

$$f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots \sin \alpha x, \cos \alpha x; \sin \beta x, \cos \beta x, \ldots),$$

deren Berechnung in Analogie mit der Theorie der Integrale doppeltperiodischer Funktionen *Hermite* ausführlich dargelegt hat[172]).

28. Algebraische Funktionen vom Geschlechte Null. Die Integrale irrationaler Funktionen von der Form

$$J = \int f(xy)\, dx,$$

wo f eine rationale Funktion von x und $y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ ist, lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten behandeln. *Erstens* kann man durch die bei den hyperelliptischen Integralen überhaupt gebräuchlichen Methoden das Integral zunächst auf die Form[173])

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} \frac{1}{y}\, dx$$

bringen und dann die rationale Funktion von x in Partialbrüche zerlegen. So gewinnt man die Entwickelung

$$\frac{F(x)}{f(x)} \frac{1}{y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{F_1(x)}{f_1(x)}\right) y + \sum \frac{A_r}{x - a_r} \frac{1}{y} + \sum \frac{(B_k x + C_k)}{y((x - c_k)^2 + c_k{}^2)},$$

wo $F_1(x)$ und $f_1(x)$ teilerfremd sind, in völliger Analogie mit der Entwickelung der rationalen Funktionen.

Zweitens kann man durch eine geeignete Substitution[174]) die Irra-

170) *Ch. Duhamel,* Cours d'analyse, 2. éd. 1847, deutsch v. *H. Wagner,* Braunschw. 1855, Teil I, p. 192.

171) Erschöpfende Darstellung bei *Genocchi-Peano,* Calcolo, p. 261—266 und *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 275—304; 2, p. 104—108.

172) *Hermite,* Cours d'analyse p. 258, 320—380.

173) Vgl. die Auseinandersetzung dieses von *K. Weierstrass* in Vorlesungen behandelten Verfahrens bei *O. Stolz,* Grundz. 1, p. 305—333; 2, 109—155.

174) So schon bei *Euler,* Calc. int. 4, p. 17 (Salomon); vgl. auch z. B. *Genocchi-Peano*, p. 268.

tionalität überhaupt beseitigen und damit das Problem auf das der Integration einer rationalen Funktion zurückführen. Diese Methode erweist sich als ein Spezialfall der allgemeineren über eine *Kurve vom Geschlechte Null* erstreckten Integrale. (Vgl. II B 3 a.)

29. Methode von Aronhold. Alle diese Operationen liefern aber selbst in den einfachsten Fällen zunächst keine Einsicht in die formentheoretische Natur des Endresultates. Die prinzipielle Untersuchung des Integrales J, falls zwischen x und y eine *allgemeine Gleichung zweiten Grades* besteht, nahm zuerst *S. Aronhold*[175]) vor. Er beseitigt die Zerlegung in Partialbrüche, das wiederholte Rationalmachen, und setzt an Stelle desselben eine Zerlegung in *exakte Differentiale*, für die der Zusammenhang zwischen y und x gleichgültig ist[176]). Durch die *Einführung homogener Koordinaten* (die hier zum ersten Male zur Untersuchung transcendenter Funktionen benutzt werden) gelingt es zugleich, den algebraischen Aufbau der Resultate mit der *Methode der Formenbildung* zu beherrschen. Indem *Aronhold* so jedes Differential in die *Abel*'sche Form

$$\frac{\Pi(x_1, x_2, x_3)\,\Delta}{f(\xi, x)}$$

bringt, wo Π eine gebrochene Funktion -1^{ter} Ordnung, Δ die Determinante $(\xi x\, dx)$, $f(\xi, x)$ aber gleich

$$\frac{1}{2}\sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = f(\xi, x),$$

wenn unter $f(x_1 x_2 x_3) = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes verstanden wird, auf den sich das Differential bezieht, lässt sich das *Fundamentalintegral*[177])

$$\varpi = \int \frac{\Delta}{u f(\xi x)}, \quad u = \sum u_i x_i,$$

als Logarithmus darstellen, und aus diesem gewinnt man durch den *Aronhold*'schen δ-Prozess[178]) wieder das Integral

$$\varpi_n = \int \left(\frac{a}{u}\right)^n d\varpi, \quad a = \sum a_i x_i,$$

---

175) Berl. Ber. 1861; J. f. Math. 61, p. 95 (1863), (1862). Diese Arbeit gab den Anstoss zu den Untersuchungen von *Clebsch* (J. f. Math. 63, 64) und der Theorie der Abel'schen Funktionen von *Clebsch* und *Gordan* (Leipz. 1866), sowie zu der ganzen Entwickelung der algebraischen Integrale in homogenen Koordinaten.

176) Diese Methode ist daher auch für höhere Irrationalitäten anwendbar; die von *Aronhold* in Aussicht gestellte Fortsetzung für hyperelliptische Integrale ist aber nicht erschienen.

177) Daselbst p. 101.

178) Desgl. p. 106.

endlich hieraus durch *symbolische Substitution* das Integral einer jeden ganzen rationalen Funktion von x, y.[179])

30. Schlussbemerkung. In den Fällen, wo die unbestimmte Integration sich nicht auf die besprochenen Fälle zurückführen liess[180]) suchte man entweder durch Reihenentwickelung das Integral zu gewinnen, von dessen Existenz man auf Grund der *Newton*'schen Bemerkung überzeugt war, dass der Flächeninhalt der Kurve mit der Ordinate $f(x)$ zum Differentialquotienten $f(x)$ hat[181]), oder dasselbe angenähert durch *Summation* zu ermitteln[182]). In prinzipieller Weise scheint man aber vor *Cauchy* die Existenzfrage überhaupt nicht gestellt zu haben. Selbst bei dem Satze, durch den die *Leibniz*'sche Summation

$$f(x) - f(a) = \sum d_i f' a_i + \sum \varepsilon_i d_i$$

vermöge des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung begründet wird[183]), vermisst man nicht selten den Beweis, dass die so gewonnene Funktion wirklich zur Derivierten $f'(x)$ habe[184]). Und bei einer Durchsicht auch der ausführlicheren Lehrbücher der Integralrechnung tritt deutlich hervor, wie sehr die Begründung der Integralrechnung in diesem Teile der Litteratur bis in die neuere Zeit vernachlässigt worden ist[185]).

---

179) Die Erweiterung der Methode auf höhere Fundamentalintegrale etc p. 133. Kurze Darstellung des *Aronhold*'schen Verfahrens bei *Harnack*, Element p. 219; desgl. bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 148—154 (1896); vom Standpunkt de homogenen Koordinaten aus bei *F. Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie von *A. Clebsch*, p. 766 (1876), sowie *S. Gundelfinger*, Vorlesungen aus d. anal Geom. der Kegelschnitte, Leipzig 1895, p. 415.

180) Bei *Joh. Bernoulli*, lect. math. de meth. integralium, Opera 3, p. 371 wird die Existenz des Integrals vom Erfolge der Integration abhängig gemacht

181) *Newton*, de quadratura curvarum (1711), Opuscula 1, p. 125 u. p. 212

182) *Euler*, Calc. int. 2, p. 200.

183) Diese den Übergang zum *Cauchy*'schen Integralbegriff zweckmässig vermittelnde, auch heute noch übliche Darstellung (vgl. z. B. *Harnack*, Elem p. 184; *Dini-Lüroth*, p. 318; *Picard*, traité 1, p. 2) findet sich schon bei *A. de Morgan* (Differential and integral calculus, London 1842, p. 100); von wem mag sie herrühren?

184) So z. B. bei *J. A. Serret*, Cours de calcul diff. et intégral 2, p. 3 (1880) erst in *A. Harnack*'s Bearbeitung 2¹, p. 5 (1884) finden sich die nötigen Ergänzungen. Den *Cauchy*'schen Integralbegriff findet man bereits in *F. Minding*' Handbuch 1, p. 158, 160 (1836) benutzt.

185) Etwa bis auf *R. Lipschitz*' Lehrbuch der Analysis (1880), doch bilde schon *Schlömilch*'s Handbuch der Diff.- u. Integralrechnung (1847—48) eine Ausnahme, vgl. z. B. Integr.-R. p. 3.

b) Das bestimmte Integral.

31. Das bestimmte Integral nach Cauchy, Riemann und Darboux. Durch *Joh. Bernoulli*'s und *L. Euler*'s Ausbildung der formalen Integralrechnung war der ursprüngliche Begriff derselben als der des calculus summatorius von *Leibniz*[186]) zurückgedrängt worden. Erst *Cauchy* ging auch hier wieder auf die ursprünglichen Vorstellungen zurück und definierte das Integral zwischen den Grenzen a und b durch den Grenzwert

$$1)\int_a^b f(x)\,dx = \lim[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_n)f(x_n)],$$

zunächst unter der Voraussetzung eines im ganzen Intervalle stetigen und endlichen $f(x)$.[187]) Von dieser Beschränkung befreite erst *B. Riemann*[188]) den Integralbegriff durch die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen für eine im Intervalle *endliche* Funktion jener Grenzwert ein vollkommen bestimmter, von der Art der Einteilung des Intervalles völlig unabhängiger ist. Zugleich tritt an die Stelle von (1) die Definition[189])

$$\lim\,[(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_{n-1})],$$

wo ξ_k irgend einen dem Intervalle $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k$ angehörigen Wert bedeutet. Bezeichnet nun O_k die obere, o_k die untere Grenze von $f(x)$ in diesem Intervalle, $D_k=O_k-o_k$ die *Schwankung* des Funktionswertes, so muss *notwendig*[190])

$$2)\qquad \lim\sum D_k\Delta x_k = 0$$

---

186) *Leibniz,* math. Schriften 3, p. 118. Bei *Euler* wird der Summenbegriff nur zur angenäherten Berechnung des Integrals herangezogen. Vgl. auch Calc. int. p. 3, scholium 1: hoc signum $\int$ vocabulo summae efferri solet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tanquam summa omnium differentialium spectatur, est natum. Dagegen beruhen die Integrationen bei *P. Fermat* (Varia opera [1679], p. 44), *Wallis* u. anderen auf dem eigentlichen Summenbegriff. Über neuere Berechnungen bestimmter Integrale auf Grund dieser Vorstellung vgl. *Dirichlet* bei *G. F. Meyer,* p. 9—15 (1858); *Dini-Lüroth,* p. 341; *Lipschitz,* Lehrb. d. Analysis 2, p. 109; *E. Netto,* Ztschr. f. Math. Phys. 40, p. 185 (1895).

187) *A. L. Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 571 u. 590 (1823); auch schon im „Résumé des leçons etc." von 1823, p. 81. (Vgl. I A 1, Fussn. 81.) Vgl. auch *L. Dirichlet* (Repert. Phys. 1, p. 153 [1837] = Werke 1, p. 135).

188) *B. Riemann,* Hab.-Schr. Gött. 1854 (publ. 1867) = Werke p. 213.

189) Ebenda p. 225. Noch allgemeiner kann man in der Integraldefinition des Textes unter $f(\xi_k)$ irgend einen zwischen O_k und o_k gelegenen Wert versehen, gleichgültig, ob die Funktion denselben wirklich annimmt oder nicht. Vgl. z. B. *G. Ascoli,* Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 68.

190) Desgl. p. 226.

sein, und diese Bedingung, die man auch so aussprechen kann: Di Summe der Intervalle, in denen die Schwankungen grösser sind wi eine bestimmte positive Zahl δ, muss durch Verkleinerung der Inter valle kleiner gemacht werden können, wie eine noch so kleine Zahl ε ist zugleich die *hinreichende* für die Existenz des Grenzwertes in der oben angegebenen Sinne.

Der *Riemann*'sche Beweis[191]) hierfür ist erst durch *Thomae*[192]) un *Du Bois-Reymond*[193]) mittelst des bereits von *Cauchy* benutzten Prinzipe der Superposition der Teilungen völlig ausgeführt worden. Ein Funktion, welche der oben angeführten Bedingung (2) in einem ge wissen Intervalle genügt, heisst daselbst *integrierbar* oder *integrabel*

G. Darboux[194]) und fast gleichzeitig *Thomae* und *G. Ascoli*[195] haben die *Riemann*'sche Vorstellung noch erweitert. Unter alle Umständen haben die beiden Summen

$$\sum O_k \Delta x_k, \quad \sum o_k \Delta x_k$$

völlig bestimmte *untere* und *obere* Grenzwerte S und s; diese heisse oberes und unteres Integral bei *Pasch*[196]), Intégrale par excès et pa défaut bei *C. Jordan*[196a]), und können nach *V. Volterra* und *G. Pean* zweckmässig durch:

$$\int_a^{\bar{b}}, \quad \int_{\underline{a}}^{b}$$

bezeichnet werden[196b]).

32. Integrable Funktionen. *H. Hankel*[197]) unterschied *punktier unstetige* Funktionen, d. h. solche, deren Stetigkeitspunkte überal

---

191) p. 227.

192) *J. Thomae,* Einleitung p. 11—13; hierzu die Bemerkungen von *P. d Bois-Reymond* (Ztschr. Math. Phys. 20, h.-l. A. p. 123); vgl. auch *J. Thomae,* ib. 21 p. 224 (1876).

193) J. f. Math. 79, p. 259 (1874); vgl. auch *A. Harnack,* Elemente p. 25 bis 258; *Dini-Lüroth,* p. 323—332.

194) *G. Darboux,* Ann. éc. norm. (2) 4, p. 64 (1876) [datiert v. März 187 Januar 1874].

195) *J. Thomae,* Einl. p. 12 (1875); *G. Ascoli,* Linc. atti, Juni 1875, p. 86

196) Nach Vorgang von *V. Volterra,* Giorn. di mat. 19, p. 340 (1881); *M. Pasch* Math. Ann. 30, p. 151 (1887), sowie *G. Peano,* Lezioni 1, p. 139 und Ann. d mat. (2) 23, p. 157 (1895); *O. Stolz,* Monatsh. 7, 1896, p. 291; 8, 1897, p. 95.

196a) *C. Jordan*, Cours 1, p. 34. 196b) Vgl. neben Fussn. 196 *Pringsheim* Münch. Ber. 28, p. 65 (1898).

197) Progr. Tübingen 1870 = Math. Ann. 20, p. 89. Nach *Dini* (1878) vgl. *Dini-Lüroth,* p. 341, sind zunächst nur diejenigen endlichen Funktione integrierbar, deren Unstetigkeiten in eine Punktmenge erster Art (abzählbar Menge) fallen, dann diejenigen, deren Unstetigkeiten eine unausgedehnte Meng

dicht liegen, und *total unstetige*; erstere erklärte er als integrierbar, letztere nicht. Eine exakte Darstellung dieser Unterscheidungen gelang erst auf Grund der von *G. Cantor* ausgebildeten Mengenlehre[198]). Stetige Funktionen von integrabelen Funktionen sind wieder integrabel[199]); andererseits ist ein Produkt sicher nicht integrabel, wenn ein Faktor integrabel ist, der andere nicht[200]).

33. Eigenschaften des bestimmten Integrals. Diese Auffassung des Integrationsprozesses, *welcher hiernach den sehr beschränkenden Forderungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit in der Diff.-Rechn. gegenüber als eine Operation von der grössten Allgemeinheit erscheint,* erfordert es nun, dass die aus der älteren Integralrechnung bekannten Sätze, welche auf der Umkehrung der Differentiation beruhen, aufs *neue* begründet werden. Schon *Dirichlet*[201]) machte auf die *Cauchy*schen Sätze aufmerksam, nach denen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b = -\int_b^a,$$

$$\int_a^b \sum f_i(x)\,dx = \sum \int_a^b f_i(x)\,dx,$$

st; in systematischer Weise ist aber diese Forderung namentlich lurch *Du Bois-Reymond* gestellt worden[202]). Die Abschätzung eines ntegralwertes geschieht mittelst der beiden „Mittelwertsätze“.

34. Der erste Mittelwertsatz[203]) bezieht sich auf das Integral

---

ilden, während *A. Harnack* den *Hankel*'schen Begriff der punktierten Unstetigeit so veränderte, dass der Wortlaut des Textes richtig bleibt (Math. Ann. 19, . 242; 24, p. 218). Vgl. II A 1, 19, insb. Fussn. 208.

198) Aufzählung integrabeler Funktionen bei *Dini-Lüroth*, p. 332—341.

199) *P. du Bois-Reymond,* J. f. Math. 79, p. 23 (1874), dann Math. Ann. 16, . 112 (1879) und 20, p. 122 (1881); für uneigentliche Integrale bestehen diese ätze zum Teil nicht.

200) Ähnliche Untersuchungen für das Doppelintegral bei *O. Stolz,* Math. nn. 26, p. 83 (1884).

201) *Dirichlet,* Werke p. 136 (1837).

202) Münch. Abh. 12, p. 161 (1876). Dem gegenwärtigen Standpunkt würde s entsprechen, diese Forderung so zu stellen, dass dabei immer *oberes* und *unres* Integral *unterschieden* wird.

203) *P. G. L. Dirichlet* in Repert. Phys. a. a. O. p. 152 = Werke 1, p. 138. er Satz selbst ist natürlich weit älter und findet seinen geometrischen Ausruck darin, dass ein zwischen zwei Abscissen begrenztes Flächenstück einer

$$J = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ im Intervall $a - b$ sein Zeichen nicht ändert und $\varphi(x)$ und $f(x)$ integrabel sind. Ist dann M die obere, m die untere Grenze von $f(x)$, so hat man

$$m \int_a^b \varphi(x)\,dx \gtreqless J \gtreqless M \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

oder, falls $f(\xi)$ den unbekannten Mittelwert von m, M für $\xi = a + \theta(b-a)$ wirklich annimmt $(0 \leqq \theta \leqq 1)$,

$$J = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$ [204]

Aus diesem Satze folgt, dass das bestimmte Integral eine stetige Funktion seiner oberen Grenze ist. Er gilt aber auch für komplexe Funktionen $f(x)$ einer reellen Variabeln, wenn man auf der rechten Seite nach *Darboux*[205] einen Faktor λ hinzufügt, dessen Betrag $\gtreqless 1$ ist und kann in dieser Form dann überhaupt auf Funktionen einer komplexen Variabeln ausgedehnt werden[206] (II B 1).

35. Der zweite Mittelwertsatz ist zuerst von *O. Bonnet*[207] in der Form ausgesprochen worden, dass das Integral J (**34**), falls $f(x)$ im Intervalle $a - b$ nicht zunimmt und positiv (oder Null) ist, der Bedingung

$$Af(a) \leqq J \leqq Bf(a)$$

oder auch

$$J = f(a) \int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

genügt, wo A und B die Extreme der *stetigen* Funktion $\int_a^x \varphi(x)\,dx$ sind, blieb aber zunächst trotz der von *Bonnet* gemachten Anwen-

---

Kurve gleich einem Rechteck ist, das zur Höhe eine mittlere Ordinate hat; so schon bei *Newton*.

204) Eine Verallgemeinerung des Satzes bei *Dini-Lüroth*, p. 361; eine andere bei *Du Bois-Reymond*, Math. Ann. 7, p. 605 (1874).

205) *Darboux*, J. de math. (2) 3, p. 294. Über die Erweiterung der Integralsätze auf komplexe Funktionen einer reellen Veränderlichen siehe *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 157—169. Eine andere Erweiterung des Mittelwertsatzes rührt von *Weierstrass* her, vgl. *Ch. Hermite*, Cours d'analyse p. 47, 2. éd. (1881).

206) *Hermite*, a. a. O. p. 50.

207) *O. Bonnet*, Brux. Mém. 23, p. 8 (1849); J. de math. 14, p. 249 (1849).

dungen auf die Theorie der *Fourier*'schen Reihe[208]) unbeachtet. Von der Beschränkung, dass $f(x)$ sein Zeichen nicht ändern dürfe, befreit man ihn durch die Betrachtung, dass bei monoton *zunehmendem* $f(x)$ die *Bonnet*'sche Regel auf $f(b-0)-f(x)$, bei monoton *abnehmendem* $f(x)$ auf $f(x)-f(b-0)$ angewandt werden kann; so erhält man den von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen unabhängig von *Bonnet* durch partielle Integration bewiesenen Satz:

$$J = f(a+0)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b-0)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx.$$

Erst *P. du Bois-Reymond* hat die Bedeutung des Satzes gerade für die allgemeinen Fragen der Integralrechnung betont. Sein erster allerdings nicht übersichtlicher Beweis[209]) wurde bald durch *Hankel*[210]) mittelst des auch von *Bonnet* benutzten *Abel*'schen Hülfssatzes[211]) vereinfacht. Erst 1875 aber befreite sich *Du Bois* von der Voraussetzung[212]), dass $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Zeichenänderungen erfahren dürfe[213]). Neuerdings hat *O. Hölder* den Satz noch einmal in möglichst präziser Form gegeben[214]).

36. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung und die Integrationsoperationen. Da für die stetige Funktion $F(x)$

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

der Differenzenquotient $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ gleich dem Mittelwert von $f(x)$ im Intervalle x, $x+\Delta x$ ist, so hat $F(x)$ überall da, wo $f(x)$ stetig ist, die Derivierte $f(x)$.[215]) Ist dagegen $f(x)$ an der Stelle x nicht stetig,

---

208) *Bonnet*, a. a. O. p. 13 u. 18. Bemerkungen über die Geschichte des Satzes bei *Pringsheim*, Ztschr. Math. Phys. 39, p. 66 (1894); desgl. von *A. Wangerin*, daselbst 28, h.-l. A., p. 109 (1883).

209) J. f. Math. 69, p. 81 (1869), (1868).

210) *H. Hankel*, Ztschr. Math. Phys. 14, p. 436 (1869).

211) *N. H. Abel*, J. f. Math. 1, p. 314, Satz III = oeuvr. 1, p. 222.

212) Beweise unter dieser Voraussetzung von *Hankel*, a. a. O.; *G. F. Meyer*, Math. Ann. 6, p. 315 (1872); *C. Neumann*, Kreis-, Kugel- u. Cyl.-Funkt. (Leipz. 1881) p. 28.

213) *Du Bois-Reymond*, J. f. Math. 79, p. 42 (1875); vgl. auch *J. Thomae*, Einl. p. 18 (1875). Die Voraussetzung, dass $f(x)$ monoton sei, ist dagegen eine notwendige, vgl. z. B. *L. Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 63.

214) *O. Hölder*, Gött. Anz. p. 519 (1894), anderer Beweis von *E. Netto*, Ztschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 180.

215) So bei *Moigno* nach *Cauchy*, 2¹, p. 4 (1844); *Darboux*, ann. éc. norm. (1875) p. 75.

jedoch $f(x+0)$ vorhanden, so ist die vorwärts genommene Derivierte von $F(x)$ gleich $f(x+0)$ und entsprechendes gilt eventuell für die hintere Derivierte. Umgekehrt aber ist diese Bedingung nach *Thomae*[216]) nicht notwendig für die Existenz einer (vorderen) Derivierten. Und ist $f(x)$ im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme einer abzählbaren aber nicht ausgedehnten Menge von Punkten des Intervalles stetig, $F(x)$ ferner irgend eine stetige und endliche Funktion, deren vordere Derivierte überall mit $f(x)$ resp. $f(x+0)$, wo $f(x)$ oder $f(x+0)$ existiert, übereinstimmt, so ist

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx,$$

womit das unbestimmte Integral mit Hülfe des bestimmten gewonnen ist[217]). *Diesem Fundamentalsatz der Integralrechnung*, der in speziellen Fällen bereits von *Dini* ausgesprochen, dann von *Du Bois-Reymond*[218]) verallgemeinert wurde, kann man nach *Dini-Lüroth*[219]) folgende Form geben:

---

216) *J. Thomae*, Gött. Nachr. p. 696 (1893), entgegen der z. B. bei *Dini-Lüroth* (1892), p. 369 ausgesprochenen Ansicht.

217) Bei der hier massgebenden historischen Entwickelung durfte die Betrachtung der formalen Integralrechnung *vor* der Lehre vom bestimmten Integral nicht fehlen. Der gegenwärtigen Ausbildung der Theorie scheint es aber zu entsprechen, diesen Teil erst da zu behandeln, wo aus dem Begriff des „bestimmten“ Integrals der des „unbestimmten“ gewonnen ist, um so von vornherein den Dualismus im Integralbegriff zu vermeiden. Allerdings ist — abgesehen von sehr berechtigten didaktischen Einwendungen — hierbei zu berücksichtigen, dass der *Bernoulli*'sche Integralbegriff (*Joh. Bernoulli*, Lect. math. 1691/92; Opera 3, p. 387: Integrales, id est eae quantitates, quarum sunt differentiales) umfassender ist als der *Riemann*'sche. Diese schon von *Dini* ausgesprochene Ansicht hat *V. Volterra* durch Beispiele von Funktionen bestätigt, welche eine nicht integrable Derivierte haben, so dass für die letztere ein Integral im Sinne *Riemann*'s nicht existiert. Vgl. *V. Volterra*, Giorn. di mat. 19, p. 333 (1881) und *Dini-Lüroth*, p. 381. Vgl. auch II A 1, Fussn. 223.

218) Litt. bei *Pasch*, a. a. O. p. 152, 154. An Stelle der Gleichung:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x)\,dx$$

tritt in diesem Falle die (sie umfassende) Ungleichung

$$\underline{\int_a^x} F'(x)\,dx \leqq F(x) - F(a) \leqq \overline{\int_a^x} F'(x)\,dx,$$

siehe *A. Pringsheim*, Münch. Ber. 29 (1899) p. 57; ein etwas allgemeinerer Satz dieser Art schon bei *Pasch*, a. a. O. p. 153. Vgl. auch *L. Scheeffer*, Acta math. 5, p. 282 (1884); desgl. p. 183.

219) *Dini-Lüroth*, p. 377, 379. Vgl. *M. Pasch*, Math. Ann. 30, p. 153.

Wenn die endliche und stetige Funktion $F(x)$ so beschaffen ist, lass eine ihrer vier Derivierten endlich und integrabel ist, so sind es uch die drei anderen und das bestimmte Integral dieser vier Funkionen zwischen den Grenzen $a-x$ ist gleich $F(x)-F(a)$; zugleich nit der Umkehrung, dass die vier Derivierten der Integralfunktion

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$

elbst zum Integralwerte bis auf eine Konstante wieder $F(x)$ haben.

Bei der *Substitution einer neuen Variabeln* t an Stelle von x durch ine Beziehung $x=\varphi(t)$ ist vorauszusetzen[220]), dass $\varphi(t)$ im Interalle stetig wächst (monoton ist) und eine endliche integrabele Derierte besitzt; dann gilt die Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

m eingreifendsten äussert sich der *Riemann*'sche Integralbegriff bei er *partiellen Integration.* Indem *Du Bois-Reymond*[221]) die *Leibniz*'sche ormel

$$\int_a^b u\,dv=\int_a^b d(uv)-\int_a^b v\,du,$$

elche bei u und v eine Derivierte voraussetzt, in die Gestalt

$$\int^b f(x)\Big[\int_c^x \varphi(x)\,dx\Big]dx=\int_c^b \varphi(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b \varphi(x)\Big[\int_a^x f(x)\,dx\Big]dx$$

achte, entsteht ein ganz allgemeines Integrationstheorem, bei dem (x) und $f(x)$ nur als integrabele Funktionen vorausgesetzt zu werden auchen[222]); der Beweis kann auch hier durch die Methode der rtiellen Summation geführt werden[223]).

Die Frage nach der *Differentiation eines Integrals* (resp. der Integation desselben) *nach einem Parameter* kann man unter den allgeeinen Gesichtspunkt bringen[224]), wann

---

220) Vgl. z. B. *J. Tannery,* Introduction p. 328; *Dini-Lüroth,* p. 497. *Jordan* dehnt diese Regel noch auf das obere und untere Integral aus, urs 1, p. 35.

221) *P. du Bois-Reymond,* Münch. Abh. 12, p. 129 (1876).

222) Auch dies ist nicht notwendig, wenn man das obere und untere Integl unterscheidet.

223) *J. Thomae,* Ztschr. Math. Phys. 20, p. 475—478 (1875).

224) Vgl. *Dini-Lüroth,* p. 530; desgl. *E. Hossenfelder,* Programm Strasburg i. Westpr. Nr. 41 (1891).

$$\lim_{y=\alpha\pm 0}\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)=\int_a^b \lim_{y=\alpha\pm 0} f(x,y)\,dx$$

gesetzt werden darf. Hierbei kommt, wenn es sich um hinreichende Kriterien handelt, der Begriff der gleichmässigen Konvergenz gegen die Grenzfunktion in Betracht (II A 1, **16**). Bei der Bildung der Derivierten nach einem Parameter y hat man schon längst bemerkt, dass die *Leibniz*'sche Regel[225]) häufig versagt, weil z. B. die Derivierte nicht mehr integrabel ist[226]). Setzt man in

$$\frac{\Delta J}{\Delta y}=\int_a^x \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\,dx}{\Delta y},$$

$$f(x,y)+\Delta y-f(x,y)=\Delta y\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\Delta y\cdot M,$$

so wird es sich darum handeln, wann bei integrabelem $\frac{\partial f}{\partial y}$ das Integral

$$\int_a^x M\,dx$$

kleiner als ε genannt werden kann für alle $\Delta y<\eta$. Sicher ist diese Forderung erfüllt, wenn der Differentialquotient eine stetige Funktion von x, y in den bezüglichen Intervallen ist[227]). Diese sehr eng gefasste Bedingung kann dahin erweitert werden, dass der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta y}$ im allgemeinen (d. h. mit Ausschluss einer Menge *vom Inhalt* 0 (vgl. I A 5 u. II A 1)) gleichmässig gegen den integrabelen Differentialquotienten konvergieren muss.

37. Uneigentliche Integrale. Lässt man die Voraussetzung der Endlichkeit von $f(x)$ oder des Intervalles (ab) fallen, so verliert der *Riemann*'sche Integralbegriff seine Bedeutung[228]). Wächst $f(x)$ für $x=b$ über alle Grenzen, so setzt man[229])

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

225) *Leibniz,* Commercium epistolicum Leibnitii et Joa. Bernoulli 1684—169[illegible] (Lausanne 1745) 1, epistola 59.

226) In Vorlesungen wohl zuerst von *Dirichlet* hervorgehoben, vgl. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis wirkenden Kräfte [1856/57], herausgegeben von *F. Grube,* Leipzig 1876, p. 9.

227) *J. Thomae,* Einl. p. 20—22. Daselbst auch ein Beispiel, wo der Sat[z] unrichtig wird, obwohl die Derivierte integrabel ist.

228) *Riemann,* a. a. O. p. 226.

229) So bei *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 572 (1823); aber schon 181[illegible] treten bei *Cauchy* die singulären Integrale auf (vgl. ib. p. 572).

falls die rechte Seite eine bestimmte Bedeutung hat, und analog falls $f(x)$ für $x = c$ unendlich wird,

$$\int_a^b = \lim \int_a^{c-\varepsilon} + \lim \int_{c+\eta}^b;$$

ebenso verfährt man, wenn das Intervall unendlich wird. Alle diese durch einen *neuen Grenzprozess* definierten Integrale heissen *uneigentliche Integrale*, Intégrales définies généralisées bei *C. Jordan*, Integrali improprii. Vgl. im übrigen II A 3, 2.

II. Funktionen von mehreren Variabeln.

38. Das n-fache Integral. Die Aufgabe, zu der Funktion $f(xy)$ lie primitive Funktion zu suchen, kann analog wie bei *einer* Variabeln lurch das Symbol

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

bezeichnet werden; sie führt naturgemäss auf einen wiederholten Integrationsprozess, und bot keine besonderen Schwierigkeiten dar, wenn auch das Verhältnis, in dem diese Auffassung zu der Volumbestimmung steht, nicht immer ganz klar erschien[230]. *Riemann* selbst hat in seiner Iabilitationsschrift den Begriff des mehrfachen Integrals nicht berührt; lie *Cauchy*'sche rein arithmetische Definition lässt sich aber auch hier u Grunde legen und in *Riemann*'s Sinne verallgemeinern. Doch ist uch heute noch die Theorie der mehrfachen Integrale nicht allgemein u solcher Durchführung gediehen[231]. Der Grund hierfür liegt, abgesehen von dem erforderlichen mehrfachen Grenzübergange, mit darin, lass hier die — allerdings auch schon bei einer Variabeln notwendige — genaue Definition des *Bereiches* erforderlich wird, über welchen ler Prozess der *bestimmten* Integration

$$\int^n f(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \lim \sum^n f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1,\ x_2 + \theta_2 \Delta x_2, \ldots x_n + \theta_n \Delta x_n)\, \Delta x_1 \ldots \Delta x_n$$

ich zu erstrecken hat[232]. Es sind hiermit die allgemeinen Unter-

---

230) Vgl. die Bemerkungen von *Du Bois-Reymond,* J. f. Math. 94, p. 275 (1883); euerdings bei *Ch. Méray,* Par. C. R. 128 (1899), p. 913 eine neue Auffassung es Doppel- (mehrfachen) Integrals.

231) Diese Äusserung von *Du Bois* (ebenda, insbesondere mit Rücksicht uf die uneigentlichen Integrale) scheint auch heute noch nicht unzutreffend.

232) Die Bezeichnungsweise $\int^n f\, dx_1 \ldots dx_n$ an Stelle von $\underbrace{\iint \ldots \int}_{n} f\, dx_1 \ldots dx_n$ ei *F. Lacroix,* traité 3, p. 397.

suchungen über die Theorie der n-fachen Mannigfaltigkeit bezeichnet, wie sie bereits *K. Weierstrass* in seinen Vorlesungen in den sechziger Jahren behandelte, die aber erst durch *G. Cantor* in seinen Arbeiten über unendliche Punktmannigfaltigkeiten (I A 5; II A 1, **21**) zu voller Schärfe ausgearbeitet sind. Dabei wird man, insbesondere in Rücksicht auf die Anwendungen, an einer der Geometrie entlehnten Ausdrucksweise festhalten, wie dies neuerdings in systematischer Weise von *C. Jordan* geschehen ist. Was man dabei als Entfernung zweier Punkte x_i, y_i bezeichnet, ist an und für sich gleichgültig. Man kann darunter $\left|\sum(x_i - y_i)^2\right|^{\frac{1}{2}}$ verstehen; einfacher erscheint aber der von *Jordan* eingeführte Begriff des *écart* $\sum|x_i - y_i|$.[233]) Wird so das Integrationsgebiet hinsichtlich seiner Begrenzung, seiner innern und äusseren Ausdehnung[234]), seiner Messbarkeit (Quadrierbarkeit, Integrabilität) definiert, und der Integrationsprozess zunächst auf quadrierbare Gebiete eingeschränkt, so ergiebt sich die Möglichkeit, ein beliebiges Gebiet E in *Elementargebiete* Δe zu zerlegen und den Beweis zu führen, dass die Bedingung für die Existenz des Integrals wieder die *Riemann*'sche wird, so dass auch hier notwendig und hinreichend ist, dass die Summe der Elemente, in denen die Schwankungen der Funktion grösser als σ sind, durch Verkleinerung der Elemente kleiner gemacht werden kann, als eine noch so kleine Zahl[235]). Dabei gilt wieder der erste Mittelwertsatz[236]).

39. Ermittelung desselben durch successive Integration. Insbesondere für das eigentliche Doppelintegral hat schon *Du Bois-Reymond* die wesentlichsten Gesichtspunkte skizziert. Während der Hauptsatz, dass ein solches durch zwei einfache, in der Reihenfolge vertauschbare Integrationen nach x und y gefunden werden kann, bei ihm auf einer allgemeinen Grenzwertformel beruht, suchte *Harnack*[237]) durch direkte Summationsbetrachtung diesen Satz zu begründen[238]). Dabei findet aber die begriffliche Schwierigkeit statt, dass

---

233) *Jordan,* Cours 1, p. 18. Vgl. II A 1, **21** u. Fussn. 233.

234) *O. Stolz,* Math. Ann. 23, 1884, p.. 152; Wien. Ber. 106[2a], 1897, p. 461 *Jordan,* Cours 1, p. 28 (étendue extérieure et intérieure d'une domaine); champ mésurable p. 78; vgl. die Bemerkungen bei *Harnack-Serret,* 2[1], p. 221, 267.

235) *Thomae*, Einl. p. 33 für das Doppelintegral; desgl. *O. Stolz,* Math Ann. 26, p. 90 (1884).

236) *Thomae,* Einl. p. 34.

237) *P. du Bois-Reymond,* J. f. Math. 94, p. 277—279. *Harnack-Serret* 2[1], p. 284, Vervollständigung beider Beweismethod. bei *Pringsheim*, Münch. Ber 28, p. 69 (1898).

238) Aus der Beziehung $\int dx \int f . dy = \int dy \int f . dx$ darf, auch wenn durch-

die *Existenz* des *Riemann*'schen einfachen Integrals nach einer der Variablen unbekannt ist, so dass die bei *Harnack* gegebene Darstellung als definierter Integrationsprozess gar nicht *ausführbar* ist. Daher bewies *Stolz*[239]) zunächst den folgenden spezielleren Satz: Wenn für das Integral $J = \int f(x, y)\, dx\, dy$ bezogen auf eine „konvexe“ Fläche mit den extremen Abscissen (und Ordinaten) a, a'; (b, b') $f(x, y)$ als Funktion von x auf jeder zur x-Axe parallelen Sehne im allgemeinen integrierbar ist, so ist die auf solche Art erhaltene Funktion

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$$

im Intervalle (b, b') nach y integrierbar und liefert den Wert J.

In voller Allgemeinheit aber hat erst *C. Jordan*[240]) durch Unterscheidung des *Darboux*'schen oberen und unteren Integrals die begriffliche Reduktion des n-fachen Integrals auf n successive Integrationen nachgewiesen und insbesondere für das Doppelintegral völlig ausgeführt, während wieder sein spezielles Theorem über die Ausführung[241]) des Integrationsprozesses die *Stolz*'sche Bedingung unnötig einengt. Dem gegenwärtigen Standpunkt der Theorie scheint es zu entsprechen, wenn unter Voraussetzung der Existenz des Doppelintegrals im Sinne *Riemann*'s, und unter Anwendung der Nr. **32** erwähnten Bezeichnung das Theorem (der Einfachheit halber für ein Rechteck x_0, x; y_0, y) so gefasst wird, dass *stets*

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f \cdot dx\, dy &= \int_{y_0}^{y} dy \int_{\underline{x_0}}^{x} f \cdot dx = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{\overline{x}} f \cdot dx \\ &= \int_{x_0}^{x} dx \int_{\underline{y_0}}^{y} f \cdot dy = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{\overline{y}} f \cdot dy\end{aligned}$$

gesetzt werden kann[241a]).

---

weg $f \geqq 0$ nicht auf die Existenz von $\int\int f \,.\, dx\, dy$ geschlossen werden: *Pringsheim*, Münch. Ber. 29, p. 47 (1899). Bedingung für die Existenz jener Beziehung *ohne* vorausges. Existenz von $\int\int f \,.\, dx\, dy$ bei *C. Arzelà,* Bologna Mem. (5), 2, p. 143 (1892). Erstes Beispiel, bei dem *trotz* $f \geqq 0$ *nur* $\int dx \int f \,.\, dy$ existiert, dagegen *nicht* $\int dy \int f \,.\, dx$, $\int\int f \,.\, dx\, dy$, bei *Thomae*, Ztschr. Math. Phys. 23, p. 67 (1878), allgemeiner bei *Pringsheim,* a. a. O. p. 52.

239) *O. Stolz,* Math. Ann. 26, p. 93 (1884).

240) *C. Jordan,* J. de math. (4) 8, p. 69 (1892); Cours 1, p. 42—45, unabhäng. v. *Jordan* auch bei *Arzelà,* a. a. O. p. 136.

241) Ebenda 1, p. 45.

241a) *Pringsheim*, Münch. Ber. 28, p. 69, (1898). Erstes Beispiel, wo der

Das Integral mit rechteckigem Gebiet

$$J = \int_a^x \int_b^y f\,dx\,dy$$

insbesondere ist eine stetige Funktion der beiden Variabeln, welche partielle Derivierte nach x und y und ein totales Differential besitzt, und es ist auch der Satz

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial x} = f$$

gültig, falls in der Umgebung von x, y f eine stetige Funktion der beiden Variabeln x, y ist[242]).

40. Integrale geometrischer und mechanischer Grössen. Der *Inhalt* eines ebenen Flächenstückes, das durch die Gleichungen

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

einer einfachen Mannigfaltigkeit mit der x-Axe bestimmt ist, erhält nun durch diese Betrachtungen seine vollständige *Definition*, ebenso das Volumen eines Körpers. Nicht so unmittelbar ist das der Fall bei der Bogenlänge einer Kurve und der Oberfläche eines körperlichen Raumes. *L. Scheeffer*[243]) hat zuerst ausreichende Kriterien angegeben, unter denen die „Länge" eines Kurvenbogens sich definieren lässt; dieselben sind neuerdings von *C. Jordan*[244]) wiedergefunden und von *E. Study*[245]) verschärft und erweitert worden. Dass die ältere Darstellung des Inhaltsbegriffes einer krummen Fläche Modifikationen erfordert, hat zuerst *H. A. Schwarz* betont[246]); eine auf rein arithmetischen Grundlagen beruhende Entwickelung des zweidimensionalen Kontinuums im Raume ist wohl zuerst von *O. Hölder*[247]) ausgeführt, dessen Arbeit *C. Jordan* unbekannt geblieben zu sein scheint. Die in der *Mechanik*

Satz in dieser Form noch gilt, obschon $\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy$ für unendlich viele pantachische x nicht existiert: *Du Bois-Reymond,* a. a. O. p. 278; allgem. *Pringsheim,* Münch. Ber. 29, p. 42, (1899).

242) *Harnack,* Elemente p. 317, wo der Satz noch etwas allgemeiner gefasst ist.

243) *L. Scheeffer,* Acta math. 5, p. 49 (1885).

244) *C. Jordan,* Cours 1, p. 90—108.

245) *E. Study,* Math. Ann. 47, p. 313 (1896).

246) *H. A. Schwarz,* J. de math. (3) 6, p. 111 (1880), Gesamm. Abh. 2, p. 292; auch bei *Hermite,* Cours d'analyse, éd. 2, p. 35 (1881).

247) *O. Hölder*, Diss. Tüb. (Stuttgart 1882), p. 20 ff., insbesondere p. 31; *Jordan,* Cours 1, préface p. VI und p. 146—150; vgl. auch *Harnack-Serret,* 2^1, p. 294—301.

üblichen Definitionen der Masse, Dichtigkeit und der aus diesen abgeleiteten Begriffe haben ihre genauere Fassung durch *Cauchy* erhalten[248]); aber auch diese werden den schärferen Bestimmungen der Gegenwart sich nicht mehr entziehen können, insbesondere in Rücksicht auf Stetigkeit und Differentiierbarkeit[249]).

41. Transformation der mehrfachen Integrale. Die *formalen Prozesse*, welche erforderlich sind, um ein n-faches Integral

$$\int^n f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

unter der Voraussetzung, dass das Integrationsgebiet etwa auf das durch

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) \gtreqless 0$$

abgegrenzte Gebiet zu erstrecken ist, zu berechnen, sind allgemein wohl zuerst von *Ostrogradsky*[250]) dargestellt worden. Fast immer führt aber dieser primitive Weg wegen der Ermittelung der successiv einzuführenden Integrationsgrenzen zu Weitläufigkeiten, die man durch eine *zweckmässige Gebietseinteilung*, d. h. durch eine *Transformation* zu vermeiden sucht.

Die *Transformation des Doppelintegrales* hat zuerst *Euler*[251]), die des *dreifachen Lagrange*[252]) behandelt, der bereits die ausgeführten Formeln für Polar- und allgemeine krummlinige Koordinaten angiebt. Aber erst *Jacobi*[253]) gab die allgemeine Transformation des n-fachen Integrals unter der Voraussetzung, dass an Stelle der unabhängigen Variabeln x_i eben soviele neue y_i treten, die mit ihnen durch die Beziehungen

$$y_i = \varphi_i(x_1 \ldots x_n), \quad x_i = \psi_i(y_1 \ldots y_n)$$

so verbunden sind, dass zu jedem $x_1 \ldots x_n$ eindeutig definierte Werte der y_i und umgekehrt gehören; so wird

$$\int^n f \cdot dx_1 \ldots dx_n = \int^n f(\psi_1 \ldots \psi_n)\, \Delta\, dy_1 \ldots dy_n,$$

248) *Moigno,* Leçons de mécanique analytique 1 (statique), p. 140. Das von *Lagrange* (oeuvr. 11, p. 85) für solche mehrfache Integrale benutzte Zeichen S ist neuerdings von *C. Jordan* wieder zu allgemeinem Gebrauche eingeführt worden (Cours 1, p. 37).

249) Vgl. z. B. *L. Boltzmann,* Vorl. üb. d. Prinzipe d. Mechanik 1, p. 26 (1896).

250) *M. Ostrogradsky,* J. f. Math. 14, p. 332 (1836).

251) *L. Euler,* *Petr. N. Comm. 14, 1759 [70], p. 72; Inst. calc. int. 4, p. 416.

252) *Lagrange,* Berl. nouv. mém. 1773, p. 125 = oeuvr. 3, p. 624; auch *Laplace,* mécanique céleste 2, p. 3.

253) *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1833) = Werke 3, p. 233; J. f. Math. 22 (1841) = Werke 3, p. 436.

wo Δ die *Jacobi*'sche Determinante

$$\Delta = \frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(y_1 \dots y_n)}$$

nach *Donkin*'s[254]) Bezeichnung ist (I A 2). Da hierbei das Produkt $dx_1 \dots dx_n$ durch $\Delta\, dy_1 \dots dy_n$ zu ersetzen ist, wird man, wenn (wie gewöhnlich) die Integrationen durch *positive* Inkremente vollzogen werden, voraussetzen, dass rechterhand der *absolute* Wert von Δ benutzt wird, der überdies an keiner Stelle des Gebietes *Null* sein darf. Diese bereits von *Euler*[255]) gemachte, von *Jacobi* nicht ausdrücklich wiederholte Bemerkung hat neuerdings *Kronecker*[256]) wieder hervorgehoben. Zugleich hat man die *Jacobi*'sche, auf dem Zusammenhang korrespondierender Differentiale beruhende Ableitung durch andere Betrachtungen ersetzt, wobei für zwei Variable insbesondere der *Green*'sche Satz zur Anwendung kommt[257]). Hierbei wird man im allgemeinen die Transformation so zu wählen haben, dass die Bestimmung der Integrationsgrenzen für die einzelnen Variabeln übersichtlich wird. Von diesem Gesichtspunkt aus gewinnen die *Einteilungen mehrdimensionaler Gebilde durch krummlinige Koordinaten* Bedeutung; namentlich das von *Jacobi* erfolgreich verwandte System der *elliptischen Koordinaten*[258]). Andererseits sind hier zu erwähnen die besonderen Transformationen, welche zur Ermittelung der Oberfläche des Ellipsoids und verwandter Aufgaben von *Catalan*, *Schlömilch* und anderen benutzt sind[259]).

42. Der Diskontinuitätsfaktor von Dirichlet. Auf einem anderen Wege suchte *P. L. Dirichlet*[260]) die Schwierigkeiten zu beseitigen,

254) *W. F. Donkin*, Lond. Trans. (1854) 144, p. 72.

255) *Euler*, Inst. calc. int. 4, p. 433 (*Salomon* 4, p. 409).

256) *Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 235; vgl. auch dessen Bemerkungen J. f. Math. 72, p. 155 (1869); *É. Picard*, traité 1, p. 131.

257) *J. A. Gmeiner*, Monh. 4, p. 217 (1893); desgl. die interessante, auch der Erweiterung fähige Darstellung von *E. Goursat* (Bull. Darb. (2) 18, p. 72 [1894]). Vgl. auch *C. Jordan* (J. de math. (4) 8, p. 94 [1892] und Cours 1, p. 138—146), sowie die Ableitung bei *J. Bertrand*, Calcul intégral p. 225.

258) *J. Haedenkamp*, J. f. Math. 22, p. 184 (1841); *Jacobi*, Vorles. über Dynamik 1842/43 = Werke, Supplementbd., p. 198 ff.

259) Vgl. die Arbeiten von *E. Catalan*, J. de math. (1) 4, p. 323; *R. Lobatto*, ib. (1) 5, p. 115; *O. Schlömilch*, Ztschr. Math. Phys. 1, p. 376; 6, p. 207, sowie die Darstellung bei *G. F. Meyer*, Vorl. üb. best. Integrale, p. 437—549 (1871); *Moigno*, Calcul intégral 2^1, p. 228—256; *L. Natani*, Höhere Analysis, p. 137 ff.

260) *P. L. Dirichlet*, Berl. Ber. (1834) = Werke 1, p. 383; auch J. de math. (1) 4, p. 164 (1839).

welche die Begrenzung des Gebietes hervorruft. Handelt es sich z. B. um das Integral

$$\int^{3} \varphi \cdot f \cdot dx\,dy\,dz,$$

ausgedehnt über das Innere S der etwa ganz im Endlichen liegenden geschlossenen Fläche F, so kann man an Stelle von F jede andere S völlig umschliessende Begrenzung Σ wählen, falls man an Stelle von φ eine Funktion Φ substituiert, die im Innern von S mit φ übereinstimmt, in dem Gebiet zwischen S und Σ aber gleich Null ist. Eine solche Funktion heisst nach *Dirichlet* ein *Diskontinuitätsfaktor*[261]). Dabei wird man z. B. Σ als eine Kugel ansehen können; in den meisten Fällen wird es sich aber empfehlen, Σ ins unendliche auszudehnen; allerdings werden dabei die Integrale uneigentliche, und die Berechtigung der weiteren Operationen ist jedesmal besonders zu rechtfertigen. Solche Diskontinuitätsfaktoren liefert der *Cauchy*'sche Fundamentalsatz der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln[262]), die Theorie der *Fourier*'schen Integrale (II A 8), die Potentialtheorie[263]) etc. *Dirichlet* selbst[264]) hat zunächst den Faktor

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos(g\varphi)\,d\varphi = \begin{cases} 1, & 0 < g < 1, \\ \frac{1}{2}, & g = 1, \\ 0, & 1 < g, \end{cases}$$

d. h. den reellen Teil von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\, e^{ig\varphi}\,d\varphi$$

angewandt, so in der Abhandlung über die Attraktion des Ellipsoids, wo das über alle positiven Koordinatenwerte

$$g = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 < 1$$

erstreckte Potential

$$-\frac{1}{p-1}\int \frac{dx\,dy\,dz}{\varrho^{p-1}}$$

in die Form

$$-\frac{2}{\pi(p-1)}\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(g\varphi)\,\frac{dx\,dy\,dz}{\varrho^{p-1}}$$

---

261) Oder diskontinuierlicher Faktor, Werke 1, p. 400, 384.

262) Vgl. z. B. *Kronecker,* Vorlesungen 1, p. 175.

263) Ebenda in ganz allgemeiner Form, p. 271.

264) *Dirichlet,* a. a. O.

verwandelt wird, dessen Behandlung freilich noch einen gleich zu besprechenden Kunstgriff erfordert, durch den die Entfernungspotenz $\varrho^{-(p-1)}$ in das Integral einer Exponentialfunktion verwandelt wird; desgleichen bei dem *Dirichlet*'schen[265]) durch Γ-Funktionen ausdrückbaren Integral. Zur Bestimmung des Potentials zweier Ellipsoide gebrauchte *Mertens*[266]) den schon von *Dirichlet*[267]) angegebenen Faktor

$$\frac{\Gamma(m)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\,\frac{e^{(k+i\lambda)x}}{(k+i\lambda)^m} = \begin{cases} 0, & x<0, \\ x^{m-1}, & x>0, \end{cases}$$

wo k und m positiv sind. Den Fall $m=1$ hat *Kronecker*[268]) in seinen Vorlesungen in einer Reihe von Anwendungen behandelt. In naher Beziehung zu dem *Dirichlet*'schen Verfahren steht übrigens die *Cauchy* von *Moigno*[269]) zugeschriebene Methode, bei welcher in dem Integrale

$$J = \int^{n} \frac{P}{\mu Q}\,dx\,dy\,dz\ldots,$$

wenn der reelle Teil von μ positiv ist und Q sein Zeichen nicht wechselt, für $Q>0$

$$\frac{1}{\mu Q} = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-Qt}\,dt$$

gesetzt wird, was zum Ziele führt, wenn P ein Produkt, Q eine Summe von Funktionen je *einer* der Variabeln $x, y\ldots$ ist, dagegen die Bestimmung der Integrationsgrenzen (im allgemeinen) nicht vereinfacht und daher auch fast immer nur bei konstanten (ins unendliche ausgedehnten) Grenzen Verwendung findet.

III. Anwendungen.

43. Integration totaler Differentiale. Die *notwendige* Bedingung, damit

$$P\,dx + Q\,dy$$

---

265) *Dirichlet*, a. a. O. p. 389. Dies Integral ist alsbald von *J. Liouville* (J. de math. (1) 4, p. 225) direkt ermittelt, ja noch verallgemeinert; vgl. *O. Schlömilch*, Ztschr. Math. Phys. 1, p. 75; Lpz. Ber. 1857, p. 22; *R. Most* (Ztschr. Math. Phys. 14, p. 422); man vgl. auch *Liouville*'s Arbeiten J. de math. (2) 1, p. 82. 289 (1856), sowie *G. F. Meyer*, p. 564—628.

266) *F. Mertens*, J. f. Math. 63, p. 360 (1864).

267) *Dirichlet*, a. a. O. p. 401. In etwas anderer Form tritt dieser Faktor bei *F. G. Mehler* (J. f. Math. 40, p. 321 [1862]) auf.

268) *Kronecker*, Vorlesungen 1, p. 215—228.

269) *Moigno*, Calcul intégral 2, p. 256 (1844); übrigens schon bei *Dirichlet* a. a. O. p. 386.

ein totales Differential dz sei, ist nach dem Fundamentalsatze der zweiten Derivierten (**10**)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dass sie auch *hinreichend* ist, damit die Integralfunktion z existiere, war schon *Euler*[270]) bekannt, der

$$z = \int P\,dx + \psi$$

setzt, wenn ψ aus der Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx$$

genommen wird, welche einen von x unabhängigen Wert für $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ liefert.

Und ebenso ist der Differentialausdruck

$$\sum X_i\,dx_i$$

ein exaktes Differential, wenn die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

bestehen. Jedoch zeigte *Jacobi*[271]) mit Hülfe seiner Identität, dass diese Bedingungen auf $2n-1$ andere reduziert werden können. Da die Ermittelung der Integralfunktion auf dem *Euler*'schen Wege umständlich wird, verlangt *Cauchy*[272]) die Bestimmung derjenigen Funktion z, welche sich für $x_i = x_i^0$ auf eine Konstante z^0 reduziert, und gab die Lösung in der Form

$$z = z_0 + \int\limits_{x_1^0}^{x} X_1^{(0)}\,dx_1 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} X_2^{(1)}\,dx_2 + \int\limits_{x_3^0}^{x_3} X_3^{(2)}\,dx_3 + \cdots,$$

wobei in $X_k^{(k-1)}$ jedesmal $x_1, x_2 \ldots x_{k-1}$ durch $x_1^0 \ldots x_{k-1}^0$ zu ersetzen sind.

Durch die auf der Anwendung des *Green*'schen Satzes beruhende Betrachtung bei *Lipschitz*[273]) hat *Morera*[274]) dem *Cauchy*'schen Satze eine andere Fassung gegeben, indem er, falls die X_i eindeutige end-

270) *Euler*, Inst. calc. int. 3, p. 517 (Petersb. 1770).

271) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 23 (1842) = Werke 4, p. 250.

272) *Moigno*, 2^1, p. 489.

273) Analysis 2, p. 569.

274) *G. Morera*, Math. Ann. 27, p. 403 (1886). Über die Übertragung der Differential- und Integraloperationen auf das komplexe Gebiet vgl. man die (erste) systematische Darstellung bei *O. Stolz*, Grundz. 2, p. 1—208.

liche und stetige Funktionen mit integrabelen Derivierten in einem gewissen *Monodromiegebiete* G sind, nachweist, dass

$$\int \sum X dx$$

vom Integrationswege den obigen Bedingungen zufolge unabhängig wird, sobald derselbe ganz innerhalb G verläuft. Man kann daher $x_i = x_i^0 + (x_i - x_i^0)t$ setzen und einfach das Integral der Funktion *einer* Variabeln t suchen.

44. Integrabilität der Differentialausdrücke. Eine weitere Fortbildung erhalten die formalen Integrationsprozesse durch die Betrachtung von Differentialfunktionen mit höheren Derivierten. Schon *Euler*[275]) hatte mit Hülfe der Variationsrechnung gefunden, dass die notwendige und hinreichende Bedingung, damit

$$f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})$$

ein vollständiges Differential nach x ist, durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right) - \cdots = 0$$

ausgedrückt wird. *Lagrange*'s Bemerkung[276]), dass f notwendig von der Form

$$P + Q y^{(n)}$$

sein müsse, führte zu dem weiteren Satze, dass die *Euler*'sche Bedingung n einzelnen Bedingungen äquivalent ist. Erst *Joachimsthal*[277]) aber gab den Beweis für diese Behauptung und fügte hinzu, dass diese Bedingungen sich auf $\frac{1}{2}(n+1)$ resp. $\frac{n}{2}+1$ reduzieren, jenachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Es bestehen keine Hindernisse, die von *Euler* sofort auf den Fall, wo f mehrere von x abhängige Funktionen $y, z, u \ldots$ und deren Derivierte enthält, verallgemeinerten Untersuchungen, bei denen an Stelle der einen Gleichung dann ebenso viele entsprechende für $y, z, u \ldots$ treten, auf Funktionen mit zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen auszudehnen.

---

275) *Euler,* Petrop. N. Comm. 15, p. 35. Bereits von *Lexell, Condorcet* direkt bewiesen. Andere Beweise bei *Lagrange*, oeuvr. 10, p. 365, *J. Bertrand,* J. de math. 14, p. 123 (1848); noch allgemeiner daselbst von *F. Sarrus*, p. 131. Über *Sarrus* Arbeiten vgl. Gerg. Ann. 14, p. 179 (1823); Par. C. R. 1, p. 115 (1835); 28, p. 439 (1849).

276) Leçons sur le calcul des fonctions, p. 421 = oeuvr. 10, p. 374.

277) *F. Joachimsthal,* J. f. Math. 33, p. 95 (1848); Programm von 1844. Zu demselben Resultat gelangte gleichzeitig *J. L. Raabe,* J. f. Math. 31, p. 195, 212 (1846).

45. Der Satz von Green in der Ebene. Als *Green*'sche Sätze bezeichnen manche[278]) gegenwärtig alle diejenigen Theoreme, durch welche über ein *Gebiet* E erstreckte Integrale in solche transformiert werden, die sich auf die *Begrenzung* von E beziehen. Betrachtet man erstens das Integral

$$J = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy,$$

ausgedehnt über ein zunächst einfach zusammenhängendes ebenes Flächenstück (III A 4) E, dessen Randelemente durch die Charakteristik D bezeichnet werden, unter der Voraussetzung, dass jeder der beiden Differentialquotienten eine in E integrabele Funktion ist[278a]) und P und Q stetig sind, so erhält man durch partielle Integration

$$J = -\int (P D(x) + Q D(y))$$

bei *positiver* Umlaufung von E.[279]) Diese Gleichung spricht den *Green*'schen Satz für jede (allerdings erst auf die Form $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ zu bringende) Funktion f aus. Besteht daher im ganzen Innern — etwa mit Ausnahme von Punkten mit der Flächengrenze Null[279a]) — die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

so ist das Integral

$$W = \int P D(x) + Q D(y) = 0.$$

Dieses Theorem, den *Cauchy*'schen *Integralsatz*[280]) kann man auch dahin auffassen, dass das Kurvenintegral[280a]) W, genommen zwischen irgend zwei in E liegenden Punkten A und B, *unabhängig* von dem *Integrationswege* wird; es erhält bei festem A einen nur von B ab-

---

278) *A. Harnack,* Elemente p. 327; *E. Pascal,* Calcolo integrale p. 156. Als Prinzip indess so *nicht* bei *G. Green* (1828), dort nur der Satz Nr. 47 des Textes (J. f. Math. 44, p. 360).

278a) Nach *Pringsheim*, Münch. Ber. 29, p. 55 (1899) genügt schon die Existenz der *Doppel*integrale $\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$, $\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$; eine Voraussetzung über $\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dy$, $\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx$ ist dann unnötig.

279) *B. Riemann,* Werke p. 14 (1851).

279a) Genauere Untersuchung bei *Pringsheim,* Münch. Ber. 25, p. 59 (1895).

280) Par. C. R. 23, p. 251 (1846).

280a) Der Begriff des Kurvenintegrals ist wohl erst durch die Betrachtung der komplexen Ebene entstanden, seine ausführliche Definition z. B. bei *É. Picard,* traité 1, p. 70. Vgl. auch *Pringsheim,* Münch. Ber. 25, p. 48 (1895).

hängigen Wert und stellt, abgesehen von den oben ausgeschlossenen Stellen, eine Funktion der oberen Grenze vor, deren partielle Derivierte P und Q sind[281]), womit man auf die Integration der totalen Differentiale zurückgeführt wird. Dass auch umgekehrt nur dann, wenn die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ erfüllt ist, W unabhängig vom Wege wird, hat *Picard* durch Variation von W, *Pringsheim* auf elementarere Weise gezeigt[282]).

46. Der Satz von Stokes. Eine ähnliche Betrachtung bezieht sich auf das über den zunächst einfach zusammenhängenden Raum R erstreckte Integral

$$J = \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

welches unter der Voraussetzung, dass die äussere Normale der Oberflächenelemente der Begrenzung $d\omega$ mit den Axen der Koordinaten die Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bildet, in die Gestalt des über die Begrenzungsfläche erstreckten Integrales

$$J = \int (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,d\omega = W$$

gebracht wird[283]). Ist also im ganzen Innern von R

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

so ist W stets gleich Null. Setzt man zur Erfüllung der letzten Gleichung

$$X = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

so wird das so erhaltene Integral V, erstreckt über ein Flächenstück E im Innern von R, dessen Begrenzung L ist, nur abhängig sein von der Natur der Kurve L.[284]) Den Beweis hierfür hat zuerst *Stokes*[285]) gegeben, welcher zeigte, dass in der That die Gleichung

$$V = -\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

281) Vgl. *J. Thomae,* Einl. p. 41; auch bei *Picard,* traité p. 81, *Pringsheim*, a. a. O. p. 63.

282) *É. Picard,* traité 1, p. 75; *Pringsheim,* a. a. O. p. 60.

283) Eine bloss formale Verallgemeinerung erhält man, wenn statt X, Y, Z die mit σ multiplizierten analogen Werte X', Y', Z' eingesetzt werden.

284) Die Umkehrung auch hier bei *É. Picard,* traité 1, p. 115.

285) *G. Stokes*, *A Smiths prize paper, Cambridge university calendar (1854); vgl. *Thomson* u. *Tait,* treatise on natural philosophy 1, p. 143, ed. 2 (1879).

besteht, wobei das Integral jetzt in bestimmtem Sinne[286]) über L zu erstrecken ist. Seine hydrodynamische Deutung als displacement function[287]), circulation und surface integral of rotation[288]) kann hier nur erwähnt werden. Die formale Verallgemeinerung auf krummlinige Koordinaten allgemeinster Art hat *Picard* durchgeführt[289]); ähnliche Betrachtungen finden sich neuerdings bei vielen anderen Autoren[290]).

47. Der Satz von Green und seine Anwendungen. Aus der Gleichung $J = W$ entspringt nun endlich (über die analoge Betrachtung in Bezug auf die Gleichung

$$\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = -\int P\, dx + Q\, dy$$

(vgl. II B 1) durch die Annahme

$$X = U\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = U\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = U\frac{\partial V}{\partial z}$$

der spezielle *Green*'sche Satz im Raume; nämlich

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz + \int U\Delta(V)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \int U\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma\right] d\omega,$$

welcher unter der Voraussetzung stetiger erster Derivierten und eines endlichen integrabelen $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ jedenfalls gültig, anderenfalls aber weiter zu untersuchen ist. Durch Vertauschung von U mit V und unter Benutzung der gebräuchlichen Abkürzungen folgt dann auch das Theorem[291])

286) Z. B. *Picard,* traité p. 118; desgl. *G. Königs,* J. de math. (4) 5, p. 324 (1889). Der bei *H. Hankel* (Preisschrift, Gött. 1861) gegebene Beweis ist wohl auf *Riemann*'s Vorlesungen zurückzuführen (*Riemann,* Vorlesungen über Schwere etc., 1861, herausg. v. *K. Hattendorff,* 2. Ausg. p. 252 [Hann. 1880]); ein anderer Beweis bei *J. C. Maxwell,* treatise on electricity etc. 1, p. 26 (1873).

287) *Thomson* u. *Tait,* treatise 1, p. 144.

288) *W. Thomson,* on Vortex motion, Edinb. Trans. 25, p. 217—260 (1869); vgl. auch *W. K. Clifford,* Elements of dynamics, London 1878, p. 197.

289) *É. Picard,* traité 1, p. 115 und J. de math. (4) 5 (1889), p. 145; bei diesen Untersuchungen handelt es sich um exakte Differentiale auf einer krummen Fläche im Sinne der Funktionentheorie.

290) S. z. B. **A. Maggi,* Atti dell' Accademia di Catania (4) 4, 1892; *Ph. Gilbert,* Brux. soc. scient 16, A, p. 2 (1892) etc.

291) Weitere formelle Ausdehnung des *Green*'schen Satzes bei *Thomson* u. *Tait,* treatise 1, p. 167; seine Ausdehnung auf n Variable bei *C. Neumann,*

$$\int (U\Delta(V) - V\Delta(U))\,dx\,dy\,dz = \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\omega,$$

vgl. II A 7 b.

Analytische Anwendungen des Satzes auf die Transformation von Differentialausdrücken. Während *Laplace* die Transformation von ΔV für Polarkoordinaten durch direkte Rechnung ausführte[292]), zeigte *Jacobi*, wie dieselbe ganz allgemein durch Variation des ersten Differentialparameters von *Lamé*[293]) auch für eine beliebige Zahl von Variabeln sich ergiebt. Die eigentliche Quelle aller dieser und ähnlicher in der mathematischen Physik erforderlichen Transformationen mittelst der Prinzipien der Invariantentheorie gab im Anschluss an *E. B. Christoffel*'s Untersuchungen[294]) jedoch erst *Gundelfinger*[295]). Einen Teil dieser Fragen beantwortet[296]) nun auch der *Green*'sche Satz (und ähnlich das *Gauss*'sche Theorem[297]), (vgl. II A 7 b), da nach der Gleichung

$$\int \Delta(V)\,dx\,dy\,dz = -\int \frac{\partial V}{\partial n}\,d\omega$$

die Bedingung für das Verschwinden von ΔV auf das des einfacheren Oberflächenintegrales reduziert werden kann, welches nun für ein durch krummlinige Koordinaten begrenztes Raumelement auszuführen ist[298]); wie man sieht, leistet hier die geometrische Auffassung dasselbe, was in allgemeinerer Gestalt durch die Invariantentheorie der Differentialausdrücke (II A 4) geliefert wird.

48. Die Differentiation zu allgemeinem Index; ältere Arbeiten. Wir gedenken hier noch der Bestrebungen, den Differentiations- und Integrationsprozess unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen, *der Differentiation mit allgemeinem Index*, durch welche eine allgemeine formale Behandlung des bezüglichen Problems erreicht werden soll.

Um den Differentialquotienten zu beliebigem, auch komplexem, Index μ zu definieren, d. h. Operationen zu gewinnen, die für ganze

---

Ztschr. Math. Phys. 12, p. 117 (1867); sowie *E. Beltrami*, Bol. mem. (2) 8, 1868; *A. Gutzmer*, J. de math. 5, p. 420 (1889).

292) *Laplace*, Par. Mém. 1782, p. 135.

293) *G. Lamé*, J. éc. polyt. cah. 23, p. 215 (1834); *Jacobi*, J. f. Math. 36, p. 113 (1848) = Werke 2, p. 199.

294) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 70, p. 46 (1869).

295) *S. Gundelfinger*, J. f. Math. 85, p. 295 (1878).

296) *E. Heine*, Kugelfunktionen 1, p. 307, 2. Ausg. 1878.

297) *Riemann*, Vorlesungen über Schwere etc. p. 128.

298) Vgl. die Note von *W. Fr. Meyer*, Math. Ann. 26, p. 513 (1885)

positive resp. negative μ sich auf die μ-fache Differentiation resp. Integration reduzieren und soweit wie möglich dem *Leibniz*'schen Algorithmus sich anschliessen, kann man entweder eine geeignete für positive μ bestehende Formel, wie z. B.

(1) $$D_x^\mu x^n = n(n-1)\cdots(n-\mu+1)x^{n-\mu},$$ [299]

oder

(2) $$D_x^\mu \cos x = \cos\left(x + \mu\frac{\pi}{2}\right),$$ [300]

(3) $$D_x^\mu e^{mx} = m^\mu e^{mx}$$

für beliebige μ als gültig ansehen, oder aber auf den Begriff des höheren Differentialquotienten resp. des Integrals als Grenzwert zurückgehen. Auf dem ersten Gesichtspunkt beruhen die Betrachtungen von *Leibniz* und *Joh. Bernoulli*[301]), *Euler*[302]), *Fourier*[303]), *Lagrange*[301]) und anderen. Den Übergang zur zweiten Behandlungsweise leiten die Arbeiten *Liouville*'s[304]) ein, der von der Formel (3) zunächst ausgehend, zu der Definition

(4) $$D_x^\mu f(x) = (-1)^\mu \lim_{h=0} h^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{\mu}{k-1} f(x+(k-1)h)$$

gelangt[305]), aus der weiter sich die Integraldarstellung

(5) $$D_x^\mu f(x) = \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty f(x+t)\, t^{-(\mu+1)}\, dt, \quad \mu \mathrel{\overline{\overline{<}}} -1,$$

ergiebt. Bei *Liouville* ist zu beanstanden die vorausgesetzte Entwickelbarkeit der Funktion nach Potenzen der Exponentialfunktion, ferner, dass der Begriff der unbestimmten Integration festgehalten wird, wodurch die Hinzufügung besonderer Funktionen, wie sie auch schon bei der mehrfachen Integration auftreten, der *komplementären Funktionen*, nötig wird[306]).

---

299) *L. Euler,* Petrop. Comm. 5, p. 55 (1730/31); vgl. *Lacroix,* 3, p. 409; so auch bei *Ph. Kelland,* Edinb. Trans. 14, p. 567, 604 (1840); 16, p. 241 (1849); desgl. *A. Buchwaldt,* Tydskrift (3) 5, p. 1 u. 95 (1875).

300) *S. B. Fourier,* Théorie de la chaleur (1822) = oeuvr. 1, p. 508.

301) Die ältere Litteratur bei *C. W. Borchardt,* Berl. Ber. 1868 = Werke p. 483, 486.

302) *Euler,* a. a. O.

303) *Fourier,* a. a. O.

304) *J. Liouville,* J. éc. polyt. cah. 21, p. 1 u. 71 (1832); cah. 24, p. 17 (1835); cah. 25, p. 58 (1836); desgl. J. f. Math. 11, p. 1; 12, p. 273 (1834); 13, p. 219 (1835).

305) *Liouville,* J. éc. polyt. cah. 21, p. 107.

306) A. a. O. p. 95.

49. Die Arbeiten von Riemann, Grünwald, Most und anderen. Diese Beschränkungen und Komplikationen sind, wenn man von *B. Riemann* absieht, der in einer Jugendarbeit dieselben auf einem anderen Wege zu vermeiden suchte[307]), zuerst von *A. K. Grünwald*[308]) beseitigt, der auf Grund von *Liouville*'s Formel (4) den Grenzwert

$$\lim_{h=0} F(ux\xi h) = \lim_{h=0} h^{-\xi}\Big[f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-h) + \binom{\xi}{2} f(x-2h) \\ \cdots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-nh)\Big],$$

in welchem x, a, ξ komplexe Zahlen, n ganz und positiv so ins unendliche geht, dass $x - nh = u$ wird, als die begrenzte, auf dem geradlinigen Intervall x, u genommene ξ^{te} Ableitung der (eindeutigen endlichen und stetigen) Funktion $f(x)$ bezeichnet[309]). Dabei ergiebt sich die Formel[310])

$$D_u^{x\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x f(t)\,(x-t)^{-(\xi+1)} dt, \quad \Re(\xi) \lesseqgtr -1,$$

und damit die schon von *Riemann*[311]) erhaltene Erweiterung des *Liouville*'schen Integrals, dessen Grenzen x, ∞ sind. Für andere komplexe ξ ergiebt sich ein weitläufigerer Ausdruck[312]). *R. Most*[313]) ging an Stelle von (4) von dem Grenzwert aus, durch den das mehrfache bestimmte Integral definiert werden kann; wichtiger erscheint aber die bei ihm und *Grünwald*'s, *Letnikoff*'s späteren Arbeiten[314]) auftretende Benutzung des komplexen Integrals, durch welches der ξ^{te} Differentialquotient von vornherein nach *Cauchy* definiert werden kann. So ergiebt sich die allgemeine Formel[315])

$$D_n^{x-\xi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\xi)} \int_u^x \frac{(x-t)^{\xi-1}}{1-e^{2\pi i\xi}} f(t)\,dt,$$

bei der das Integral um den Verzweigungspunkt x auf beliebigem

307) *B. Riemann* [1847], Werke p. 332.

308) *A. K. Grünwald,* Ztschr. Math. Phys. 12, p. 441 (1867).

309) A. a. O. p. 451.

310) p. 455. $\Re(\xi)$ bezeichnet den reellen Teil von ξ.

311) *Riemann,* a. a. O. p. 340.

312) *Grünwald,* a. a. O. p. 457.

313) *R. Most,* Ztschr. Math. Phys. 16, p. 190 (1871).

314) *A. W. Letnikoff,* vgl. Fortschr. d. Math. 6, p. 167; 14, p. 206; *Grünwald,* Prag. Ber. 1880, p. 276; desgl. *H. Laurent,* Nouv. Ann. (3) 3, p. 240 (1883).

315) *Most,* a. a. O. p. 193.

Wege von u aus auf einer Schleife geführt wird. Für $\Re(\xi) > 0$ kann dasselbe durch ein gewöhnliches Integral ausgedrückt werden; andernfalls ist dasselbe durch partielle Integration in geeigneter Weise umzuformen. Für diesen Prozess gelten nun z. B. die Formeln[316])

$$D_{-\infty}^{x\,\xi} e^{\alpha x} = \alpha^{\xi} e^{\alpha x},$$

$$D_{+\infty}^{x\,\xi} e^{-\alpha x} = (-\alpha)^{\xi} e^{-\alpha x}, \quad x > 0,$$

womit zugleich die bei *Liouville* auftretenden Widersprüche beseitigt werden, während die formale Gleichung[317])

$$D_u^{x\,\nu} D_u^{x\,\mu} f(x) = D_u^{x\,\nu+\mu} f(x)$$

nur unter gewissen Einschränkungen bestehen bleibt und im allgemeinen μ und ν auch nicht vertauscht werden dürfen.

Unter den zahlreichen neueren Behandlungen des Gegenstandes, die sich auf formal verschiedene Gesichtspunkte, resp. die von *Grünwald* nicht behandelte Erweiterung auf Funktionen beziehen, die bei u nicht mehr endlich und eindeutig sind, nennen wir noch die Arbeiten von *K. Bochow*[318]), *P. Lindner*[319]) und insbesondere *A. Krug*[320]).

50. Die mechanische Quadratur. Da ein bestimmtes Integral sich im allgemeinen nicht durch zu bequemer Berechnung geeignete Formeln ausdrücken lässt, ist es die *Aufgabe der mechanischen Quadratur*, Methoden zur näherungsweisen Berechnung der bestimmten Integrale anzugeben. Man kann hier dreierlei verschiedene Gesichtspunkte unterscheiden: 1) die elementaren Summationsmethoden, 2) die durch *Gauss* nova methodus eingeschlagene Richtung, 3) die *Euler*sche Summationsformel[321]); über die letztere siehe I E.

---

316) p. 197.

317) p. 199.

318) *K. Bochow*, Diss. Halle 1885.

319) *P. Lindner*, Progr. Cöslin 1890, Nr. 125.

320) *A. Krug*, Wien. Denkschr. 57, p. 151 (1889); vgl. auch *E. Schimpf*, Progr. Bochum 1885, Nr. 318, und *v. Schäwen*, Progr. Strasburg i. W.-Pr. 1881 u. 1882.

321) Monographieen: *P. Mansion*, Brux. soc. scient. 2, p. 231 (1881); vgl. *A. Harnack*, Civiling. 28⁴ (1882).

E. Heine, Kugelfunktionen 2, p. 1—29 (1879).

R. Radau, J. de math. (3) 5, p. 283 (1879).

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, St. Petersb. 1891, dtsch. von *T. Friesendorff* u. *E. Prümm*, Leipzig 1896, 1, p. 1—97.

Ch. Possé, Sur quelques applications des fractions continues. Paris 1886.

51. Die elementaren Summationsmethoden entsprechen der Definition des bestimmten Integrals selbst, nach welcher man das Intervall in eine hinreichende Anzahl von Abschnitten zu zerlegen hat. Für den Inhalt eines solchen Flächenstreifens $ABab$ von der Breite $2h$ bildet unter der Voraussetzung, dass die Begrenzung AB stets konkav zur x-Axe liegt, das Trapez $ABab$ eine untere Grenze; eine obere ergiebt sich durch das dem mittleren Punkt C entsprechende Trapez $A'B'ab$, mit dem Inhalte $2hy_2$. Zerlegt man also ein Kurvendiagramm des Inhalts F in $2n$ solche Streifen von der Breite h mit den Ordinaten

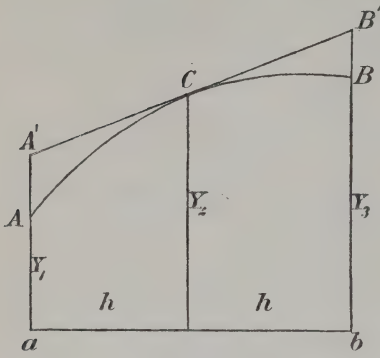


Fig. 1

$$Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_{2n}, Y_{2n+1},$$

so ist eine obere Grenze $M = 2hg$, während als untere Grenze durch verschiedenartiges Zusammenfassen in einfache und Doppelstreifen

$$m_1 = 2gh - hd$$
$$m_2 = 2hu + h[Y_1 + Y_{2n+1}]$$
$$m_3 = \frac{h}{2}[Y_1 + Y_{2n+1} + h(g+u)]$$

für

$$u = Y_3 + \cdots + Y_{2n-1}$$
$$g = Y_2 + Y_4 + \cdots + Y_{2n}$$
$$d = \frac{1}{2}[Y_2 - Y_1 + Y_{2n} - Y_{2n+1}]$$

genommen werden können. Die *Poncelet*'sche Tangentenformel setzt dann

$$F = \frac{1}{2}(M + m_1) = 2hg - \frac{1}{2}hd,$$

die Trapezformel

$$F = \frac{1}{2}(M + m_2) = h\left[(g+u) + \frac{1}{2}(Y_1 + Y_{2n+1})\right];$$

die *Parmentier*'sche Formel[322])

$$F = \frac{1}{3}[2M + m_1] = 2hg - \frac{1}{3}dh,$$

die *Simpson*'sche Formel[323])

322) *Th. Parmentier*, Nouv. ann. 14, p. 370 (1855).

323) *Th. Simpson*, Mathematic. dissertations, p. 109 (London 1743).

$$F = \frac{1}{3}[M + 2m_3] = \frac{1}{3}h[2u + 4g + Y_1 + Y_{2m-1}];$$

der hierbei begangene Fehler ist in den beiden ersten Fällen mit h^2, im dritten und vierten bezüglich mit h^3 und h^4 proportional[324]).

52. Die Gauss'sche Methode, Jacobi's und Christoffel's Arbeiten. Zur Berechnung des Integrals

$$J = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

dessen Grenzen man gleich 0, 1 (*Jacobi*), ± 1 (*Gauss*, *Christoffel*), $\pm\frac{1}{2}$ (*A. Andrae*) wählen kann, ersetzte schon *Newton*[325]) $f(x)$ durch eine für die n Werte $x = a_i$, $i = 1, \ldots n$, mit $f(x_i)$ übereinstimmende ganze Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades $F(x)$. Setzt man

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)\,C, \tag{2}$$

so ist nach der *Lagrange*'schen Interpolationsformel[326])

$$F(x) = \sum \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)}\,\frac{\varphi(x)}{x - a_i} \tag{3}$$

und man erhält als *angenäherten* Wert von J durch Substitution von $F(x)$ an Stelle von $f(x)$

$$J = \sum A_i f(a_i), \tag{4}$$

so dass der Koeffizient

$$A_i = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{(x - a)\,\varphi'(a_i)} \tag{5}$$

unabhängig von $f(x)$ ein für allemal bestimmt werden kann[327]). Ist das Intervall 0, 1 in $n - 1$ gleiche Teile geteilt, so erhält man insbesondere die bereits von *Cotes*[328]) für n bis 11 angegebenen Koeffizienten.

Die Formel (4) liefert den *genauen* Ausdruck von J, so lange

---

324) *Chévilliet*, Par. C. R. 78, p. 1841 (1874); desgleichen a. a. O. *Mansion* u. *Harnack*. Vgl. im übrigen I E.

325) *Newton* (1711): Invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit, Methodus differentialis = Opusc. 1, p. 271, auch p. 275.

326) *Lagrange*, Leçons élémentaires 1795 = oeuvr. 7, p. 285. Vgl. I B 1^a, **3.**

327) Die durch $b - a$ dividierten A_i sind also die *Gewichte*, die den einzelnen $f(a_i)$ beizulegen sind (*Radau*, p. 284).

328) *R. Cotes*, *Harmonia mensurarum, Cantabrigiae 1722; *Gauss*, Werke 3, p. 202.

$f(x)$ eine ganze rationale Funktion, deren Grad $< n$ ist. *Gauss*[329] hat zuerst gezeigt, wie man durch *geeignete Wahl der* a_i erreiche kann, dass die Formel exakt bleibt, falls der Grad $< 2n$ ist[330]).

Ist überhaupt $f(x)$ in eine Potenzreihe

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

entwickelbar, so muss in diesem Falle die Gleichung

$$(6) \qquad \sum A_i[\alpha_0 + \alpha_1 a_i + \alpha_2 a_i^2 + \cdots + \alpha_{2n-1} a_i^{2n-1}] = \left| \alpha_0 x + \alpha_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha_{2n-1} \frac{x^{2n}}{2n} \right|_a^b$$

für alle Werte der α bestehen. Hieraus folgt, falls man die n Grösse a_i als Wurzeln der Gleichung

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

ansieht und $p_k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$ setzt, das Gleichungssystem

$$c_0 p_k + c_1 p_{k+1} + \cdots + c_n p_{n+k} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots n-1;$$

mithin zur Bestimmung der a_i die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n-1} & p_n & \cdots & p_{2n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

doch bleibt dann zu beweisen, dass die Wurzeln dieser Gleichung alle reell sind und in das Intervall a, b fallen[331]).

Setzt man nach *Jacobi*[332])

$$f(x) = Q(x)\varphi(x) + R(x),$$

---

329) *C. F. Gauss*, Gött. Comm. rec. 3, 1816 [1814] = Werke 3, p. 168. Dort übrigens nicht nur die Cotesischen Koeffizienten, sondern auch ihre weiteren Korrektionsglieder; über *Druckfehler* bei *Gauss* vgl. *Heine,* Kugelf. 2, p. 9.

330) Sie besitzt dann den Präzisionsgrad $2n-1$ (*Gauss,* a. a. O. p. 181; *Radau,* a. a. O.)

331) Dies ist zuerst von *F. Joachimsthal*, J. f. Math. 48, p. 386, 411 (1854) mit Hülfe der *Sturm*'schen Reihe gezeigt. Die $2n$ Gleichungen (6) des Textes hat *W. Scheibner* benutzt, um auch die weiteren Resultate von *Gauss* mit Hülfe von Kettenbruchentwickelungen herzuleiten (Leipz. Ber. 8 [1856], p. 73). Die Heranziehung transcendenter Operationen ist überhaupt nicht unbedingt erforderlich, wie neuerdings von *K. Heun* (Progr. 1. höh. Bürgersch. Berl. 1892, p. 3) gezeigt ist; nach *A. Hurwitz* (Fortschr. d. Math. 24, p. 271) besteht der *algebraische Charakter* des Problems darin, eine binäre Form $2n-1^{\text{ter}}$ Ordnung auf eine Summe von n Quadraten linearer Formen zu transformieren.

332) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 1, p. 301 (1826) = Werke 6, p. 5.

wo $R(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $\leqq n-1$, so muss, falls ür jedes den $2n-1^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigende Polynom $f(x)$ die Gleichung

$$J = \int_a^b R(x)\,dx$$

estehen soll,

$$\int_a^b Q(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

ein, daher müssen die n Bedingungen

$$\int_a^b x^h \varphi(x)\,dx = 0, \quad h = 0, \cdots n-1,$$

estehen. Hieraus findet *Jacobi* [333])

7) $$\varphi(x) = C\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x-a)^n (x-b)^n,$$

vomit zugleich evident wird, dass die Wurzeln von $\varphi(x)$ sämtlich eell sind und innerhalb a, b liegen [334]).

Eine eingehendere Untersuchung erfordert nicht allein die Abchätzung des von den Gliedern höherer als $2n-1^{\text{ter}}$ Ordnung von (x) abhängigen Fehlers [335]), sondern auch die Bestimmung der Koeffiienten A_i in (5), welche den aus (6) folgenden Wurzeln a_i entprechen. Die hierauf bezüglichen Resultate von *Gauss* beruhen im vesentlichen darauf, dass für

$$A_i \varphi'(a_i) = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-y} - \varphi(y)\int_a^b \frac{dx}{x-y}, \quad (y = a_i)$$

ie rechte Seite, welche eine *ganze* Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades von y st, als ganzer Teil der nach absteigenden Potenzen von y entwickelten 'unktion

$$\varphi(y) \log\left(\frac{y-b}{y-a}\right)$$

argestellt wird [336]).

Diese Resultate hat zuerst *Christoffel* vereinfacht und erweitert [337]). Jnter Voraussetzung einer Potenzreihe für $f(x)$ setzt sich der *Fehler*

333) In kürzerer Form bei *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1884, p. 841.

334) *Jacobi*, a. a. O. p. 8; doch für die Grenzen 0, 1. Bei *Gauss* erscheint (x) in der Gestalt der hypergeometrischen Funktion $F[n+1, -n, 1, x]$.

335) *Jacobi*, a. a. O. p. 10.

336) Vgl. z. B. *H. Schellbach*, J. f. Math. 36, p. 192 (1836).

337) *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 55, p. 61 (1858).

aus den Partialfehlern Δx^ν, die bei der Berechnung von x^ν ($\nu \gtreqless n$ mit Hülfe von (4) auftreten, zusammen. Setzt man demgemäss

$$\Delta x^\nu = \int_a^b x^\nu dx - \sum_1^n \frac{a_i^{\,\nu}}{\varphi'(a_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x - a_i},$$

so hat man als *erzeugende Fehlerfunktion*[338])

$$(8) \qquad \sum_\nu \frac{\Delta x^\nu}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{\varphi(z)} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{z - x}$$

und, unter Voraussetzung der Grenzen ± 1, falls

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^n} \Gamma(n+1) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

gewählt wird,

$$(9) \qquad A_i = \frac{2}{1 - a_i^{\,2}} \frac{1}{(\varphi' a_i)^2}.$$ [339])

Christoffel's Erweiterung[340]) des *Gauss*'schen Verfahrens besteht darin dass die Funktion $\varphi(x)$ vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade so bestimmt werden soll, dass sie für n gegebene willkürliche Werte verschwindet und die Formel (4) den Präzisionsgrad $2m + n - 1$ erreicht; sie kann nützlich werden, wenn $f(x)$ für irgend welche auch ausserhalb des Intervalles liegende Werte bekannt ist. In Analogie mit (7) ergiebt sich

$$\varphi(x) = \frac{d^m (x^2 - 1)^m V}{dx^m},$$

wo V ein bis auf einen konstanten Faktor durch die n gegebenen Werte bestimmtes Polynom ist.

53. Erweiterungen von Heine, Mehler und anderen. Eine weitere Verallgemeinerung der *Gauss*'schen Methode besteht in der Betrachtung des Integrales

$$(10) \qquad \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx$$

an Stelle von (1). Setzt man wieder für $f(x)$ die Werte (3) ein, so

338) So schon bei *Gauss*, a. a. O. p. 181. Die théorie des fonctions génétrices stammt von *Laplace*, Théor. des probabilités (1812) = oeuvr. 7, p. 8, 88

339) *Christoffel*, a. a. O. p. 69. Daselbst auch der von *Gauss* (Werke 3 p. 192) gefundene Ausdruck für A_i. Tabelle der A_i und a_i für $n = 1$ bis $n =$ bei *Gauss*, Werke 3, p. 192, für $n = 1$ bis $n = 10$ bei *Radau*, a. a. O. p. 301 Tabelle für die Korrektionen, wenn $f(x)$ den $2n^{\text{ten}}$ Grad erreicht, daselbst p. 302

340) *Christoffel*, a. a. O. p. 62.

rgiebt sich für die A_i eine ganz analoge Darstellung; die erzeugende Funktion (8) enthält unter dem Integralzeichen ebenfalls den Faktor $\psi(x)$ und es ist zu bewirken, dass

$$\text{(10a)} \qquad \int \varphi(x)\psi(x)x^h dx, \quad h = 0, \cdots n-1,$$

erschwindet, wenn der Präzisionsgrad $2n-1$ erreicht werden soll[341]. Dazu hat man nach *Heine*[342] für $\varphi(x)$ den n^{ten} Näherungsnenner es in einen Kettenbruch entwickelten Integrals

$$\text{(11)} \qquad \sigma = \int \frac{\psi(x)\,dx}{z-x}$$

u setzen. Und ist $Z(x)$ der zugehörige Zähler, so ergiebt sich als ngenäherter Integralwert

$$\sum \frac{Z(a_i)}{\varphi'(a_i)} f(a_i),$$

obei die Wurzeln a_i von $\varphi(x) = 0$ sämtlich reell sind und innerhalb es Intervalls der Integration liegen, *wenn $\psi(x)$ innerhalb desselben sein eichen nicht wechselt*, wie jetzt vorausgesetzt werden soll. Den Fall $= (1-x)^\lambda (1+x)^\mu$ hatte (Grenzen ± 1) mit der notwendigen Bengung $\lambda, \mu > -1$ bereits *Mehler*[343] behandelt, wobei die *Christoffel*he Formel (9) fast unverändert wieder auftritt, und gleichzeitig für $= \mu = -\frac{1}{2}$ die Formel[344]

$$\text{(12)} \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{dx\,f(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_1^n {}_i f(a_i), \qquad a_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}$$

ntsteht. Dieses auch von *Hermite*[345] hergeleitete Resultat veranlasste *chebycheff*[346], die Form derjenigen Funktionen $\psi(x)$ zu bestimmen,

341) Hierdurch ist die Funktion $\varphi(x)$ n^{ten} Grades *eindeutig* bestimmt, wenn (x) im Intervall a, b sein Zeichen nicht wechselt. Für andere $\psi(x)$ kann es ehrere, ja selbst unendlich viele, Polynome geben; vgl. z. B. *P. Appell,* Toul. nn. 4, p. H 11 (1890).

342) *E. Heine,* J. f. Math. 67, p. 315 (1867); Kugelfunkt. 1, p. 291; 2, p. 20. er Zusammenhang mit der Kettenbruchentwickelung tritt schon bei *Gauss* auf, r das einfachere Problem aus viel weiter reichenden Prinzipien hergeleitet tte, Werke 3, p. 117, 185. Man vgl. auch die *Christoffel*'schen Resultate (Ann. mat. (2) 8, p. 1 [1876]).

343) *F. Mehler,* J. f. Math. 63, p. 152, 154 (1863).

344) A. a. O. p. 157.

345) *Hermite,* Cours p. 452; daselbst p. 450 auch die Hauptresultate von *ristoffel,* vgl. auch *Radau,* p. 316, sowie *A. Markoff,* Math. Ann. 25, p. 430 (385).

346) *P. Tchebycheff,* J. de math. (2) 19, p. 19 (1874).

für die das Integral (6) durch $k\sum f(a_i)$ ausdrückbar wird. Der Fehler wird dabei im allgemeinen von der $n+1^{\text{ten}}$ Ordnung ausfallen; in der That zeigte auch *Possé*[347]), dass die Annäherung auf einen Rest $2n^{\text{ter}}$ Ordnung *nur* für $\psi(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ stattfindet.

Um die Grenzen der Integration auf 0 bis ∞ auszudehnen, setzte *Radau*[348]) in

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$$

$f(x) = e^{-x}F(x)$. Wird nun wieder $F(x)$ nach der *Lagrange*'schen Formel ersetzt, so zeigt eine ganz analoge Behandlung, dass $\sum A_i F(a_i)$ ein angenäherter Wert vom Präzisionsgrad $2n-1$ ist, wenn

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx\,\varphi(x)\,x^h, \quad h = 0, \cdots n-1,$$

verschwindet, sodass nach der *Kronecker*'schen Identität[348a])

$$\varphi(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$$

zu setzen ist. Ähnlich wählt *E. Gourier*[349]) für die Grenzen $\pm\infty$ die Funktion

$$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^{n+1}}.$$

Den Fall, dass $f(x)$ in eine Reihe entwickelbar ist, deren Exponenten eine arithmetische Reihe mit ganzzahliger Differenz bilden, während das Anfangsglied einen beliebigen Exponenten hat, hat *F. August* durch Substitution auf die *Jacobi*'sche Darstellung zurückgeführt[350]).

54. Markoff's Darstellung. Eine ganz andere Behandlung des *Gauss*'schen Problems ergiebt sich, wenn man von vornherein nicht von der angenäherten Formel (3), sondern von der exakten Interpolationsformel **13** ausgeht. Sucht man eine Funktion $F(x)$ vom Grade $2n-1$, welche an n zu bestimmenden Punkten $a_1 \ldots a_n$ die Kurve $f(x)$ *berührt*, so ist

$$f(x) - F(x) = (\varphi(x))^2 \frac{f^{2n}(\xi)}{2n!},$$

wo ξ ein Mittelwert von $a_1 \ldots a_n$, x, und es wird

347) *Ch. Possé,* Nouv. ann. (2) 14, p. 49 (1875).
348) *R. Radau,* Par. C. R. 97, p. 157 (1884). 348a) Vgl. Fussn. 333.
349) *E. Gourier,* Par. C. R. 97, p. 79.
350) *F. August,* Arch. Math. 56, p. 72 (1881).

$$F(x) = \sum f(a_i)\, P_i(x) + \sum f'(a_i)\, Q_i(x).$$

emgemäss erhält man jetzt

$$\int F(x)\, \psi(x)\, dx = \sum A_i f(a_i) + \sum B_i f'(a_i).$$

erlangt man nun, dass die Koeffizienten

$$B_i = \int \frac{\psi(x)\,(\varphi(x))^2\, dx}{(x-a)\,(\varphi' a_i)^2}$$

rschwinden sollen, so folgen wieder die Bedingungen (10a). Und ergiebt sich *A. Markoff*'s Formel[351])

$$\int_a^b f(x)\, \psi(x)\, dx = \sum \frac{Z(a_i)}{\varphi'(a_i)} f(a_i) + \frac{f^{2n}(\xi)}{2n!} \int_a^b [\varphi(x)]^2\, \psi(x)\, dx,$$

i welcher $\varphi(x)$ den n^{ten} Näherungsnenner des Integrales σ (11), $Z(x)$ n zugehörigen Zähler bedeutet. Diese Betrachtung stellt nicht ein den Fehler *formal* völlig dar, sondern zeigt auch, dass die Anherung den Präzisionsgrad $2n-1$ erreicht, weil thatsächlich eine nktion konstruiert wird, die $2n$ *Punkte mit der gegebenen gemein t*, und giebt hierdurch den eigentlichen *Zusammenhang* der *Gauss*en und *Newton*'schen Methode zu erkennen.

55. Erweiterung auf mehrfache Integrale. Durch Einführung s komplexen Integrationsgebietes hat *Callandreau* für das über eine liebige Kurve innerhalb des Konvergenzkreises der analytischen nktion $f(x)$ erstreckte Integral die *Gauss*'sche Entwickelung ausführt[352]). Eine Ausdehnung auf *reelle* mehrdimensionale Gebiete eint dagegen zuerst von *Maxwell* versucht zu sein, der das Integral

$$\iint f(ax + by + c)\, dx\, dy$$

Analogie mit der *Gauss*'schen Theorie behandelte[353]). *P. Appell* neuerdings diese Betrachtungen wieder aufgenommen[354]). In dem egrale

$$\iint \psi \cdot f(x, y)\, dx\, dy,$$

ψ eine im Integrationsgebiete integrierbare Funktion von konntem Zeichen, f nach Potenzen von x und y entwickelbar ist, wird

351) So Math. Ann. 25, p. 428 (1884), aber dort mit Benutzung der *Hermite*en Interpolationsformel (J. f. Math. 84, p. 79) hergeleitet; so auch bei *Ch. Possé* . O. p. 78; die vereinfachte Darstellung bei *A. Markoff,* Differenzenrechnung 0, nebst weiteren Verallgemeinerungen; vgl. auch *Possé,* a. a. O. p. 80—89.

352) *E. Callandreau,* Par. C. R. 84, p. 1225 (1877).

353) *J. C. Maxwell,* Cambr. Proc. 3, p. 39 (1877).

354) *P. Appell,* Toul. Ann. 4, H (1890).

man f durch ein Polynom ersetzen können, dessen Wert an n vorgeschriebenen Stellen mit f übereinstimmt. Diese letzteren sind nun wieder so zu bestimmen, dass der Fehler in den Gliedern möglichst hoher Dimension auftritt. Hierbei ergiebt sich die Möglichkeit einer zur *Jacobi*'schen Behandlung des früheren Problems analogen; zugleich aber treten Schwierigkeiten hervor, wenn die Bedingung aufrecht erhalten werden soll, dass diese Stellen dem Integrationsgebiet angehören sollen, wozu der positive Charakter von ψ nicht mehr ausreicht.

E. Anhang.

56. Planimeter und Integratoren. Instrumente, welche die Ausführung von Integrationen durch mechanische Hülfsmittel bewirken, werden besonders dann wichtig, wenn es sich um — zunächst zweidimensionale — Gebiete handelt, deren Begrenzung nur graphisch gegeben ist. Insbesondere gestatten die *Planimeter*, den Flächeninhalt einer ebenen oder sphärischen Kontur durch *Umfahren*[355]) derselben mit dem sogenannten *Fahrstift* an einer Rolle, der *Integrirrolle*, abzulesen.

Man kann drei *Perioden* in der Entwickelung der Integratoren unterscheiden: 1) die älteren Planimeterkonstruktionen von 1814—1850; 2) das *Amsler*'sche Planimeter 1854 und die Konstruktion von Apparaten ohne Gleitbewegung (*J. C. Maxwell* 1851); 3) die auf allseitiger Verwendung der Kinematik beruhenden neueren Apparate (Präzisionsplanimeter, Integratoren der verschiedensten Art), etwa seit 1870.

Die *kinematischen Prinzipien* dieser Apparate (umfassend zuerst von *J. Amsler*[356]) dargelegt) beruhen fast durchweg[357]) entweder auf der Anwendung einer Rolle mit glattem Rande, deren Drehung um ihre Axe (den *Stab* oder *Fahrarm*) die erzeugte Fläche misst, oder auf der Benutzung von geeigneten auf einander rollenden Flächen (Ebene, Kugel, Kegel, Cylinder)[358]).

---

355) Mathematisch aufgefasst handelt es sich also um eine an der Begrenzung auszuführende Operation zur Ermittelung des Doppelintegrals, d. h. um eine kinematische Deutung des *Green*'schen Satzes.

356) *J. Amsler,* Zürich. Viert. 1, p. 44—48 (1856); (auch sep. Schaffhausen 1856), weiterhin zitiert mit *A.*; desgl. mit der Ausdehnung auf *sphärische* Figuren Zeitschr. Instr. Berlin 1884, p. 11.

357) Eine Ausnahme macht das theoretisch und praktisch gleich interessante Beilplanimeter von *Prytz* (1887) (vgl. *O. Henrici,* Brit. Ass. 1894, p. 51[illegible]—520, sowie *Hill,* Phil. mag. 1894, p. 265).

358) *A.* p. 65.

Die *geometrische Theorie* beruht im ersten Falle auf der Erzeugung des Flächeninhaltes durch eine Strecke von unveränderlicher Länge l, deren Enden die Kontur der Fläche durchlaufen (Stab der Rolle). Bei der *Translation* des Stabes über eine parallelogrammatische Figur ist die Drehung der Rolle der erzeugten Fläche proportional; will man auf diese Art beliebige Flächenstücke, z. B. ein von der X-Axe, zwei Ordinaten und der Kurve begrenztes Stück messen, so muss die Veränderlichkeit der Ordinaten durch eine entsprechende Drehung der Rolle kompensiert werden. So beim *Kegelplanimeter Gonnella*'s[359]), dem *Scheibenplanimeter Oppikofer*'s (1826), und den Instrumenten[360]) von *Ernst* (1836), *Wetli* (1849) und *Hansen* (1853). Bei der *Rotation* des Stabes um das eine Ende ist ebenfalls die Drehung der Rolle dem erzeugten Inhalt proportional; wird auch hier die Veränderlichkeit des Radius vector eines im Sinne der Polarkoordinaten betrachteten Flächenstücks in geeigneter Weise kompensiert, so entstehen die seltener ausgeführten Polarkoordinatenplanimeter (vgl. die soeben besprochenen Orthogonalkoordinatenplanimeter[361]).

57. **Das Amsler'sche Planimeter**[362]), an Einfachheit und Eleganz auch heute noch unübertroffen (erste Konstruktion 1854), entsteht, wenn Anfang A und Ende A' des Stabes l auf zwei geschlossenen Kurven C, C' geführt werden. Sind (Figur 2, s. pag. 130) x, y; x', y' die Koordinaten der entsprechenden Punkte A, A', F, F' die Inhalte von C, C', ferner α, β die Winkel von l und der Tangente an C' in A' mit der X-Axe, ist endlich $A'B' = ds$, so wird

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}(x'dy' - y'dx') + \frac{l}{2}\,d(x' \sin\alpha - y' \cos\alpha)$$
$$- l\,ds \sin(\alpha - \beta) + \frac{l^2}{2}\,d\alpha,$$

also, wenn beide Punkte A und A' gleichzeitig die Anfangslage wieder annehmen[363]),

359) *T. Gonnella,* *Antologia di Firenze 18 (1825); opusc. mat., Firenze 1841. Erstes Planimeter jedoch von *J. M. Hermann* (1814) nach *C. M. Bauernfeind* Polyt. J. 137, p. 82 [1855]). Vgl. *A. Favaro,* Wien. Allg. Bauz. 38 (1873), p. 68.

360) *C. M. Bauernfeind,* *Ber. polyt. Vereins für Bayern 1853, p. 130—147; d. p. 114—118; vgl. auch die Litteratur bei *W. Jordan,* Vermessungskunde, Stuttgart 1893, p. 117.

361) Nach *Henrici*'s Terminologie a. a. O. p. 496.

362) *A.* p. 44—48. Unabhängig davon das 1855 von *Miller von Hauenfels* erfundene sehr ähnliche Instrument (Katalog math. Apparate und Modelle, München 1892, p. 190, weiterhin zitiert unter K. M. A.).

363) Geometrische Begründung dieser Gleichung bei *A.* p. 58; *J. Amsler,*

$$F = F' - l \int \sin(\alpha - \beta)\, ds + \frac{l^2}{2} \int d\alpha .$$

Das erste Integral rechts wird durch die totale Drehung der Rolle

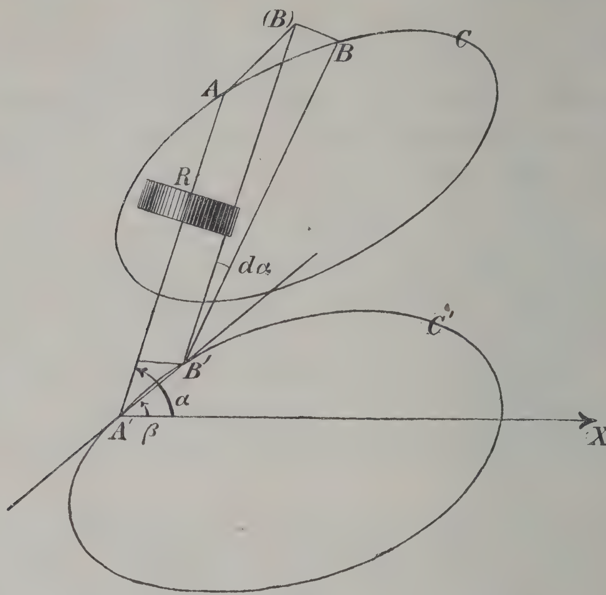


Fig. 2.

gegeben, das zweite hat den Wert 0 oder $2n\pi$. Wählt man für C einen Kreis, so entsteht das *Polarplanimeter Amsler*'s (Figur 3).

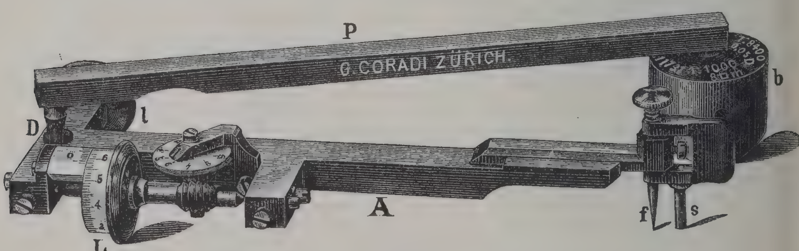


Fig. 3.
Amsler'sches Planimeter nach G. Coradi.

58. **Die Präzisionsplanimeter.** Die Genauigkeitsfehler dieses un ähnlicher Instrumente beruhen — abgesehen von den durch Übun zu vermeidenden, sowie den mechanischen Ungenauigkeiten der Kon

---

Zeitschr. f. Instr. 1884, p. 12; desgl. *A. Amsler,* Ueber den Flächeninhalt un das Volum etc. und über mechanische Integrationen, Schaffhausen 1880, p. (auch mit Erweiterungen für den Raum p. 17).

struktion[364]) — wesentlich auf dem *veränderlichen* Einfluss der Unterlage, auf der die Rolle sich abwälzt, und der *gleitenden* Bewegung derselben[365]). Dies veranlasste die Konstruktion von Planimetern, bei denen die Rolle auf einer unveränderlichen Unterlage geführt wird, und zugleich die Gleitbewegungen ganz oder fast ganz fortfallen. So entstanden die Präzisionsplanimeter von *Amsler, F. Hohmann-Coradi* (erste Ausführung 1880, das freischwebende Präzisionsplanimeter 1882—1884, das Kugelrollplanimeter[366])); durch grosse Genauigkeit zeichnen sich namentlich die neuen Instrumente von *G. Coradi* aus[367]).

Die bereits von *J. Amsler*[368]) angegebene Erweiterung der Planimeter zu Integratoren für Flächenmomente und Trägheitsmomente, für die mechanische Ermittelung von Potentialfunktionen und Attraktionskräften[369]) ist neuerdings von den verschiedensten Seiten fortgebildet; man vgl. die Angaben im K. M. A. von 1892, p. 197—224.

59. Die Integraphen. Während die Planimeter den Inhalt einer geschlossenen Kurve abzulesen gestatten, zeichnen die *Integraphen* direkt die Integralkurve $z = \int y\,dx$, welche zu einer gegebenen Differentialkurve $y = f(x)$ gehört. Nach früheren Vorschlägen von *Żmurko* (1864)[370]) und *J. Thomson*[371]), *Cayley*[372]) ist zu vielseitiger Ausführung gelangt der Integraph von *Abdank-Abakanowicz* 1882 (erstes Modell

364) Theoretische Erörterungen über die Fehler bei *F. H. Reitz,* Zeitschr. f. Vermess. 7, p. 264 (1878); *P. Wilski*, ib. 21, p. 609 (1892); *G. Coradi*, praktische Anleitung zum Gebrauch des einfachen Polarplanim., Zürich 1892; Zusammenfassung bei *O. Henrici,* Brit. Ass. 1894, p. 510—512.

365) *A.* p. 131; schon *J. C. Maxwell* (Edinb. Trans. 4 = Coll. pap. 1, p. 230) gab 1855 ein Instrument ohne Gleitbewegung an; vgl. auch das Planimeter von *E. Stadler* (K. M. A. p. 184); ein anderes Instrument beschreibt *J. Amsler*, Ztschr. f. Instrum. 1884, p. 21.

366) Theorie bei *F. Lorber,* Zeitschr. f. Instrum. 1882, p. 327; Zeitschr. f. Vermess. 17, p. 161 (1888).

367) Die Kugelplanimeter Coradi, Beschreibung u. Anleitung z. Gebrauch etc. von *G. Coradi*, Zürich 1889, Litteratur im Vorwort; Genauigkeitstabellen daselbst p. 32; ferner: „Die Planimeter Coradi", Zürich 1895.

368) *A.* p. 101—107.

369) *A. Amsler,* Repert. Phys. 15 (1879), p. 389.

370) Über *Zmurko*'s Integrator (1861 erfunden, 1881 von *G. Coradi* ausgeführt) vgl. *K. Skibinski,* Wien. Denkschr. 53, p. 35 (1887). Von *Ż.* stammt auch die von *Abakanowicz* benutzte Eigenschaft der Integralkurve.

371) *J. Thomson,* Lond. Roy. Proc. 24 (1876) = Treatise on natural philosophy, 1, p. 488, 2. ed.

372) *A. Cayley,* Brit. Ass. 1877.

1878)[373]). Das von *G. Coradi* angeführte Instrument (Figur 4) besteh (Fig 5 s. p. 133) *erstens* aus dem in der X-Richtung auf Laufroller L' beweglichen Wagen W, dem längs BD beweglichen Wagen W' mi

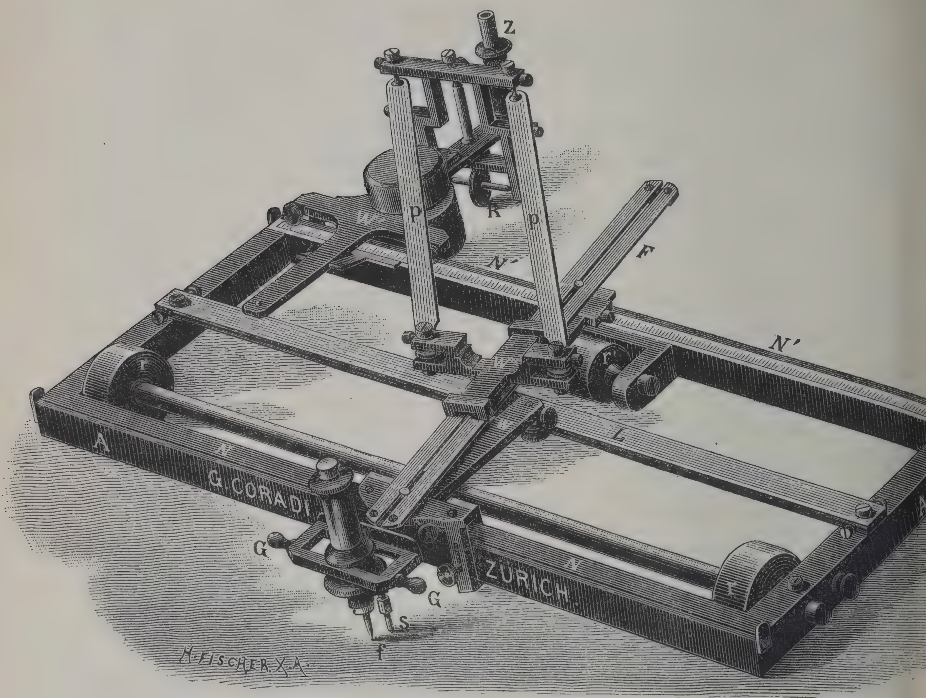


Fig. 4.
Integraph von Abakanowicz nach G. Coradi.

dem auf der Differentialkurve C zu führenden Fahrstifte F, *zweitens* au der *scharfrandigen* Rolle R,[374]) welche vermöge des Parallelogramm $abcd$ und des durch die festen Punkte A und B der Wagen W und W' gehenden geschlitzten Lineals, auf dem das Gleitstück G ver schieblich ist, ihre Bewegungsrichtung stets dem Lineal parallel er hält[375]), während der Punkt M durch einen längs PP' verschiebbaren

373) *Abdank-Abakanowicz*, Les intégraphes et la courbe intégrale, Pari 1889, deutsch mit Zusätzen von *E. Bitterli*, Leipzig 1889; dort p. 51 weiter Litteratur.

374) Auf diesem schon von *J. Amsler*, *A.* p. 65 angegebenen Prinzipe beruht auch das Planimeter von *Hine* und *Robertson*, *Henrici*, Brit. Ass. 1894 p. 515, K. M. A. im Nachtrag (ohne pag.).

375) Auf andere Art wird der Parallelismus erreicht im Integrator vo *C. V. Boys*, Phil. mag. Mai 1881.

Wagen W'' geführt wird. Für die von M oder J beschriebene Kurve C' wird daher

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{AD}; \quad z \cdot AD = \int y\, dx,$$

so dass M oder J die Integralkurve beschreibt[376]).

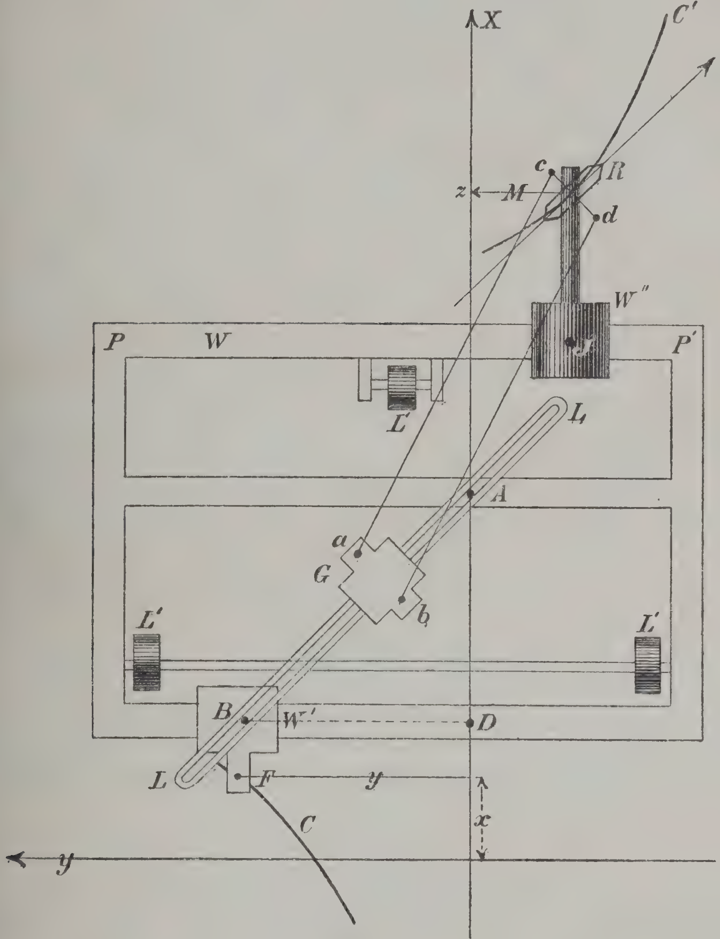


Fig. 5.

60. Harmonische Analysatoren (Harmonic analysers) konstruieren graphisch die Koeffizienten der *Fourier*'schen Reihe, d. h. die Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

376) Verwendung des Integraphen zur Lösung mathematischer Fragen bei *Abakanowicz*, p. 84 ff.; K. M. A. p. 201.

Frühere Konstruktion von *W. Thomson* (*Lord Kelvin*)[377]; durch partielle Integration der Integrale vereinfachter Apparat von *O. Henrici*[378]; besonders leistungsfähig scheint ein neuerdings von *Michelson* und *Stratton* mit Benutzung von Spiralfedern konstruiertes Instrument[379].

61. Die graphischen Methoden. In engster Verbindung stehen damit die Integratoren von linearen Differentialgleichungen, wie sie ebenfalls von *W. Thomson* 1876[380]) angegeben sind. Die kinematischen Hülfsmittel aller dieser, wenn auch unabhängig entstandenen Apparate beruhen auf den von *J. Amsler* 1856 ausgesprochenen Ideen und scheinen bestimmt, bei den Aufgaben der modernen Naturforschung noch vielfache Verwendung zu finden[381]). Sie bilden aber nur einen kleinen Teil der *graphischen Methoden*[382]) überhaupt, deren konsequente Verfolgung immer mehr Einfluss auf eine Umbildung der mathematisch-technischen Hülfsmittel zu gewinnen scheint.

---

377) *W. Thomson*, Lond. Roy. Proc. 24 (1876) = Treatise 1, p. 493—496. Man vergleiche indessen *J. Amsler*'s frühere Versuche *A.* p. 107—113.

378) K. M. A. p. 131, 213. Erster Versuch von *Henrici* 1889, Abbildung des von *G. Coradi* nach *O. Henrici* und *A. Sharp* konstruierten Instrumentes K. M. A. Nachtrag p. 34; vgl. Der harmon. Analysator konstr. von *G. Coradi* Zürich 1894, desgl. K. M. A. p. 125, Gött. Nachr. 1894, p. 30 und Phil. mag. 1894, p. 110.

379) *A. A. Michelson* und *S. W. Stratton*, Phil. Mag. (1898), p. 85.

380) Treatise 1, p. 493—504; speziellere Ausführung bei *A. Amsler*, Schaffhausen 1880, p. 52—60.

381) Nach *H. S. Hele-Shaw* (Lond. Trans. 176, p. 365) soll bereits *J. V. Poncelet* 1834 ähnliche Prinzipe benutzt haben.

382) Vgl. z. B. **Nehls*, Graphisch-mechanisches Integrieren, Leipzig 1885 2. Ausg.; **E. Massau*, Ann. de l'association des ingénieurs 1, 2, Brux. 1878; 3 Liège 1884; ferner die Litteratur im K. M. A. p. 99, 202—207, 211—212 etc. desgl. **H. S. Hele-Shaw*, Proc. civil eng. 1885.

Berichtigungen und Nachträge.

S. 56, Z. 12 u. 14 v. o. lies Michelsen statt Michelson.
S. 56, Z. 10 v. u. lies processes statt progresses.
S. 61, Z. 6 v. o. lies ou statt où.
S. 61, Fussn. 15 füge hinzu: für komplexe Variable bei *Pringsheim*, Münch. Ber. 25, 1895, p 303.
S. 62, Z. 7 v. o. lies cx statt e^x.
S. 70, Fussn. 58 streiche 9 hinter *Gerhardt*.
S. 71, Fussn. 67 füge hinzu: Bei nur einer unabhängigen Variabelen fällt natürlich die Bedingung der Stetigkeit der Derivierten der y_i weg.
S. 81, Fussn. 118 lies Grundzüge 1.
S. 88, Z. 7 v. u. lies Ann. fis. mat. 6.

derabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. XV. Heft 4.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über die Definition des Doppelintegrals.

Von H. Weber in Straßburg i. E.

Die Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, die ich t einigen Jahren regelmäßig an der Straßburger Universität halte, ist r ein willkommener Anlaß, die Grundlagen der Analysis wiederholt rchzudenken und von verschiedenen Seiten zu betrachten. So ist Begriff des Doppelintegrals einer von denen, die in ihrer Reinheit fzufassen immer ein besonderes Interesse hat, umso mehr, da er auch der analytischen Zahlentheorie, in seiner Anwendung auf die Geo- trie der Zahlen, eine strengere Begründung besonders wünschens- rt macht. Die entsprechende Betrachtung für mehrfache Integrale gibt sich leicht. Ausgeschlossen sind aber hier die verschiedenen enzübergänge für unendliche Grenzen und unstetige Funktionen, die ihrer Mannigfaltigkeit schwer unter einen allgemeinen Gesichtspunkt bringen sind und daher besser an den so zahlreichen und inter- anten Einzelfällen studiert werden.

Das Doppelintegral.

1. Stetigkeit. Es sei Ω irgend ein endliches (oder unendliches) ick der xy-Ebene. In Ω sei eine Ortsfunktion U gegeben, von ich folgendes voraussetze:

1 Der absolute Wert von U soll überall innerhalb Ω unter einer endlichen Zahl M liegen.

Ist D ein Flächenstück innerhalb Ω, so heißt der Unterschied ischen der oberen und unteren Grenze der Werte von U innerhalb die Schwankung der Funktion innerhalb D. Ein Wert von U, zwischen den beiden Grenzen von U liegt, heißt ein Mittelwert U in D und wird mit U_m bezeichnet.

Sind die Lineardimensionen von D unter irgend einem Wert d, möge die Schwankung von U unter einer gewissen, von d abhängigen enze σ bleiben:

2 Die Funktion U wird nun in ganz Ω in dem Sinne stetig vorausgesetzt, daß σ zugleich mit d unendlich klein wird,

d. h. es soll für jedes beliebige noch so kleine σ eine für das ganze G
biet Ω gültige Bestimmung von d möglich sein (gleichmäßige Stetigkei

Riemann faßt in der Untersuchung über das einfache Integr (Riemanns Werke, S. 234) die Forderung an eine integrierba Funktion etwas weiter. Es würde darnach genügen zu verlangen, d die Gesamtgröße der Elemente D, in denen die Schwankung von größer als σ ist, für jedes σ zugleich mit d unendlich klein wird. D durch würden z. B. sprungweise Änderungen an Linien zugelassen sei Um unsere Betrachtung nicht durch allzu viele Unterscheidungen belasten, gehen wir auf diese Verallgemeinerung des Integralbegri hier nicht ein.

2. Flächeninhalt. Von den Zahlen, die den Flächeninhalt eben Figuren ausdrücken, wird folgendes vorausgesetzt:

3. Ist eine Figur B ein Teil einer Figur A, so ist der Fläche inhalt von A größer als der von B.
4. Sind zwei Figuren einander ähnlich, so stehen ihre Fläche inhalte in demselben Verhältnis zueinander, wie die Qu drate der Leneardimensionen.

Es sei eine Figur A in Ω durch eine geschlossene Peripherie begrenzt. Ich nehme an, daß man im Innern von A einen Punkt so wählen kann, daß, von π aus gesehen, d ganze Peripherie einfach auf den Horizont projizie wird, d. h. so, daß jeder von π auslaufende Strahl die Peripherie einmal und nur einmal trifft.

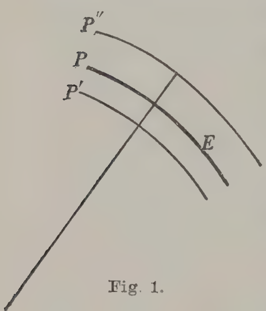


Fig. 1.

Ich konstruiere nun zwei Peripherien P' u P'', die die gegebene Peripherie P einhüllen, inde ich die von π ausgehenden Strahlen in einem b stimmten Verhältnis $1:1+\alpha$ und $1:1-\alpha$ ve größere und verkleinere. Dadurch entstehen dr ähnliche Figuren A, A', A'', deren Flächeninhal nach 4. so bestimmt sind:

$$A' = A(1-\alpha)^2, \quad A'' = A(1+\alpha)^2,$$

und daraus ergibt sich für den Flächeninhalt des zwischen P' und P verlaufenden Streifens

$$E = A'' - A' = 4A\alpha. \tag{1}$$

Je kleiner α wird, umso schmaler ist dieser Streifen und ums kleiner sein Flächeninhalt. Er konvergiert mit α zugleich gegen Nul

Beschreibt man um irgendeinen Punkt von P einen Kreis m dem Radius d, so kann man d so klein annehmen, daß dieser Kre ganz in den Streifen E hineinfällt.

Ich setze voraus, daß diese Radien d, wenn man mit dem Mittelpunkt an P entlang geht, eine von Null verschiedene untere Grenze haben, d. h. daß man ein konstantes d so wählen kann, daß die erwähnten Kreise alle innerhalb des Streifens E fallen. Dieses d wird mit α zugleich unendlich klein.

Man zerteile nun die Fläche Ω irgendwie in Elemente D, deren eardimensionen kleiner als d sind. Ein Teil dieser Elemente, D_1, d ganz innerhalb der Figur A liegen, ein anderer Teil, D_2, wird der Peripherie P durchschnitten werden, ein dritter Teil, der uns r nicht interessiert, wird ganz außerhalb A liegen. Nach unseren raussetzungen kann man d so annehmen, daß alle D_2 innerhalb des eifens E fallen, und daß also ihre Gesamtfläche kleiner als $4A\alpha$ ist.

Daraus ergibt sich:

Der Flächeninhalt A der Figur A ist der Grenzwert der Summe ΣD für ein unendlich kleines α, mag man in die Summe alle oder einen Teil oder keine der zerschnittenen Elemente D aufnehmen.

In Zeichen:

$$A = \lim_{\alpha = 0} \sum D. \tag{2}$$

3. Das Doppelintegral. Ich behalte die Einteilung des Gebietes Ω die Elemente D bei und bezeichne mit U_m einen Mittelwert von in einem Element D. Dann versteht man unter dem Doppelgral U über die Fläche A

$$\int U dA \tag{3}$$

Grenzwert der Summe

$$S = \sum U_m D, \tag{4}$$

n α und damit d gegen Null abnimmt, wobei in die Summe (4) Elemente D_1 und von den zerschnittenen Elementen D_2 ein beeiger Teil aufgenommen werden kann. Wir haben dreierlei zu eisen:

I. Der Grenzwert von S ist unabhängig davon, welche von den Elementen D_2 wir in die Summe mit aufnehmen.

II. Der Grenzwert von S ist unabhängig von der Wahl der Mittelwerte U_m.

III. Der Grenzwert von S ist unabhängig von der Art der Einteilung in Elemente D.

Der erste Punkt erledigt sich einfach dadurch, daß

$$\sum U_m D_2 < ME, \tag{5}$$

19*

mag die Summe über alle oder über einen Teil der Elemente D_2 aus gedehnt werden. Und da E mit α unendlich klein wird, so wird auch der Teil der Summe (4), der sich auf zerschnittene Elemente bezieht unendlich klein.

Um II. zu beweisen, bemerken wir, daß die Summe S vergrößert oder verkleinert wird, wenn U_m überall durch die obere oder die unter Grenze ersetzt wird. Bedeutet also s die Schwankung von U inner halb D, so ist die Schwankung, deren die Summe S durch Veränderun von U_m noch fähig ist, höchstens gleich $\Sigma s D$. Und wenn s unter liegt, so ist die Schwankung von S höchstens gleich $\sigma A''$. Nach wird σ zugleich mit d unendlich klein und II. ist damit bewiesen.

Zum Beweis von III. zerschneide ich jedes der Elemente D in be liebiger Weise in Elemente Δ, deren Lineardimensionen kleiner als sind. Dann ist

$$\Sigma^0 U_\mu \Delta = U_m D, \tag{4}$$

wenn sich die Summe Σ^0 auf alle Teile Δ des einen Elementes D b zieht und U_μ einen Mittelwert von U in Δ bedeutet. Denn, bezeichn U_1 und U_2 die untere und obere Grenze von U innerhalb D, so ist

$$\Sigma^0 \Delta = D$$

$$U_1 D < \Sigma^0 U_\mu \Delta < U_2 D,$$

und wenn man also $\Sigma U_\mu \Delta = U_m D$ setzt, so ergibt sich

$$U_1 < U_m < U_2,$$

d. h. U_m ist ein Mittelwert in D. Es ist also die über alle Te elemente Δ genommene Summe $\Sigma U_\mu \Delta$ identisch mit einem besonder Fall von $\Sigma U_m D$, und beide Summen haben also denselben Grenzwe

Hat man nun zwei ganz verschiedene Einteilungen in Elemente und D', z. B. D durch ein Gitter, dessen Stäbe den Koordinatenachs x, y parallel laufen, D' durch irgend zwei Scharen krummliniger K ordinatenkurven, so kann man eine dritte Zerschneidung in Elemente bilden, indem man die beiden übereinanderlagert, die dann sowohl in als in D' enthalten ist; und daraus ergibt sich, daß die drei Summ

$$S = \sum D U_m, \quad S' = \sum D' U_m, \quad \sum = \sum \Delta U_\mu$$

einen und denselben Grenzwert haben, nämlich das Doppelintegral

$$\int U dA.$$

4. Transformation. Teilt man Ω durch ein Gitter, dessen Stäbe den Koordinatenachsen parallel sind, dessen Maschen also Rechtecke mit unendlich klein werdenden Seiten sind, so kann man das Integral

$Ud A$ durch eine zweimal nacheinander vorgenommene einfache Inte-
ation nach x und y bestimmen:

$$\int U d A = \iint U \, dx \, dy. \tag{}$$

Stellt man x, y als Funktionen zweier neuer Variablen u, v dar, so tsprechen den konstanten Werten von v und u zwei Kurvenscharen, wir die u-Kurven und die v-Kurven nennen, durch die die Fläche Ω anderer Weise in Elemente eingeteilt wird.

Je zwei benachbarte u- und v-Kurven begrenzen ein krummliniges ereck, dessen Flächeninhalt D sei. Dieser Flächeninhalt läßt sich rch einfache Integrationen von der Form $\int y dx$ bestimmen und ergibt nach dem ttelwertsatz:

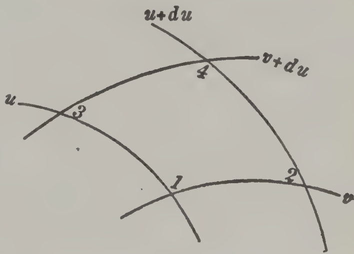


Fig. 2.

$$\begin{cases} D = (x_4 - x_3)\, y_{34} + (x_2 - x_4)\, y_{24} \\ \quad - (x_1 - x_3)\, y_{13} - (x_2 - x_1)\, y_{12}, \end{cases}$$

rin y_{34} einen Mittelwert von y längs Kurvenstücks 34 bedeutet und ent-echend y_{24}, y_{13}, y_{12}. Für diese Mittel-rte kann man nun (nach dem Taylorschen Lehrsatz) bis auf Glieder ierer Ordnung setzen:

$$y_{34} = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_4) \text{ usw.},$$

l wenn man nach Potenzen von du und dv entwickelt, kann man setzen:

$$x_1 = x, \qquad x_2 = x + \frac{\partial x}{\partial u}\, du$$

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y + \frac{\partial y}{\partial u}\, du$$

$$x_3 = x + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv, \qquad x_4 = x + \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,$$

$$y_3 = y + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv, \qquad y_4 = y + \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv.$$

Man erhält aus (2)

$$D = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \omega\right) du\, dv,$$

in ω eine mit unendlich abnehmenden du, dv zugleich unendlich n werdende Größe ist.

Sind du und dv kleiner als d, so wird ω eine Funktion von d , die mit d zugleich verschwindet. Außerdem hängt aber ω noch u, v ab; wir setzen noch voraus,

7. daß die obere Grenze von ω in dem ganzen Gebiet Ω m
d gegen Null konvergiert,

und erhalten unter dieser Voraussetzung:

$$\iint U\,dx\,dy = \iint U\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,dv, \tag{4}$$

wobei sich die Integration in der (u, v)-Ebene über das dem Gebiet entsprechende Stück erstreckt.

Bei der Ableitung der Formel (3) haben wir stillschweigend Voraussetzung gemacht, daß die Richtung der wachsenden u zu Richtung der wachsenden v so liegt, wie die positive x-Richtung z positiven y-Richtung, was zur Folge hat, daß die Determinante

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

positiv ist. Andernfalls müßte in (4) das Zeichen umgekehrt werd

Endlich sei noch die selbstverständliche Bemerkung hinzugefü daß unsere Resultate auch dann noch ihre Gültigkeit behalten, we die Voraussetzung über den Punkt π und Nr. 2 nicht für die gan Fläche A erfüllt ist, wenn nur A in Teile zerlegbar ist, die dies Forderungen genügen.

Straßburg, Oktober 1909.

Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung.

Von

H. Weber.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1896. Heft 4.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1896. Heft 4.

Jeber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung.

Von

H. Weber, auswärtiges Mitglied.

Vorgelegt in der Sitzung am 21. November 1896.

Die Dirichletschen Methoden der Zahlentheorie beruhen uf der Untersuchung eines n-fachen Integrals über ein endliches Gebiet, oder wie man sich ausdrücken kann, auf der Bestimmung es Volumens eines endlichen Stückes in einem n-dimensionalen Raume. Den Hauptsatz, auf den es hier ankommt, will ich zuächst formulieren.

Es mögen n Variable $x_1, x_2, \dots x_n$ als rechtwinklige Coordinaen in einem n-dimensionalen Raume gedeutet werden. Durch Schaaren von Ebenen, (lineare Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Diensionen: $x_1 = \text{const.} \dots x_n = \text{const.}$) deren Individuen in der Entfernung $\varDelta$ von einander je einer der Coordinatenebenen paallel laufen, ist dieser Raum in ein cubisches Gitter getheilt, essen einzelne Würfel δ den Volumeninhalt $\varDelta^n$ haben. Die Ecken ieser Würfel heißen die Gitterpunkte, die Würfel δ selbst ie Elementarwürfel. In diesem Raume ist ein Volumen V bgegrenzt, das sich nicht ins Unendliche erstreckt, und dessen Begrenzung bestimmt ist durch eine endliche Anzahl von Oberlächenstücken (Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen) deen jede durch eine analytische Gleichung

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

estimmt ist. Die Punkte der Begrenzung sollen mit zu V geechnet werden. Bezeichnet man dann mit T die Anzahl der in em Bereich V liegenden Gitterpunkte und mit V zugleich den umerischen Werth des Volumens, so ist

$$(2) \qquad V = \operatorname{Lim} T\varDelta^n$$

wenn Δ sich der Grenze Null nähert. Dies ist im Grunde nicht anderes als die Definition des Volumens durch ein n-faches Inte gral. Der Nutzen dieser Formel besteht darin, daß man das n fache Integral V auf andere Weise, etwa durch Einführung ande rer Variablen genau bestimmen kann, und so einen genäherte Ausdruck für die Anzahl T der Gitterpunkte erhält.

Es giebt aber manche Fragen, die den Dirichletschen Me thoden zugänglich sind, für die die Formel (2) noch eine genauer Fassung fordert. Ich erwähne unter diesen Fragen besonders d nach der Vertheilung der Primideale auf die verschiedenen Idea classen oder auf die Nebengruppen zu irgend einer andere Idealgruppe.

Der Satz, den wir unter einer gleich auszusprechenden Vo aussetzung beweisen wollen, ist in der Formel enthalten.

1) Es ist

$$V = T\Delta^n + M\Delta, \tag{3}$$

wenn M eine Function von Δ bedeutet, die mit unen lich abnehmendem Δ nicht unendlich wird, oder, g nauer ausgedrückt, die, wie klein auch Δ sei, imm zwischen zwei endlichen Grenzen $\pm C$ eingeschlosse bleibt[1]).

Ich führe diesen Satz zunächst auf einen anderen zurüc Unter den Elementarwürfeln δ werden solche vorkommen, die ihrem Inneren Punkte der Begrenzung von V enthalten, die dur die Oberfläche von V zerschnitten genannt werden könne Auch hier mögen unter den zerschnittenen Würfeln die mitgezäh werden, die etwa nur einen Punkt mit der Begrenzung von V g mein haben. Die Anzahl dieser zerschnittenen Würfel sei Z. I T die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb V ist, so ist T zuglei die Anzahl der Elementarwürfel, von denen eine, nämlich die d kleinsten Coordinatenwerthen entsprechende Ecke innerhalb V lieg Wenn ich aber zu diesen Würfeln alle zerschnittenen Würf hinzufüge, auch die darunter schon enthaltenen nochmals mitzäh so erhalte ich ein Gesammtvolumen, was größer ist als V; eben erhalte ich, wenn ich das Volumen aller zerschnittenen Würf

1) Dieser Satz findet sich bei Minkowski („Geometrie der Zahlen“, Le zig 1896, S. 62) unter Voraussetzungen abgeleitet, die nicht ganz auf den h vorliegenden Fall passen. Einen von den hier mitgetheilten verschiedenen, jedo auf ganz ähnlichen Betrachtungen beruhenden Beweis für unseren Fall hat m Minkowski am 18. Mai 1896 brieflich mitgetheilt.

on dem Gesammtvolumen der T Würfel δ abziehe, ein Volumen, vas kleiner ist als V; folglich

$$(T-Z)\Delta^n < V < (T+Z)\Delta^n \tag{4}$$

nd es ist also nur zu beweisen

2) daß $Z\Delta^{n-1}$ für beliebig kleine Δ zwischen endichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Der Satz ist ffenbar richtig für $n=1$, wenn in diesem Falle das Volumen V us einer endlichen Anzahl endlicher Strecken besteht, weil dann Z höchstens gleich der Anzahl der Endpunkte dieser Strecken ist. Vir wenden also bei dem allgemeinen Beweise die vollständige nduction an, indem wir von dem Volumen V die Voraussetzung nachen, daß seine Begrenzung aus einer endlichen Anzahl von Stücken S besteht, so daß in jedem dieser Stücke eine der Coorinaten, etwa x_1, als stetige Function der übrigen bestimmt ist, nd daß auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_3}, \quad \dots \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \tag{5}$$

n S endliche und stetige Functionen sind. Es genügt offenbar, en Satz 2 für jedes einzelne dieser Stücke S zu beweisen.

Es braucht nicht ausgeschlossen zu werden, daß die Größen 5) in einzelnen Punkten von S, wie etwa in einer Kegelspitze, nbestimmt werden, wenn sie nur bei der Annäherung an diesem Punkt in endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben.

Ist (x) ein Punkt der Fläche S mit den Coordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$, o sei nach unserer Voraussetzung

$$x_1 = \varphi(x_2, \dots x_n),$$

nd für einen benachbarten, gleichfalls in S gelegenen Punkt $(x+\xi)$

$$x_1 + \xi_1 = \varphi(x_2+\xi_2, \dots x_n+\xi_n).$$

Venden wir nun auf die Function $\varphi(x_2+t\xi_2, \dots x_n+t\xi_n)$ den Tayorschen Lehrsatz an, und setzen dann $t=1$, so ergiebt sich, venn Θ ein echter Bruch ist,

$$\xi_1 = \xi_2\varphi'(x_2+\Theta\xi_2) + \cdots + \xi_n\varphi'(x_n+\Theta\xi_n). \tag{6}$$

Vir bezeichnen nun mit V' die Projection von S in die Ebene $x_1 = 0$, so daß V' ein $(n-1)$ dimensionales Volumen ist, und etzen voraus, daß nicht nur die Projectionen der Punkte (x) und $(x+\xi)$ sondern auch die gerade Verbindungslinie dieser Projectionen ganz innerhalb V' liegt. Sind dann die $\xi_2, \dots \xi_n$ in (6) alle kleiner als Δ, so folgt aus (6) nach der Voraussetzung über die

Differentialquotienten (5)

$$(7) \qquad -a\varDelta < \xi_1 < a\varDelta$$

worin a eine von $\varDelta$ unabhängige positive endliche Zahl ist.

Ist δ' die Projection eines Elementarwürfels δ in die Eben $x_1 = 0$, also $\delta' = \varDelta^{n-1}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Würfel, so ist wenn δ' ganz innerhalb V' liegt, die größte Schwankung σ de Function x_1 innerhalb δ' wegen (7)

$$(8) \qquad \sigma < a\varDelta.$$

Liegt aber δ' nur zum Theil innerhalb V', wird es also durch di Begrenzung von V' zerschnitten, so ist sicher, da ja die Functio x_1 selbst schon endlich ist

$$(9) \qquad \sigma < b,$$

wenn b wieder eine von $\varDelta$ unabhängige positive Zahl ist.

Die Anzahl der Elementarwürfel δ, die durc den über δ' liegenden Theil der Fläche S zerschnitte werden, ist aber sicher nicht größer als $\sigma : \varDelta$. Es solle nun T', Z' dieselbe Bedeutung für V' haben, wie T, Z für V Dann ist T' die Anzahl der Gitterpunkte im Innern von V', un die Anzahl der Elementarwürfel δ', die ganz im In nern von V' liegen, ist nicht größer als T', und wen also Z_1 die Anzahl der Würfel δ ist, die von allen über diese δ' gelegenen Theilen der Fläche S zerschnitten werden, so is nach (8)

$$Z_1 \leqq aT'$$

Die Anzahl der durch die Begrenzung von V' zerschnittene Würfel δ' ist Z'; folglich ist die Anzahl aller der Würfel δ, di von dem über diesen δ' gelegenen Theile von S zerschnitten werde

$$Z_2 \leqq \frac{bZ'}{\varDelta}$$

und es ist also die Gesammtzahl aller von S zerschnittene Würfel

$$Z \leqq aT' + \frac{bZ'}{\varDelta}$$

folglich

$$(10) \qquad Z\varDelta^{n-1} \leqq aT'\varDelta^{n-1} + bZ'\varDelta^{n-2}.$$

Nun hat $T'\varDelta^{n-1}$ für unendlich abnehmende $\varDelta$ den Grenzwert V', und bleibt also unter einer endlichen Grenze, wenn $\varDelta$ eine beliebig anzunehmenden oberen Grenzwerth nicht überschreitet.

ach der Annahme, die wir gemacht haben, daß das Theorem 2) ir $n-1$ Dimensionen bereits bewiesen sei, bleibt auch $Z'\Delta^{n-2}$ endch und unser Satz ist dadurch bewiesen.

In den Problemen der Zahlentheorie, auf die dieses Theorem gewandt werden soll, wird die Begrenzung folgendermaßen beimmt [1]).

Es seien $y_1, y_2, \dots y_n$ von einander unabhängige lineare hoogene Functionen der $x_1, x_2, \dots x_n$, unter denen $2\nu - n$ reelle und $-\nu$ Paare conjugiert imaginäre vorkommen mögen. Die Verderlichkeit der x wird zunächst so beschränkt, daß die reellen keine negativen Werthe erhalten. Eine weitere Grenzbeding ist

(11) $$0 \leqq y_1 y_2 \dots y_n \leqq 1.$$

n die übrigen Bedingungen zu erhalten, ordne man den Variablen ein Zahlensystem δ_i so zu, daß $\delta_i = 1$ oder $= 2$ ist, je nachm y_i reell oder imaginär ist, und setze

(12) $$z_i = \log y_i,$$

nn y_i reell ist, und

(13) $$z_i = \log y_i y_i',$$

nn $y_i y_i'$ ein conjugiert imaginäres Paar ist. Es sind nun fer $\nu(\nu-1)$ reelle Zahlwerthe $l_{i,\varkappa}$ $(i = 1, 2, \dots \nu-1;\ \varkappa = 1, 2, \dots \nu)$ geben, so daß

(14) $$l_{i,1} + l_{i,2} + \cdots + l_{i,\nu} = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots \nu-1)$$

d daß die Determinante $\Sigma \pm l_{1,1} \dots l_{\nu-1,\nu-1}$ von Null verschieden . Dann werden die Größen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ durch die linearen eichungen

15) $$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 l_{1,1} + \cdots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,1} + \delta_1 \xi_\nu = z_1 \\ \xi_1 l_{1,2} + \cdots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,2} + \delta_2 \xi_\nu = z_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \xi_1 l_{1,\nu} + \cdots + \xi_{\nu-1} l_{\nu-1,\nu} + \delta_\nu \xi_\nu = z_\nu \end{array}\right.$$

timmt, um für das Volumen V die noch fehlenden Grenzlingungen

16) $$0 \leqq \xi_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \xi_2 \leqq 1, \quad \dots \quad 0 \leqq \xi_{\nu-1} \leqq 1$$

erhalten.

1) Vgl. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. unschweig 1894) § 184 oder auch den zweiten Band meines Lehrbuchs der bra (Braunschweig 1896) § 189.

Für ξ_ν ergiebt sich wegen (12), (13), (14)

$$n\xi_\nu = \log y_1 y_2 \dots y_n, \tag{17}$$

und wenn man die Gleichungen (15) für die ξ auflöst, so erhäl man aus (16) für die Begrenzung des Volumens V $2\nu-2$ Glei chungen, die alle die Form haben

$$y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} \dots y_n^{\gamma_n} = c, \tag{18}$$

worin $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ reelle, der Bedingung

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = 0 \tag{19}$$

genügende Zahlen sind, während c eine von Null verschieden positive Constante ist.

Die Variable ξ_ν kann wegen (11) und (17) innerhalb V kein positiven, aber beliebige negative Werthe erhalten.

Hiernach ergeben die Gleichungen (15) Folgendes für das Be reich V:

Da die z nicht positiv über alle Grenzen wachsen können, s können die y dem absoluten Werthe nach nicht über alle Grenze wachsen, und die x sind daher auch zwischen endlichen Grenze eingeschlossen.

Eine der Grössen z kann nur dann negativ unendlich werde wenn ξ_ν negativ unendlich wird, und dann sind alle z negat unendlich. Daraus folgt, daß eine der Größen y innerhalb V nu dann verschwinden kann, wenn alle y zugleich verschwinden, d. im Coordinatenanfangspunkt.

Eliminirt man ξ_ν aus irgend zwei der Gleichungen (15), s ergiebt sich, daß die Differenzen $\delta_i z_\varkappa - \delta_\varkappa z_i$ alle innerhalb V en liche Werthe haben, und dies hat zur Folge, daß die Verhäl nisse $y_i : y_\varkappa$ irgend zweier der y innerhalb V in endlichen Grenz eingeschlossen sind.

Wenn sich durch Differentiation einer der Grenzgleichung

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \dots + Y_n dy_n = 0 \tag{20}$$

ergiebt, so sind die $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ homogene Functionen der $y_2, \dots y_n$ und folglich auch der $x_1, x_2, \dots x_n$, die in keinem Punk von V, mit Ausnahme des Nullpunktes verschwinden, und der Verhältnisse in endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Wenn si durch Einführung der Variablen x statt der y aus (20)

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n = 0 \tag{21}$$

ergiebt, so sind die X_i lineare homogene Functionen der Y_i also nur im Coordinatenanfangspunkt alle verschwinden. We

n irgend einem Begrenzungspunkt X_1 von Null verschieden ist, o kann man ein diesen Punkt umgebendes Begrenzungsstück von ndlicher Ausdehnung angeben, in dem die partiellen Ableitungen 5) endlich sind, und dies Stück reicht, wenn es auf einer der Kegelflächen (18) liegt, bis zu dem Nullpunkt. Daraus ergiebt ich, daß hier die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt sind.

Zur Veranschaulichung diene der Fall $n = 3$. Ist y_1 reell, y_2, y_3 conjugiert imaginär, so ist $\nu = 2$ und die Begrenzung von V besteht aus den beiden Kegelflächen

$$y_1^2 = y_2 y_3, \quad y_1^2 = c y_2 y_3,$$

on denen die eine ganz in der anderen liegt, und der hyperolischen Fläche dritten Grades

$$y_1 y_2 y_3 = 1$$

nit der Asymptotenebene $y_1 = 0$, und der Asymptotenaxe $y_2 = y_3 = 0$. ind aber y_1, y_2, y_3 reell, so ist $\nu = 3$. Die Begrenzung besteht us vier Stücken von, im allgemeinen transcendenten, Kegelflächen, eren gemeinschaftliche Spitze der Anfangspunkt ist, und aus der yperbolischen Fläche dritter Ordnung $y_1 y_2 y_3 = 1$ mit den drei symptotenebenen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$. Die Gestalt des örpers V ist etwa die einer dreiseitigen Pyramide mit gekrümmen Flächen.

STUDIEN

IM

BINÄREN WERTHGEBIET.

HABILITATIONSSCHRIFT

ZUR

ERLANGUNG DER VENIA LEGENDI

FÜR DIE

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

AM

POLYTECHNIKUM ZU CARLSRUHE

VORGELEGT

VON

DR. LUDWIG WEDEKIND.

MIT EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

CARLSRUHE.
DRUCK DER G. BRAUN'SCHEN HOFBUCHDRUCKEREI.
1876.

Die nachfolgenden Blätter sind einer Reihe von Untersuchungen gewidmet, die sich im Werthgebiet einer einzelnen complexen Veränderlichen bewegen, und die sich zum grösseren Theil an verwandte Betrachtungen anlehnen, welche ich bei einer früheren Gelegenheit*) veröffentlicht habe. Ihr Inhalt gruppirt sich im grossen und ganzen um drei verschiedene Mittelpuncte. Zunächst war mein Augenmerk darauf gerichtet, dem Begriff des Doppelverhältnisses von vier complexen, auf einer reellen Fläche zweiter Ordnung angenommenen, Puncten eine weitere analytische Durchbildung zu geben und die nahen Beziehungen des dadurch gewonnenen Vorstellungskreises zu anderweitigen Arbeiten über gleichgeartete räumliche Gebilde darzulegen. Ich bin sodann dazu übergegangen, gewisse geometrische Betrachtungen über solche Punctgruppen zu entwickeln, die in einer linearen Construction der Hesse'schen Covariante einer durch vier Puncte der Fläche gebildeten biquadratischen Grundform gipfeln. Und endlich habe ich es mir angelegen sein lassen, ausgehend von der bekannten Bedeutung der Hesse'schen Form für binäre Grundformen beliebiger Ordnung, neue Relationen aufzusuchen, die den Zweck verfolgen, auch über den Zusammenhang solcher Grundformen mit weiteren, analog definirten, Covarianten gelegentliche Aufschlüsse zu ertheilen.

*) „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen"; Inauguraldissertation, Erlangen 1875. Dasselbe im Auszuge: Math. Annalen, Bd. IX, pag. 209 f.

I.

1. Betrachtet man in Riemann'scher Weise die Kugel ode allgemeiner eine beliebige reelle, nicht geradlinige Fläche zweite Ordnung*) als Träger der complexen Veränderlichen, so gebe je vier Puncte $a\,b\,c\,d$ derselben, als Repraesentanten bestimmte complexen Zahlwerthe, zu einem Doppelverhältniss Anlass, fü welches sich der Ausdruck aufstellen lässt**):

$$(1.) \qquad \lambda = (a, b, c, d) = \frac{\sin(AC)_d}{\sin(BC)_d} e^{-i(AB)_d} .$$

Dabei sind unter A, B, C beziehlich die Ebenen der Punct $b\,c\,d$, $c\,d\,a$, $d\,a\,b$ verstanden, $(AB)_d$ bedeutet den Winkel, unte welchem sich, auf der zu Grunde gelegten Fläche, die Ebenen A I im Puncte d schneiden u. s. f.

Die schneidenden Ebenen kann man durch ihre Schnittcurve mit der Fläche ersetzen und so die Definition des Doppelverhäl nisses völlig von den Beziehungen der letzteren zu dem umgebende Raum loslösen. Auf der anderen Seite kann man aber auc gerade diese Beziehungen in den Vordergrund stellen; alsdan erscheint, ihrer Ableitung zufolge, die durch die Gleichung (1 definirte Function λ als simultane (irrationale) Invariante des vo der Fläche und dem Tetraëder $a\,b\,c\,d$ gebildeten Systems, und e entsteht damit die Aufgabe, die Function selbst in ihrer Abhängig keit von den Bestimmungsstücken dieses Systems darzusteller Man gelangt dazu in einfacher Weise durch Vermittelung eine Coordinatentransformation.

---

*) Auf die verallgemeinerte Darstellung wird man geführt, wenn man d Fläche durch stereographische Projection aus einem ihrer Nabelpuncte a eine Ebene abgebildet denkt, welche der Berührungsebene im Projectionspunct parallel ist; vgl. F. Klein, „Eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes a Raumgeometrie"; Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, Sitzur vom 10. Novbr. 1873.

**) „Beiträge etc.", Annalen pag. 211.

2. Sei nämlich symbolisch

$$F = 0 = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2 \tag{2.}$$

die Gleichung der angenommenen Fläche, und seien beziehlich $\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ (d. h. vollständig: $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$; $\eta_1 \ldots \eta_4$; etc.) die Coordinaten der Puncte $a\,b\,c\,d$, um deren Doppelverhältniss es sich handelt. Durch eine Coordinatenverwandlung, welche die Eckpuncte des Fundamentaltetraëders beziehlich mit $a\,b\,c\,d$ zusammenfallen lässt, werde die Gleichung (2.) übergeführt in

$$F = 0 = a'^2_y = b'^2_y = \cdots\cdots$$

Die Substitutionsformeln, durch welche jene Umwandlung bewerkstelligt wird, sind aber

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 + \zeta_1 y_3 + \vartheta_1 y_4 \\
\varrho x_2 &= \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 + \zeta_2 y_3 + \vartheta_2 y_4 \\
\varrho x_3 &= \xi_3 y_1 + \eta_3 y_2 + \zeta_3 y_3 + \vartheta_3 y_4 \\
\varrho x_4 &= \xi_4 y_1 + \eta_4 y_2 + \zeta_4 y_3 + \vartheta_4 y_4 ,
\end{aligned}$$

und da sich die Symbole a durch die inverse Substitution transformiren, wie die Veränderlichen x, so hat man zu setzen

$$\sigma a'_1 = a_\xi\,,\ \sigma a'_2 = a_\eta\,,\ \sigma a'_3 = a_\zeta\,,\ \sigma a'_4 = a_\vartheta\,.$$

Es wird demnach:

$$F \equiv a'^2_y \equiv (a_\xi y_1 + a_\eta y_2 + a_\zeta y_3 + a_\vartheta y_4)^2\,;$$

oder, wenn man entwickelt und berücksichtigt, dass

$$\begin{aligned}
&a_\xi^2 = b_\xi^2 = \cdot\cdot = 0\,;\ a_\eta^2 = b_\eta^2 = \cdot\cdot = 0\,; \\
&a_\zeta^2 = b_\zeta^2 = \cdot\cdot = 0\,;\ a_\vartheta^2 = b_\vartheta^2 = \cdot\cdot = 0
\end{aligned} \tag{3.}$$

ist, abgesehen von dem Factor 2

$$\begin{aligned}
F \equiv\ & a_\xi a_\eta y_1 y_2 + a_\xi a_\zeta y_1 y_3 + a_\xi a_\vartheta y_1 y_4 + a_\eta a_\zeta y_2 y_3 \\
& + a_\eta a_\vartheta y_2 y_4 + a_\zeta a_\vartheta y_3 y_4\,.
\end{aligned} \tag{4.}$$

Die transformirte Gleichung hat mithin wesentlich die Gestalt:

$$\begin{aligned}
F = 0 =\ & a'_{12} y_1 y_2 + a'_{13} y_1 y_3 + a'_{14} y_1 y_4 + a'_{23} y_2 y_3 \\
& + a'_{24} y_2 y_4 + a'_{34} y_3 y_4\,,
\end{aligned} \tag{5.}$$

und die Vergleichung mit der Form (4.) lässt in den Relationen

$$a'_{12} = a_\xi a_\eta\,,\ a'_{13} = a_\xi a_\zeta\,,\ \text{etc.} \tag{6.}$$

zugleich die invariante Bedeutung der Coëfficienten einer Fläche zweiter Ordnung erkennen, welche durch ihre Gleichung auf ein eingeschriebenes Tetraëder $\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ bezogen ist.

3. Unter Zugrundelegung der Gleichungsform (5.) ist es nun leicht, mit λ die gewollte Umformung vorzunehmen. Es besteht ja allgemein für den Winkel ψ, unter dem sich zwei beliebige Ebenen u, v auf der Fläche schneiden, die Relation*)

$$\cos\psi = \frac{(a'\,b'\,c'\,u)\,(a'\,b'\,c'\,v)}{\sqrt{(a'\,b'\,c'\,u)^2\,(d'\,e'\,f'\,v)^2}},$$

vorausgesetzt, dass

$$(a'\,b'\,c'\,u)^2 \equiv -6 \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & u_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & u_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & u_3 \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der fraglichen Fläche in Ebenencoordinaten bedeutet. Das giebt also hier, wo $a'_{11} = 0 = a'_{22} = a'_{33} = a'_{44}$, und wo es sich speciell um die Winkel dreier Coordinatenebenen in ihrem gemeinsamen Schnittpunct handelt, wenn wir A, B, C beziehlich mit den Ebenen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ identificiren,

$$\cos(AC)_d = \frac{a'_{12}\,a'_{34} - a'_{13}\,a'_{24} + a'_{14}\,a'_{23}}{2\sqrt{a'_{12}\,a'_{34}\,.\,a'_{14}\,a'_{23}}};$$

$$\cos(BC)_d = \frac{a'_{12}\,a'_{34} + a'_{13}\,a'_{24} - a'_{14}\,a'_{23}}{2\sqrt{a'_{12}\,a'_{34}\,.\,a'_{13}\,a'_{24}}};$$

$$\cos(AB)_d = \frac{-a'_{12}\,a'_{34} + a'_{13}\,a'_{24} + a'_{14}\,a'_{23}}{2\sqrt{a'_{13}\,a'_{24}\,.\,a'_{14}\,a'_{23}}};$$

und daraus weiter, wenn wir zur Abkürzung

$$-(2\,a'_{13}\,a'_{24}\,.\,a'_{14}\,a'_{23} + 2\,a'_{14}\,a'_{23}\,.\,a'_{12}\,a'_{34} + 2\,a'_{12}\,a'_{34}\,.\,a'_{13}\,a'_{24} \\ - a'^2_{12}\,a'^2_{34} - a'^2_{13}\,a'^2_{24} - a'^2_{14}\,a'^2_{23}) = \Delta$$

setzen,

$$\left(\sin(AC)_d\right)^2 = \frac{-\Delta}{4\,a'_{12}\,a'_{34}\,.\,a'_{14}\,a'_{23}};\quad \left(\sin(BC)_d\right)^2 = \frac{-\Delta}{4\,a'_{12}\,a'_{34}\,.\,a'_{13}\,a'_{24}};$$

$$\left(\sin(AB)_d\right)^2 = \frac{-\Delta}{4\,a'_{13}\,a'_{24}\,.\,a'_{14}\,a'_{23}}.$$

---

*) A. Cayley, A sixth memoir upon Quantics, Philos. transactions Vol. 149 pag. 86. London 1859.

Der soeben mit Δ bezeichnete Ausdruck ist nichts anderes als die Discriminante unserer Fläche F; und er ist wesentlich negativ, da wir nur solche Flächen zulassen, die entweder selbst geschlossen sind oder doch durch reelle Collineationen in geschlossene Flächen verwandelt werden können. Wir dürfen demgemäss

$$\Delta = -\Delta'^2$$

setzen, wo unter Δ' eine reelle Grösse verstanden ist; und haben dann also:

$$\sin(AC)_d = \frac{\Delta'}{2\sqrt{a'_{12}a'_{34}\cdot a'_{14}a'_{23}}}; \quad \sin(BC)_d = \frac{\Delta'}{2\sqrt{a'_{12}a'_{34}\cdot a'_{13}a'_{24}}};$$

$$\sin(AB)_d = \frac{\Delta'}{2\sqrt{a'_{13}a'_{24}\cdot a'_{14}a'_{23}}}.$$

Durch Einführung dieser verschiedenen Winkelfunctionen in die Gleichung (1.) resultirt aber

$$\text{(7.)} \qquad \lambda = (a, b, c, d) = \frac{-a'_{12}a'_{34} + a'_{13}a'_{24} + a'_{14}a'_{23} - \Delta' i}{2\,a'_{14}a'_{23}},$$

so dass nur noch erübrigt, für a'_{12}, a'_{13} etc. die Werthe zu substituiren, welche ihnen vermöge der Gleichungen (6.) in unserer Untersuchung zukommen. Dadurch wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} \dots a'_{14} \\ \dots\dots\dots \\ a'_{41} \dots a'_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\xi a_\xi \dots d_\xi d_\vartheta \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_\vartheta a_\xi \dots d_\vartheta d_\vartheta \end{vmatrix} = a_\xi b_\eta c_\zeta d_\vartheta \begin{vmatrix} a_\xi \dots d_\xi \\ \dots\dots\dots \\ a_\vartheta \dots d_\vartheta \end{vmatrix}$$

$$= a_\xi b_\eta c_\zeta d_\vartheta\,(a_\xi b_\eta c_\zeta d_\vartheta) = \tfrac{1}{24}(a_\xi b_\eta c_\zeta d_\vartheta)^2 = \tfrac{1}{24}(\xi\eta\zeta\vartheta)^2(abcd)^2,$$

und man findet daher endgültig für den gesuchten Ausdruck des Doppelverhältnisses die folgende Form:

$$\text{(8.)} \qquad \lambda = (a, b, c, d)$$

$$= -\frac{12(a_\xi a_\eta b_\zeta b_\vartheta - a_\xi a_\zeta b_\eta b_\vartheta - a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta) + i(\xi\eta\zeta\vartheta)\sqrt{-6}\,(abcd)^2}{24\,a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta},$$

bei welcher nur zu beachten ist, dass hier durchgängig die Gleichungen (3.) Geltung behalten.

4. Um ein Beispiel für diese Entwickelung zu haben, wähle man etwa für $a_x^2 = 0$ die Kugelgleichung:

$$4(x^2 + y^2 + z^2) - 1 = 0$$

und für $\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ das bekannte Schema von vier Puncten einer auf dieser Kugel dargestellten biquadratischen Form*):

	1	2	3	4
ξ	a	b	c	-1
η	a	$-b$	$-c$	-1
ζ	$-a$	$-b$	c	-1
ϑ	$-a$	b	$-c$	-1

;

alsdann wird, wegen $4(a^2+b^2+c^2)=1$,

$$\begin{aligned} a_\xi a_\eta &= b_\xi b_\eta = \cdots = -2^3(b^2+c^2) = a_\zeta a_\vartheta = b_\zeta b_\vartheta = \cdots \\ a_\xi a_\zeta &= b_\xi b_\zeta = \cdots = -2^3(a^2+b^2) = a_\eta a_\vartheta = b_\eta b_\vartheta = \cdots \\ a_\xi a_\vartheta &= b_\xi b_\vartheta = \cdots = -2^3(a^2+c^2) = a_\eta a_\zeta = b_\eta b_\zeta = \cdots, \end{aligned}$$

und darnach

$$\begin{aligned} &a_\xi a_\eta b_\zeta b_\vartheta - a_\xi a_\zeta b_\eta b_\vartheta - a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta \\ &= 2^6\{2b^2c^2 - 2a^2(a^2+b^2+c^2)\} = -2^5(a^2-4b^2c^2)\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-6\,(a_\xi b_\eta c_\zeta d_\vartheta)^2 = -144\varDelta \\ &= 3^2.2^4\,\{4a_\xi a_\zeta b_\eta b_\vartheta \,.\, c_\xi c_\vartheta d_\eta d_\zeta - (a_\xi a_\eta b_\zeta b_\vartheta - a_\xi a_\zeta b_\eta b_\vartheta - \\ &\qquad - a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta)(c_\xi c_\eta d_\zeta d_\vartheta - c_\xi c_\zeta d_\eta d_\vartheta - c_\xi c_\vartheta d_\eta d_\zeta)\} \\ &= 3^4.2^4\,\{2^{14}(a^2+b^2)^2(a^2+c^2)^2 - 2^{10}(a^2-4b^2c^2)^2\} \\ &= 3^2.2^{10}\{(1-4c^2)^2(1-4b^2)^2 - 2^4(a^2-4b^2c^2)^2\} \\ &= 3^2.2^{10}\{(1-4b^2-4c^2+16b^2c^2)^2 - 2^4(a^2-4b^2c^2)^2\} \\ &= 3^2.2^{14}\{(a^2+4b^2c^2)^2 - (a^2-4b^2c^2)^2\} \\ &= 3^2.2^{18}\,a^2b^2c^2\,, \end{aligned}$$

also schliesslich

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \lambda &= -\frac{12.-2^5(a^2-4b^2c^2)+i\,3.2^9\,abc}{24.2^6(a^2+c^2)^2} = \frac{a^2-4b^2c^2-4abci}{4(a^2+c^2)^2} \\ &= \left(\frac{a-2bci}{2(a^2+c^2)}\right)^2, \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit einem Resultate, das sich früher**) auf anderem Wege ergeben hatte.

---

*) F. Klein, „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst“; Math. Annalen, Bd. IX, pag. 192. Die Wahl der Vorzeichen ist der Betrachtung ibid. pag. 214 entnommen.

**) „Beiträge etc.“ a. a. O. pag. 216.

5. Neben jede der Gleichungen (7.) oder (8.) stellen sich in bekannter Weise fünf andere, gleichberechtigte Definitionen der Zahl λ; ausgehend insbesondere von der ersten dieser Gleichungen gewinnen wir die folgende Darstellung für die sechs zusammengehörigen Werthe des betreffenden Doppelverhältnisses, die uns weiterhin von Nutzen sein wird:

$$
(10.)\quad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{a'_{12}\,a'_{34} + a'_{13}\,a_{24} - a'_{14}a'_{23} + \Delta' i}{2a'_{12}\,a'_{34}};\\
\lambda'_1 &= \frac{1}{1-\lambda} = \frac{a'_{12}\,a'_{34} - a'_{13}\,a'_{24} + a'_{14}a'_{23} - \Delta' i}{2a'_{12}\,a'_{34}};\\
\lambda_2 &= \frac{1}{\lambda} = \frac{-a'_{12}\,a'_{34} + a'_{13}\,a'_{24} + a'_{14}\,a'_{23} + \Delta' i}{2a'_{13}\,a'_{24}};\\
\lambda'_2 &= \frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{a'_{12}\,a'_{34} + a'_{13}\,a'_{24} - a'_{14}\,a'_{23} - \Delta' i}{2a'_{13}\,a'_{24}};\\
\lambda_3 &= 1-\lambda = \frac{a'_{12}\,a'_{34} - a'_{13}\,a'_{24} + a'_{14}\,a'_{23} + \Delta' i}{2a'_{14}\,a'_{23}};\\
\lambda'_3 &= \quad \lambda \quad = \frac{-a'_{12}a'_{34} + a'_{13}a'_{24} + a'_{14}a'_{23} - \Delta' i}{2a'_{14}\,a'_{23}}.
\end{aligned}
$$

Denken wir uns die Puncte $a\,b\,c\,d$ zu je zwei Paaren durch räumliche Gerade verbunden, so erscheinen die vorstehenden sechs Werthe λ_1 bis λ'_3 selbst paarweise auf die entstehenden drei Systeme von Geraden bezogen, so zwar, dass durch jedes Geradenpaar zwei reciproke Werthe des Doppelverhältnisses absorbirt werden.

Auf die Untersuchung eben der räumlichen Gebilde, wie sie bei dieser letzteren Auffassung zu Tage treten, sind aber in neuerer Zeit von ganz anderen Gesichtspuncten aus die Herren D'Ovidio, Lindemann und andere*) geführt worden, und es war daher von Interesse, dem Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Betrachtungsweisen nachzugehen. D'Ovidio, dessen Entwickelungen ich dabei im wesentlichen gefolgt bin, stellt für das aus der Fundamentalfläche einer projectivischen Massbestimmung und zwei beliebigen geraden Linien R, R' gebildete System

*) E. D'Ovidio, „Studio sulla geometria projettiva", Annali di Matematica, T. VI; „I complessi e le congruenze lineari nella geometria projettiva", A. d. M., T. VII; „Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e 2° grado in geometria projettiva", Accademia di Torino 1875. — F. Lindemann, „Ueber unendlich kleine Bewegungen etc.", Math. Annalen, Bd. VII. — H. Stahl, „Ueber die Massfunctionen der analytischen Geometrie", Programmschrift, Berlin 1873.

zwei absolute (zweiwerthige) Invarianten auf, die er als Moment und Comoment der beiden Geraden bezeichnet. Jenes ist definirt als das Product der Sinus der beiden kürzesten Abstände, welche im Sinne projectivischer Geometrie zwischen R, R' statthaben; dieses als das Product der Cosinus der nämlichen beiden Abstände. Bedeutet

$$A_{xx} = 0 = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$$

die Gleichung der Fundamentalfläche; sind $x\; x''$ zwei beliebige Puncte von R und $x'\; x'''$ zwei Puncte auf R', und werden ausserdem unter $A_{x^{(r)}x^{(s)}}$ Polarenbildungen der Form A_{xx} verstanden, so resultiren für die genannten Invarianten die analytischen Ausdrücke*):

$$m(R, R') = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} & A_{xx''} & A_{xx'''} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} & A_{x'x''} & A_{x'x'''} \\ A_{x''x} & A_{x''x'} & A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x} & A_{x'''x'} & A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx''} \\ A_{x''x} & A_{x''x''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x'''} \\ A_{x'''x'} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix}} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

(11.)

$$cm(R, R') = \frac{\begin{vmatrix} A_{xx'} & A_{xx'''} \\ A_{x''x'} & A_{x''x'''} \end{vmatrix}}{\left\{ \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx''} \\ A_{x''x} & A_{x''x''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x'''} \\ A_{x'''x'} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

---

*) Ich theile die Ausdrücke, die der erstgenannten Arbeit von D'Ovidio entnommen sind, und an welche die weiteren Ausführungen des Textes anknüpfen, vollständig mit, weil sie an der betreffenden Stelle [§ 3, (10)', (11)'] theils durch Druckfehler entstellt sind, theils bei consequenter Durchführung der einmal für die Puncte x gewählten Bezeichnung in den Accenten abgeändert werden müssen (in dem ersten der am gleichen Orte für $m\,(R, R')$ angegebenen Werthe ist ausserdem $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{\alpha}$ zu ersetzen). — Bei Lindemann werden die Functionen Moment und Comoment beziehlich „Moment“ und „Neigung“ genannt, mit Rücksicht darauf, dass sie beim Uebergange zu metrischer Geometrie die bekannten Functionen gleicher Benennung hervorrufen; „Unendlich kleine Bewegungen etc.“ §. 1.

Lassen wir daher die Fundamentalfläche $A_{xx}=0$ mit unserer Fläche $a_x^2=0$, auf der wir die complexen Zahlen darstellen, und die beiden Geraden $R\,R'$ mit dem einen oder anderen der oben erwähnten Geradenpaare zusammenfallen (wodurch dann allerdings $R\,R'$ an die Bedingung geknüpft werden, die benutzte Fläche in reellen Punkten zu treffen), so werden auf die entstehende Configuration die Ausdrücke (11.) immer noch Anwendung finden. Und sie werden sich, wenn wir ausserdem zur Festlegung der betreffenden Geraden statt der beliebigen Puncte $x\,x'\,x''\,x'''$ die Puncte $a\,b\,c\,d$ oder $\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ heranziehen, in welchen jene Geraden von der Fundamentalfläche geschnitten werden, dergestalt specialisiren, dass sie mit den sechs Doppelverhältnisswerthen des nämlichen Gebildes vergleichbar werden.

6. Unter den gemachten Voraussetzungen wird nun einfach jedes $A_{x^{(i)}x^{(k)}}$ mit einer der Formen $a_\xi\,a_\eta$, $a_\xi\,a_\zeta$, etc. identisch, während wieder $A_{xx}=a_\xi\,a_\xi=0$ ist u. s. f. Man gewinnt sonach beispielsweise für Moment und Comoment der beiden Geraden ab, cd die Werthe

$$m\,(ab\,,cd=\frac{\sqrt{a_\xi\,b_\eta\,c_\zeta\,d_\vartheta\,(a_\xi\,b_\eta\,c_\zeta\,d_\vartheta)}}{a_\xi\,a_\eta\,b_\zeta\,b_\vartheta},$$

$$cm\,(ab\,,cd)=\pm\,\frac{a_\xi\,a_\zeta\,b_\eta\,b_\vartheta-a_\xi\,a_\vartheta\,b_\eta\,b_\zeta}{a_\xi\,a_\eta\,b_\zeta\,b_\vartheta},$$

wofür man, mit Rücksicht auf die oben gebrauchten Bezeichnungen, auch schreiben darf:

$$m(ab,\ cd)=\frac{\sqrt{\varDelta}}{a'_{12}\,a'_{34}}=\pm\frac{\varDelta' i}{a'_{12}\,a'_{34}};\ cm\,(ab,\ cd)=\pm\,\frac{a'_{13}\,a'_{24}-a'_{14}\,a'_{23}}{a'_{12}\quad a'_{34}}.$$

Aehnliche Ausdrücke resultiren für Moment und Comoment der beiden anderen Geradenpaare. Für unsere Zwecke ist es wünschenswerth, die imaginäre Einheit, wo sie auftritt, explicite vor Augen zu haben; wir werden deshalb weiterhin das von dem Factor i befreite $m\,(ab, cd)$ als das Moment der beiden Geraden ab, cd definiren und die beiden Werthe, die dasselbe besitzt, als Mm_1, Mm'_1 unterscheiden; ebenso mögen Cm_1, Cm'_1 die beiden Werthe bedeuten, welche durch $cm\,(ab,\ cd)$ vorgestellt sind. Bezeichnen dann Mm_2, Mm'_2, Cm_2, Cm'_2 die ähnlich

definirten Functionen für das Geradenpaar ac, bd und Mm_3, Mm'_3, Cm_3, Cm'_3 die gleichen Functionen für ad, bc, so ergiebt sich schliesslich die folgende Tabelle für diese verschiedenen Ausdrücke:

$$Cm_1 = -Cm'_1 = \frac{a'_{13}a'_{24} - a'_{14}a'_{23}}{a'_{12}a'_{34}}; \quad Mm_1 = -Mm'_1 = \frac{\varDelta'}{a'_{12}a'_{34}}$$

$$Cm_2 = -Cm'_2 = \frac{a'_{14}a'_{23} - a'_{12}a'_{34}}{a'_{13}a'_{24}}; \quad Mm_2 = -Mm'_2 = \frac{\varDelta'}{a'_{13}a'_{24}}$$

$$Cm_3 = -Cm'_3 = \frac{a'_{12}a'_{34} - a'_{13}a_{24}}{a'_{14}a'_{23}}; \quad Mm_3 = -Mm'_3 = \frac{\varDelta'}{a'_{14}a'_{23}}.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit dem Schema (10.) liefert hiernach die Relationen

$$(12.)\quad \lambda_k = \frac{1 + Cm_k + i\,Mm_k}{2}, \quad \lambda'_k = \frac{1 + Cm'_k + i\,Mm'_k}{2} \quad (k = 1,2,3),$$

während, wenn man die drei Geradenpaare zum Eintheilungsgrund macht,

λ_2, λ'_3 durch die Geraden ab, cd den Functionen $Cm_1, Mm_1; Cm'_1, Mm'_1$,
λ_3, λ'_1 „ „ „ ac, bd „ „ $Cm_2, Mm_2; Cm'_2, Mm'_2$,
λ_1, λ'_2 „ „ „ ad, bc „ „ $Cm_3, Mm_3; Cm'_3, Mm'_3$

zugeordnet erscheinen.

7. Durch die Gleichungen (12.) ist unmittelbar der Zusammenhang zwischen den beiden Auffassungen unseres geometrischen Gebildes hergestellt, wie wir ihn suchten. Sie gestatten demzufolge, jeden functionentheoretischen Satz, der von Doppelverhältnissen complexer Puncte gilt, geradezu in die projectivische Sprache der Momente und Comomente zu übertragen, und umgekehrt die in der letzteren geltenden Theoreme, soweit sie für solche Geradenpaare statthaben, die die Fundamentalfläche treffen, ohne weiteres für jene erstere Anschauung zu verwerthen.

In erster Linie erwähnen wir nach dieser Richtung als vollkommen coordinirt die Sätze:

Ist das Moment zweier räumlichen Geraden gleich Null, so schneiden sich beide Geraden („Studio etc." Annali T. VI, pag. 84).	Ist das Doppelverhältniss von vier Puncten reell, so schneiden sich die räumlichen Verbindungslinien dieser Puncte („Beiträge etc.", Annalen Bd. IX, pag. 212).

Ist das Comoment gleich Null, so stehen beide Geraden auf einander senkrecht („Studio etc.“, pag. 85).

Hat das Doppelverhältniss (a, b, c, d) in seinem reellen Bestandtheil den Werth $\frac{1}{2}$, so stehen die Geraden ab, cd in projectivischem Sinne auf einander senkrecht.

8. Man kann ferner für den Augenblick durch die Gleichungen

$$1 + Cm_1 = 2cm_1, \quad 1 + Cm'_1 = 2cm_2, \quad 1 + Cm_2 = 2cm_3,$$
$$1 + Cm'_2 = 2cm_4, \quad 1 + Cm_3 = 2cm_5, \quad 1 + Cm'_3 = 2cm_6;$$
$$Mm_1 = 2m_1, \quad Mm'_1 = 2m_2, \quad Mm_2 = 2m_3, \quad Mm'_2 = 2m_4,$$
$$Mm_3 = 2m_5, \quad Mm'_3 = 2m_6$$

an Stelle der Cm, Mm andere Invarianten cm, m einführen und hat dann je sechs zusammengehörige Werthe des Doppelverhältnisses dargestellt durch die gemeinsame Formel:

$$\lambda = cm_k + m_k i \qquad (k = 1, 2, \cdots 6). \tag{13.}$$

Die Elimination von λ liefert eine grosse Zahl von Relationen zwischen den neuen Invarianten: wir begnügen uns, die nachstehende hervorzuheben:

$$cm_1 m_4 + cm_4 m_1 + cm_2 m_5 + cm_5 m_2 + cm_3 m_6 + cm_6 m_3 = 0,$$

die ihrerseits nach der Bedeutung der cm, m identisch ist mit jeder der folgenden:

(14.)
$$Mm_1 (Cm_2 + Cm_3) + Mm_2 (Cm_3 + Cm_1) + Mm_3 (Cm_1 + Cm_2) = 0;$$
(14.*)
$$Cm_1 (Mm_2 + Mm_3) + Cm_2 (Mm_3 + Mm_1) + Cm_3 (Mm_1 + Mm_2) = 0.$$

9. Eine weitere Gruppe von Sätzen resultirt, wenn man dazu übergeht, fünf, sechs oder mehr Puncte der Fläche in's Auge zu fassen und die bekannten Doppelverhältnissbeziehungen, die zwischen diesen Puncten bestehen, in geeigneter Weise zu interpretiren.

So findet beispielsweise bei fünf Puncten $a\,b\,c\,d\,e$ die leicht zu verificirende Identität statt*):

$$(a, b, c, d)\,(a, b, d, e)\,(a, b, e, c) = 1.$$

*) Möbius, „Barycentrischer Calcul“ pag. 250. — Vgl. auch Witzschel, „Grundlagen der neueren Geometrie“ pag. 31.

Sie ergiebt ohne weiteres den Satz: Bildet man für eine beliebig angenommene Raumgerade mit Bezug auf jede Seite eines gegebenen ebenen Dreiecks die Function $cm + im$, in der cm, m das modificirte Comoment und Moment der beiden Geraden gegen einander bedeuten, so hat das Product der so entstehenden drei Functionen (wenn man nur hinsichtlich der Wahl der Vorzeichen der in cm, m eingehenden Quadratwurzeln die erforderliche Vorsicht gebraucht) stets den Werth $+1$. Oder allgemeiner:

Hat man in zwei beliebigen Ebenen zwei Dreiecke und bildet für jede Seite des einen mit Bezug auf jede Seite des anderen die Ausdrücke $cm_{h,k}$, $m_{h,k}$ für das abgeänderte Comoment und Moment, so hat das Product der neun Grössen $cm_{h,k} + im_{h,k}$ den Werth 1.

10. Ein anderes Beispiel liefert bei sechs Puncten die Gleichung*)

$$(a, b, c, d)\,(a, b, e, f) = (a, b, e, d)\,(a, b, c, f)\,;$$

man hat ihr entsprechend:

Bildet man für eine feste Gerade L mit Bezug auf jede von zwei beliebig anzunehmenden Geraden die Werthe $cm + im$, so bleibt das Product derselben ungeändert, wenn man unter Beibehaltung von L die anderen Geraden durch irgend zwei ihrer gemeinsamen Transversalen ersetzt.

Und es ist ersichtlich, dass sich diese Sätze in mannichfacher Weise vervielfältigen lassen.

II.

1. Die Systeme von vier Puncten einer Fläche zweiten Grades, welche in den vorstehend behandelten Aufgaben benutzt wurden, constituiren im Sinne der algebraischen Invariantentheorie ebensoviele biquadratische Formen, die dann ihrerseits vermöge der zugehörigen vollständigen Formensysteme anderen covarianten Punctgruppen Entstehung geben. Man mag sich daher die fernere Aufgabe stellen, für die wechselseitigen Beziehungen dieser Punct-

---

*) Möbius, l. c. — Witzschel a. a. O. pag. 30.

gruppen eine rein geometrische Einkleidung zu finden; dies Problem ist im folgenden mit besonderer Anwendung auf die Hesse'sche Form einer eingehenderen Untersuchung unterzogen.

2. Das vollständige Formensystem besteht, wenn unter f die Ausgangsform verstanden wird, in dem vorausgesetzten Fall aus den fünf Formen*)

$$f,\ H,\ T,\ i,\ j.$$

Dabei ist H die Hesse'sche Covariante von f, T die Functionaldeterminante von f und H; und i, j bedeuten diejenigen Invarianten, durch deren Verschwinden die aequianharmonische, beziehlich die harmonische Lage der vier Wurzelpuncte der Grundform ausgesagt wird; H ist, wie f, von der vierten, T von der sechsten Ordnung. Alle Formen der linearen Schaar $\varkappa f + \lambda H$ besitzen das nämliche T; unter ihnen befinden sich insbesondere, entsprechend den drei Wurzeln $\frac{\varkappa}{\lambda} = m,\ m',\ m''$ der cubischen Resolvente

$$(1.)\qquad \varkappa^3 - \frac{i}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{j}{3}\lambda^3 = 0$$

von f, drei vollständige Quadrate:

$$(2.)\qquad H + mf = -2\varphi^2,\ H + m'f = -2\psi^2,\ H + m''f = -2\chi^2.$$

Zwischen den Formen φ, ψ, χ besteht zufolge ihrer Definition die Identität:

$$(3.)\qquad (m' - m'')\,\varphi^2 + (m'' - m)\,\psi^2 + (m - m')\,\chi^2 = 0\,;$$

sie haben ausserdem die Bedeutung von drei quadratischen Factoren der Covariante T, dergestalt, dass man die Darstellung hat:

$$(4.)\qquad T = -2\varphi\psi\chi.$$

Geometrisch sind die Formen φ, ψ, χ dadurch ausgezeichnet, dass sie drei Punctepaare repraesentiren, welche zu je zweien harmonisch gegen einander liegen. Die Grundform endlich lässt sich auf drei Arten in zwei Punctepaare zerfällen, die selbst jedesmal gleichzeitig gegen das eine oder andere der drei Paare φ, ψ, χ harmonisch liegen.

---

*) Clebsch, „Theorie der binären algebraischen Formen" § 40 f. Die betreffenden Abschnitte dieses Lehrbuches sind auch hinsichtlich der weiteren Sätze zu vergleichen, die im Text als bekannt vorausgesetzt werden und dort nur zusammengestellt sind, weil von ihnen fortlaufender Gebrauch gemacht wird.

3. Die zuletzt geschilderten Verhältnisse sind es namentlich, auf denen die von Herrn Klein (vgl. die Anmerkung pag. 8) gegebene Darstellung der biquadratischen Form auf der $x + iy$-Kugel fusst. Die Fläche wird innerhalb dieser Darstellung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, dessen Nullpunct im Mittelpunct der Kugel liegt; die Durchstossungspuncte des Axenkreuzes mit der Fläche dienen dann zur Versinnlichung der Wurzelpuncte von T, und für die Coordinaten der darstellenden Puncte einer beliebigen Form der Schaar $\varkappa f + \lambda H$ resultirt das bereits oben (I, Art. 4) berührte Schema

$$(5.)\qquad \begin{array}{lrrr} f_1: & a & b & c \\ f_2: & a & -b & -c \\ f_3: & -a & -b & c \\ f_4: & -a & b & -c\,. \end{array}$$

Diese Veranschaulichung des gegebenen Werthgebietes bildet auch für die folgenden Betrachtungen die dauernde Grundlage; und dabei wird es gestattet sein, die Formen $\varkappa f + \lambda H$ Angesichts ihres geometrisch durchaus gleichartigen Verhaltens selber kurzweg mit f zu bezeichnen.

4. Die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen der Grundform und ihrer Hesse'schen Covariante gewähren nicht ein gleich einfaches Bild, wie es uns in dem Verhalten zwischen f und T entgegentritt. Um daher für die Untersuchung derselben einen geeigneten Angriffspunct zu gewinnen, wird es angezeigt sein, der Kugel zunächst die gerade Linie oder, was hier der grösseren Durchsichtigkeit des geometrischen Bildes halber vorzuziehen ist, einen Kegelschnitt als das Werthgebiet einer binären Veränderlichen zu substituiren und einstweilen in diesem, der Anschauung bequemer zugänglichen, Gebiete die Vorkommnisse zu verfolgen, welche uns zu beschäftigen haben. Dabei ist dann allerdings zu beachten, dass diese einfach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten lediglich die Versinnlichung der reellen Zahlenreihe vermitteln, und dass daher alle Sorgfalt darauf verwendet werden muss, die zu Tage tretenden Ergebnisse projectivisch allgemein zu formuliren, um ihnen ihre Anwendbarkeit auf das complexe Zahlengebiet, in das man mit Nothwendigkeit hineingedrängt wird, und damit auch ihre Darstellbarkeit auf der $x + iy$-Kugel zu sichern.

5. Die Repraesentation auf dem Kegelschnitt gewinnen wir, wenn wir vermöge der Substitutionsformeln

$$\varrho x_1 = \sqrt{m' - m''} \cdot \varphi$$
$$\varrho x_2 = \sqrt{m'' - m} \cdot \psi$$
$$\varrho x_3 = \sqrt{m - m'} \cdot \chi$$

die binären, quadratischen Formen φ, ψ, χ geradezu als ternäre Variabele interpretiren, wonach dann die zwischen ihnen bestehende [dentität die Beweglichkeit des Punctes x in der Ebene unmittelbar auf das Gebiet der durch die Gleichung

(6.) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

vorgestellten Curve zweiter Ordnung einschränkt. Dieselbe ist, vie man sieht, auf ein Polardreieck bezogen; und wir denken sie uns ıatürlich reell gegeben, trotz der Gleichungsform (6.), die wir ediglich wegen ihrer vollkommenen Symmetrie beibehalten.

Da die Forderungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ einfach die Glei-hungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ nach sich ziehen, so dienen der Darstellung von T die drei Punctepaare AA', BB', CC', in velchen die Curve von den Seiten des Polardreiecks getroffen vird (Fig. 1., wo I II III das genannte Dreieck bedeutet, und wo, vie es der Natur des Coordinatendreiecks oder wenn man will em Charakter der Form T entspricht, das eine dieser Paare sich iner reellen Veranschaulichung auf der Curve entzieht).

Für f resultirt unter der gemachten Voraussetzung, durch ermittelung der Gleichungen (2.) und bei geeigneter Wahl onstanter Coëfficienten $a\,b\,c$, jede der drei gleichberechtigten ormen:

$$f = a(x_2^2 - x_3^2) = b(x_3^2 - x_1^2) = c(x_1^2 - x_2^2);$$

as zugehörige H nimmt in ähnlicher Weise die drei Gestalten an:

$$H = \beta x_2^2 - \gamma x_3^2 = \gamma' x_3^2 - \alpha' x_1^2 = \alpha'' x_1^2 - \beta'' x_2^2 .$$

Die Grundform — und ebenso ihre Hesse'sche Covariante - ist somit durch vier Puncte $f_1\,f_2\,f_3\,f_4$ unseres Kegelschnitts erart vorgestellt, dass die Verbindungslinien je zweier Paare dieser uncte durch eine und dieselbe Ecke des Coordinatendreiecks hin-ırchgehen. Und da auf Grund des Hesse'schen Uebertragungs-incips*) ein ebener Strahlbüschel eine Curve zweiter Ordnung

*) Borchardts Journal, Bd 66.

immer in Punctepaaren einer Involution schneidet, deren Centrum[*]
durch den Mittelpunct des Strahlbüschels und deren Fundamenta
oder Ordnungselemente durch die Schnittpuncte der Polare d
Centrums mit der Curve gebildet werden, so bestätigt der Auge
schein die vorhin behaupteten Lagenbeziehungen des Punc
quadrupels f zu den darstellenden Puncten der Form T.

6. Die gegenseitige Abhängigkeit zwischen zusammengehörig
Formen f und H findet einen verhältnissmässig einfachen Ausdru
in der Relation

$$D_f^2 + 2\,(D_H - 1)\,D_f - D_H = 0\,, \tag{7.}$$

welche zwischen einem Doppelverhältniss der vier Puncte f u
dem correspondirenden Doppelverhältniss des Quadrupels H stat
hat.**) Wir richten deshalb speciell unser Augenmerk darau
uns den Inhalt dieser Gleichung geometrisch zugänglich zu mache
Das hierdurch gekennzeichnete Problem zerfällt in eine Rei
verschiedener Fragestellungen, die wir demgemäss gesondert b
handeln.

7. In erster Linie muss es uns darum zu thun sein, für d
Werth von D_f eine eindeutige Darstellung auf dem Kegelschni
zu gewinnen, die uns in den Stand setzt, D_f mit anderen Za
werthen, und namentlich mit D_H, in übersichtlicher Weise
vergleichen. Zu dem Ende treffen wir auf der Curve ei
Coordinatenbestimmung, welche die Lage eines beliebigen Punct
durch das Doppelverhältniss definirt, das er mit drei fest
Puncten der Curve bildet. Als diese festen Puncte wählen w
$C'\,C\,A$; dann ist durch die Forderung

$$(C', C, F'_1, A) = F'_1$$

ein Punct der Curve unzweideutig festgelegt, sobald wir n
innerhalb des Doppelverhältnisses auf Grund der Definitionsgleichu

$$(C', C, F'_1, A) = \frac{C'\,F'_1}{F'_1\,C} : \frac{C'A}{AC}$$

jedem der auftretenden Puncte eine ganz bestimmte Stelle anweise
Für die Fundamentalpuncte $C'\,C\,A$ der Coordinatenbestimmu

---

*) Lüroth, „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen m
Würfen“, Math. Annalen, Bd. VIII, p. 150.

**) „Beiträge etc.“ a. a. O. pag. 216.

gewinnt man dabei die Auffassung, dass ihnen beziehlich die Werthe 0 ∞ 1 beizulegen sind, da

$$(C', C, C', A) = 0\,,\ (C', C, C, A) = \infty\,,\ (C', C, A, A) = 1$$

wird.*) Projicirt man die Curve von C aus auf eine zur Tangente in C parallele Gerade, und entsprechen dabei die Puncte $c'\,c\,f'_1\,a$ der letzteren den Curvenpuncten $C'\,C\,F'_1\,A$, so ist (C', C, F'_1, A) $\overline{\wedge}$ (c', c, f'_1, a); das letztere Doppelverhältniss reducirt sich aber auf das Streckenverhältniss $\frac{c'f'_1}{c'a}$, da der Punct c unendlich fern liegt, und es bedeutet daher unmittelbar den Zahlwerth F'_1, wenn man unter c' den Nullpunct, unter a den Einheitspunct der Geraden versteht.

8. Soll, wie wir hier verlangen, F_1' die Darstellung von D_f vermitteln, so ist, da uns zur Kenntniss von D_f nur das Punctquadrupel $f_1\,f_2\,f_3\,f_4$ gegeben ist, der gesuchte Punct in Gemässheit der Forderung

$$(C',\ C,\ F'_1,\ A)\ \overline{\wedge}\ (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

zu bestimmen. Dies kann natürlich dadurch geschehen, dass man die gegebenen Puncte $C'\,C\,A$ in gleicher Reihenfolge den Puncten $f_1\,f_2\,f_4$ projectivisch entsprechen lässt, und dass man dann nach dem Steiner'schen Verfahren den correspondirenden Punct zu f_3 aufsucht. Man hat sich dabei nur zu vergegenwärtigen, dass, wenn $P\,Q$ irgend zwei Puncte der einen, $P'\,Q'$ die entsprechenden Puncte der anderen Reihe sind, die geraden Verbindungslinien PQ', $P'Q$ sich auf einer festen Geraden, der Verbindungslinie der Doppelpuncte der projectivischen Zuordnung, schneiden. Wir ziehen indessen vor, aus Gründen, die im Verlauf der Untersuchung selber zu Tage treten werden, die betreffende directe Construction durch eine andere zu ersetzen, welche zweier successiven Schritte bedarf, um den Punct F'_1 zu ergeben.

9. Bedeute allgemein $(P, QRST)$ das Doppelverhältniss von vier Strahlen PQ, PR, PS, PT, und werde — vgl. Fig. 1 — f_2 von III aus in den Punct γ, von f_2 selbst aus durch die Tan-

*) Vgl. Lüroth, „Das Imaginäre etc.“ pag. 190. Die Abweichung von den dort angeführten Bestimmungen kommt darauf hinaus, dass der Text die ältere Definition des Doppelverhältnisses, wie sie bei Möbius auftritt, beibehält, und dass diese eine andere Anordnung der vier Elemente voraussetzt als die v. Staudt'sche Begriffsbestimmung der Würfe.

gente des Kegelschnitts in den Punct ζ der Dreiecksseite $I\,II$ projicirt. Dann bestehen offenbar die Relationen

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) \overline{\wedge} (f_2, f_1 f_2 f_3 f_4) \overline{\wedge} (\gamma, \zeta, II, I) = \\ (II, I, \gamma, \zeta) \overline{\wedge} (C, II\,I\,\gamma\,\zeta).$$

Der letztgenannte Strahlbüschel nun begegnet der Curve in den Puncten $C'\,C\,\Gamma_1\,\Gamma_2$; und die Anwendung der Gesetze des vollständigen Vierseits auf diese Punctgruppe, deren Diagonaldreiseit durch die Puncte $III\,\gamma\,\zeta$ gegeben ist, zeigt, dass die Verbindungslinie $\Gamma_1\,\Gamma_2$ durch den Punct III geht. Man hat also schiesslich auch

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) \overline{\wedge} (C', C, \Gamma_1, \Gamma_2)$$

und damit ein erstes Ergebniss, das sich — mit Rücksicht auf die spätere Deutung an der Kugel — folgendermassen in Worte fassen lässt:

Hat man auf dem Kegelschnitt ein Punctquadrupel $f_1\,f_2\,f_3\,f_4$, welches eine Form der Schaar $\varkappa f + \lambda H$ darstellt, und bezeichnet $III\,\zeta$ die Gerade, welche gleichzeitig zu $f_1\,f_2$ und $A\,A'$ polar conjugirt ist, so lege man durch die Puncte $C\,C'$ beziehlich zwei Gerade, welche ihrerseits conjugirt sind zu $III\,\zeta$, und welche die Curve in den Puncten $\Gamma_1\,\Gamma_2$ treffen mögen. Die entstehende Gerade $\Gamma_1\,\Gamma_2$ ist conjugirte Polare zu der Dreiecksseite $I\,II$, und für ihre Schnittpuncte mit der Curve gilt die Beziehung

$$(C', C, \Gamma_1, \Gamma_2) \overline{\wedge} (f_1, f_2, f_3, f_4) = D_f.$$

10. Zu bemerken ist, dass auch für die Puncte $\Gamma_3\,\Gamma_4$, durch welche $\Gamma_1\,\Gamma_2$ zu einem Quadrupel f ergänzt werden, die analoge Relation statthat:

$$(C', C, \Gamma_3, \Gamma_4) \overline{\wedge} (f_1, f_2, f_3, f_4) = D_f;$$

man verificirt das in einfachster Weise, wenn man die kritischen Puncte passend projicirt, wodurch man die folgende Reihe projectivischer Gleichheiten herstellen kann:

$$(C', C, \Gamma_3, \Gamma_4) \overline{\wedge} (\Gamma_2, C'\,C\,\Gamma_3\,\Gamma_4) \overline{\wedge} (\gamma, \zeta, II, I) \\ = (II, I, \gamma, \zeta);$$

und in der That ist $(II, I, \gamma, \zeta) \overline{\wedge} (C', C, \Gamma_1, \Gamma_2)$ zufolge des Art. 9.

11. Kennt man $\Gamma_1\,\Gamma_2$, so erfolgt die Bestimmung des Punctes F'_1 durch die Forderung $(C', C, F'_1, A) \overline{\wedge} (C', C, \Gamma_1, \Gamma_2)$

welche ja die Puncte $C' C$ unmittelbar als die Doppelelemente einer neuen projectivischen Zuordnung charakterisirt, ohne weitere Mühe.

Nach einer in Art. 8 gemachten Bemerkung haben sich die Verbindungslinien $F'_1 \Gamma_2$, $A \Gamma_1$ in einem Puncte der Geraden $C' C$ zu schneiden; und man findet daher den gesuchten Punct F'_1 (vgl. Fig. 2) durch die folgende Construction:

Man bestimme die gemeinsame conjugirte Polare der beiden Geraden $C' C$, $A \Gamma_1$ und lege durch Γ_2 den Strahl, der seinerseits zu dieser Gerade polar conjugirt ist; der Punct F'_1, in welchem der genannte Strahl die Curve zum zweiten Male trifft, hat die Eigenschaft, die Gleichheiten zu befriedigen:

$$(C', C, F'_1, A) \overline{\wedge} (C', C, \Gamma_1, \Gamma_2) = D_f.$$

Mit $C' C \Gamma_1 \Gamma_2$ ist, wie wir sahen (Art. 10), die Punctreihe $C' C \Gamma_3 \Gamma_4$ projectivisch; und da (C', C, F'_1, A) eine eindeutig definirte Function ist, so müssen wir den nämlichen Punct F'_1 erhalten, wenn wir in der eben geschilderten Construction Γ_1 durch den Punct Γ_3, Γ_2 durch Γ_4 ersetzen.

12. Auf der Kugel findet zufolge der Gleichung (I, Art. 4):

$$\sqrt{D_f} = \frac{a - 2bci}{2(a^2 + c^2)}$$

auch die Quadratwurzel aus dem Doppelverhältniss von f eine rationale Darstellung durch die rechtwinkligen Coordinaten der Fläche; es ist deshalb von Interesse (wenngleich wir dessen für unsere nächsten Zwecke kaum bedürfen), auch auf dem Kegelschnitt sich über die Lage des darstellenden Punctes von $\sqrt{D_f}$ zu orientiren. Nun wird allgemein die Quadratwurzel aus dem Doppelverhältniss von vier Puncten $C' C \Gamma_1 \Gamma_2$ des Kegelschnitts, wie sich durch eine Umkehrung des geometrischen Multiplicationsverfahrens bei zwei Würfen*) ganz unmittelbar ergiebt, mit Hülfe der Polare des Schnittpunctes der Geraden $C' C$, $\Gamma_1 \Gamma_2$ gefunden; und zwar ist, wenn $A A'$ die Puncte sind, in denen diese Polare die Curve trifft,

$$(C', C, \Gamma_1, A) = -(C', C, \Gamma_1, A') = \sqrt{(C', C, \Gamma_1, \Gamma_2)}.$$

*) Lüroth, a. a. O. pag. 191.

Ebenso ergiebt daher die Anwendung des gleichen Verfahrens auf das Doppelverhältniss (C', C, F'_1, A) die Relationen:

$$(C', C, F'_1, \varDelta) = -(C', C, F'_1, \varDelta') = \sqrt{(C', C, F'_1, A)},$$

wenn $\varDelta\,\varDelta'$ die Berührungspuncte der Tangenten sind, welche sich aus dem Schnittpunct ε der Geraden $C'\,C$, $F'_1\,A$ an die Curve legen lassen.

Daran knüpft sich ausserdem die Bemerkung, dass wegen der Relation $(C', C, F'_1, A) \overline{\wedge} (C', C, \varGamma_1, \varGamma_2)$ die beiden Punctreihen $C'\,C\,\varGamma_1\,A$, $C'\,C\,F'_1\,\varDelta$ projectivisch sind, dass also $\varGamma_1\varDelta$, AF'_1 sich auf $C\,C'$ begegnen müssen, d. h. dass der Punct $\varDelta$ mit dem Punct $\varGamma_1$ (und demnach auch $\varDelta'$ mit $\varGamma_3$) zusammenfällt. Und wenn Q den Pol von $A\,F'_1$ bedeutet, so folgt weiter, dass die Puncte $Q\;\varGamma_1\;I$ in gerader Linie liegen, da ihre Polaren sich in einem Puncte schneiden.

13. An die im vorstehenden durchgeführte Construction des darstellenden Punctes F'_1 von D_f knüpfen wir sofort die umgekehrte Aufgabe: Bei willkürlich gegebenem F'_1 dasjenige Quadrupel f aufzusuchen, dessen Doppelverhältniss D_f durch die Zahl F'_1 dergestalt vorgestellt ist, dass man die Gleichung hat

$$D_f = (C', C, F'_1, A).$$

Die Lösung dieser Aufgabe macht sich wesentlich den Umstand dienstbar, dass, wie wir soeben nachwiesen, der Pol Q der Geraden $F'_1\,A$ auf der Verbindungslinie der Puncte $I\,\varGamma_1$ liegt. Wir geben deshalb für diese Thatsache einen zweiten, rein geometrischen, Beweis, der nicht, wie der frühere, die den bisherigen Betrachtungen einigermassen fremdartige Kenntniss der algebraischen Beziehungen zwischen gegebenen Zahlen und ihren Quadratwurzeln voraussetzt.

14. Zum Zweck dieses zweiten Beweises sprechen wir die fraglichen Lagenbeziehungen in der folgenden Form aus:

Schneidet (vgl. Fig. 2) ein beliebiger durch III gelegter Strahl den Kegelschnitt in den Puncten $\varGamma_1\,\varGamma_2$, und trifft die Verbindungslinie von A mit $\varGamma_1$, die Dreiecksseite $III\;II$ in δ, die Verbindungslinie von δ mit $\varGamma_2$ die Curve in F''_1, so geht die gerade Linie, welche durch $\varGamma_1$ und den Pol Q von $F'_1\,A$ bestimmt ist, zugleich auch durch den Eckpunkt I des Polardreiecks $I\;II\;III$.

In der That: Möge die durch Q, Γ_1 gelegte Gerade die Curve noch in dem Puncte Γ_3 treffen, so dass $\Gamma_3 F'_1 \Gamma_1 A$ vier harmonische Puncte bilden. Der Punct δ bildet seinerseits das Centrum einer Involution, welcher unter anderen die Punctepaare Γ_1, A; F'_1, Γ_2; Γ_3, $\varkappa$ angehören, wenn $\varkappa$ der zweite Schnittpunct des Strahls $\delta \Gamma_3$ mit dem Kegelschnitt ist. Es ist daher

$$(\Gamma_3, F'_1, \Gamma_1, A) \overline{\wedge} (\varkappa, \Gamma_2, A, \Gamma_1),$$

d. h. auch $\varkappa \Gamma_2 A \Gamma_1$ stehen in der Beziehung von vier harmonischen Puncten zu einander. Mit anderen Worten, die Gerade $\varkappa A$ geht durch den Pol von $\Gamma_1 \Gamma_2$, und da dieser jedenfalls auf der Dreiecksseite $I\,II$, d. h. auf der Linie $A A'$ liegt, so muss $\varkappa$ mit A' zusammenfallen. Hiernach erzeugen also $A \Gamma_1 \Gamma_3 A'$ ein vollständiges Vierseit, dessen eine Ecke δ auf $III\,II$ liegt; und da demzufolge die dieser Ecke gegenüberliegende Diagonale $\delta' \lambda$ als Polare von δ durch den Punct I geht, d. h. λ in den Punct I hineinfällt, so müssen sich auch die Seiten $A A'$, $\Gamma_1 \Gamma_3$ des Vierseits in I schneiden, muss also insbesondere die Gerade $Q \Gamma_1$ durch I hindurchgehen, *q. e. d.*

15. Hat man sich aber davon überzeugt, dass die Puncte $\Gamma_1 Q I$ thatsächlich in gerader Linie liegen, so lehrt ein Blick auf die betreffende Configuration (vgl. Fig. 2, in Verbindung mit Fig. 1), dass die gestellte Aufgabe durch die folgende Construction erledigt wird:

Mit der Verbindungslinie der Ecke I und des Poles Q von $A F'_1$ schneide man den Kegelschnitt in den Puncten $\Gamma_1 \Gamma_3$; diese Puncte verbinde man mit C und schneide mit den Verbindungslinien die Dreiecksseite $I\,II$ in γ bez. (γ); die Strahlen, welche von III nach γ, (γ) führen, treffen die Curve in dem gesuchten Punctquadrupel $f_1 f_2 f_3 f_4$.

Oder, wie wir diese Construction mit Rücksicht auf den mehrerwähnten Zweck, den wir verfolgen, auch formuliren können:

Ist ein Punct F'_1 des binären Kegelschnitts gegeben, und sucht man das Punctquadrupel $f_1 f_2 f_3 f_4$, welches der Bedingung genügt

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (C', C, F'_1, A),$$

so ziehe man die Verbindungslinie $F'_1 A$ und bestimme die Gerade, welche gleichzeitig zu $F'_1 A$ und $C C'$ polar conjugirt ist. Die Puncte $\Gamma_1 \Gamma_3$, in welchen die genannte

Gerade die Curve trifft, verbinde man mit C und construire darnach die beiden Geraden P_f, P_f', welche beziehlich die gemeinsamen conjugirten Polaren von AA', $C\Gamma_1$ und von AA', $C\Gamma_3$ sind. Die beiden Strahlen, welche sich durch III so legen lassen, dass der eine zu P_f, der andere zu P_f' polar conjugirt wird, treffen die Curve in dem geforderten Punctquadrupel.

16. Es erübrigt uns gegenwärtig, um zu unserem Ziele zu gelangen, nur noch, die Bedeutung der Gleichung (7.) des Art. 6 constructionsmässig zu erfassen. Zu dem Ende setzen wir dieselbe in die folgende Form um:

$$D_H = \frac{2 - D_f}{2 D_f - 1} \cdot D_f.$$

Mögen nun, gleichwie der Punct F'_1 der Darstellung des Zahlwerthes D_f diente, die Werthe $2 - D_f$, $2 D_f - 1$ durch zwei Puncte F''_1, F'''_1, vorgestellt sein. Alsdann bezeichnen, wenn man für den Augenblick das binäre Werthgebiet über die gerade Linie — oder über die complexe Ebene — ausgebreitet denkt,

$$F''_1, 1, F'_1, F'''_1$$

vier aequidistante Puncte. Auf den Kegelschnitt übertragen heisst das also, wenn man sich der Bedeutung von A, C als der Puncte 1, ∞ erinnert, dass F''_1, F'_1, mit Bezug auf A, C, und dass F'''_1, A mit Bezug auf F'_1, C harmonisch liegen. Es sind daher die Puncte F''_1, F'''_1 als bekannt anzusehen, sobald der Punct F'_1 gegeben ist. Hat man aber F''_1, F'''_1, und bezeichnet H'_1 den Punct, der in gleicher Weise das Doppelverhältniss D_H von H versinnlicht wie F'_1 das Doppelverhältniss D_f, so wird H'_1 offenbar vermöge einer Collineation, welche ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung

$$\eta = \frac{F_1''}{F_1'''}\,\xi$$

gewinnt, als projectivisch entsprechender Punct zu F'_1 gefunden. Und da 0, ∞, d. h. die Puncte C', C des Kegelschnitts, die Doppelelemente jener Collineation bedeuten, dieselbe ausserdem aber dem Punct F'''_1 den Punct F''_1 der Curve zuordnet, so wird unter erneuter Anwendung des Steiner'schen Constructionsverfahrens H'_1 dadurch bestimmt, dass man den Schnittpunct der Geraden CC', $F'_1 F''_1$ mit F'''_1 verbindet und mit der Verbindungslinie den Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet.

Wir fassen die hier zu Tage getretenen Verhältnisse folgendermassen zusammen:

Seien F'_1, H'_1 zwei Puncte des Kegelschnitts, von denen jener das Doppelverhältniss D_f der vier Wurzelpuncte der Grundform f, dieser das Doppelverhältniss D_H der zu f gehörigen Hesse'schen Form H repräsentirt, dergestalt, dass die Orte von F'_1, H'_1 durch die beiden Forderungen bedingt erscheinen

$$(C', C, F'_1, A) = D_f, \ (C', C, H'_1, A) = D_H.$$

Alsdann kann man, wenn F'_1 gegeben ist, die Lage von H'_1 (vgl. Fig. 3) durch das nachstehende Verfahren ermitteln.

Durch F'_1 lege man die conjugirte Polare zu CA, welche den Kegelschnitt in F''_1; und durch A die conjugirte Polare zu CF'_1, welche die Curve in F'''_1 schneide. Diejenige Gerade, welche durch F'''_1 geht und zudem conjugirt ist zu der gemeinsamen Polare von CC' und $F'_1 F''_1$, trifft den Kegelschnitt in dem verlangten Punct H'_1.

17. Wir haben nunmehr das vollständige Material vor uns, um aus der biquadratischen Grundform die Lage der Hesse'schen Covariante auf dem Wege geometrischer Construction zu ermitteln. Und zwar haben in dieser Absicht die folgenden Schritte zu geschehen:

Aus f leite man nach Artt. 9, 11 den Ort des Punctes F'_1 ab und bestimme zu diesem nach der in Art. 16 gegebenen Construction den entsprechenden Punct H'_1. Eine Anwendung des in Art. 15 geschilderten Verfahrens auf den Punct H'_1 statt auf F'_1 ergiebt die Lage der vier darstellenden Puncte von H.

Im Verlauf dieser Construction stellt sich heraus, dass sie nicht mehr in allen ihren Theilen reell am Kegelschnitt ausführbar ist.*) In der That überzeugt man sich leicht an Fig. 3, dass die Puncte F'_1, H'_1 jederzeit entweder auf verschiedenen Seiten von CC' liegen — dann sind die aus den Ecken des Coordinatendreiecks gezogenen Strahlen, welche H ausschneiden, imaginär, wenn die Strahlen nach f reell sind — oder dass sie im anderen Falle doch durch die Gerade AA' von einander

*) Es stimmt dies auch damit überein, dass bei der Darstellung auf der Kugel f und H niemals gleichzeitig auf einem gemeinsamen grössten Kreise liegen; vgl. die ausführlichere meiner Eingangs citirten Arbeiten, pag. 53.

getrennt werden, wo dann die nach H führenden Strahlen zwar gleichzeitig mit denen nach f reell sind, der Curve aber in imaginären Puncten begegnen (der eine oder andere dieser Fälle tritt ein, jenachdem F'_1 — vgl. Fig. 3 — auf dem Bogen $\Phi' C'$ oder auf $\Phi' A$ liegt, wo die Grenze Φ' dadurch bestimmt ist, dass $C'A$ und die Tangente in Φ' sich in einem Puncte der Berührungslinie in C treffen müssen).

18. Wir werden daher an dieser Stelle unmittelbar darauf hingewiesen, eine erweiterte Darstellung des Gebietes der binären Veränderlichen anzustreben, innerhalb deren die sämmtlichen Schritte der gewollten Construction ihr wirklich anschauungsmässiges Gegenbild finden. Zu dieser Erweiterung bietet die bereits oben (vgl. die Anmerkung *) auf pag. 4) flüchtig berührte, von Herrn Klein angegebene, Methode die Hand, vermöge deren alle Sätze, die von Punctepaaren einer geraden Linie gelten, auf die $x + iy$-Kugel oder allgemeiner auf den quaternären Raum übertragen werden.

Das Hesse'sche Uebertragungsprincip definirt, wie bekannt, die Geraden der Ebene durch die Punctepaare, in welchen sie von einem festen Kegelschnitt getroffen werden; projicirt sodann den Kegelschnitt aus einem seiner Puncte auf eine beliebige feste Gerade und ersetzt die genannten Punctepaare durch ihre Projectionen auf dieser letzteren. Das neue Uebertragungsprincip dehnt diese Betrachtungsweise weiter aus, indem es unter Zulassung complexer Elemente die Gesammtheit aller auf der festen Geraden überhaupt vorhandenen Punctepaare in der complexen Ebene repraesentirt und diese dann stereographisch in der früher näher präcisirten Weise auf eine reelle, nicht geradlinige Fläche zweiter Ordnung projicirt. So werden beliebige Punctepaare der geraden Linie mit reellen Punctepaaren der Fläche entsprechend gesetzt, und wird schliesslich dadurch, dass man diese letzteren wieder durch ihre räumlichen Verbindungslinien ersetzt, die Gesammtheit der reellen und imaginären Geraden der ternären Ebene eindeutig auf reelle Raumgeraden bezogen, die an die einzige Bedingung geknüpft erscheinen, die mehrerwähnte Fläche zweiter Ordnung in reellen Punctepaaren zu schneiden. — Als die specifische Eigenthümlichkeit des neuen Princips ist es zu bezeichnen, dass durch dasselbe je zwei gerade Linien der Ebene, die mit Bezug auf den Kegelschnitt polar conjugirt sind, durch Vermittelung der vier harmonischen Puncte, in welchen sie die Curve

treffen, in Raumgeraden übergeführt werden, die sich erstens schneiden, und die ausserdem selbst wieder mit Bezug auf die angenommene Fläche zweiter Ordnung in der Beziehung conjugirter Polaren zu einander stehen. Oder wenn man, wie weiterhin am genannten Ort geschieht, den Kegelschnitt in der Ebene und die Fläche im Raume einer projectivischen Massbestimmung zu Grunde legt: Senkrechten Linien der Ebene entsprechen senkrechte, sich schneidende Gerade des Raumes.

19. Die soeben entwickelten Beziehungen sind es nun gerade, welche uns nach der ganzen Anlage unserer Untersuchung befähigen, die erweiterte Uebertragungsmethode für unsere Zwecke in Anwendung zu bringen. In der Ebene schien es ausreichend, lediglich die massgebenden Anschauungen der Polarentheorie vorwalten zu lassen; und der Apparat, dessen wir bedurften, beschränkte sich thatsächlich darauf, dass wir ausser Verbindungslinien von Punctepaaren der Curve nur solche gerade Linien zu benutzen hatten, die entweder durch gegebene Puncte gingen und zu gegebenen Geraden conjugirt waren, oder die gleichzeitig conjugirt waren zu bekannten Geradenpaaren.

Steigen wir in den Raum auf, so treten natürlich an Stelle der erstgenannten Verbindungslinien die Verbindungslinien der entsprechenden Punctepaare der Fläche; dagegen sind die anderweitigen Schritte, wenn wir uns in dem erweiterten Anschauungsgebiete der concinneren Ausdrucksweise der projectivischen Auffassung bedienen, durch diejenigen Operationen zu ersetzen, welche einmal aus einem gegebenen Punct der Fläche auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte fällen, und welche sodann (vgl. „Beiträge etc.“ pag. 213) das gemeinsame Perpendikel von zwei gegebenen Raumgeraden bestimmen lehren. Zu beachten ist dabei, dass auch die letztere dieser Operationen hier zu einer eindeutigen wird, insofern immer nur dasjenige Perpendikel zu berücksichtigen ist, welches die Fläche in reellen Puncten trifft.

20. So weit es uns speciell um die Construction von H aus f zu thun ist, wählen wir wieder, um an die in Art. 3 gegebene Darstellung von f anknüpfen zu können, die K u g e l als Fundamentalfläche; die Puncte $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, in welchen die Coordinatenaxen die Fläche treffen, behalten, wie gleichfalls schon erwähnt wurde, ebenso wie die gleichbezeichneten Puncte des Kegelschnitts in der Ebene, die Bedeutung bei, die Wurzelpuncte

der Covariante T zu repraesentiren. Die Uebertragung unserer Construction liefert hiernach unmittelbar folgendes:

Sei auf der Kugel eine biquadratische Form f gegeben. Um alsdann den Punct F'_1 der Fläche zu finden, welcher in einer Coordinatenbestimmung, die die Puncte $C' C A$ als Grundpuncte $0\ \infty\ 1$ benutzt, das zu f gehörige Doppelverhältniss darstellt, so dass die Relation statthat:

$$(C', C, F'_1, A) = (f_1, f_2, f_3, f_4) = D_f,$$

suche man zunächst das gemeinsame Perpendikel der Axe AA' und der Gerade $f_1 f_2$ auf und fälle gegen dieses aus den Puncten $C C'$ zwei Senkrechte, welche der Fläche beziehlich noch in den Puncten $\Gamma_1^{(f)}$, $\Gamma_2^{(f)}$ begegnen. Die Gerade $\Gamma_1^{(f)} \Gamma_2^{(f)}$ trifft die Axe AA' unter rechtem Winkel, und es ist

$$(C', C, \Gamma_1^{(f)}, \Gamma_2^{(f)}) = D_f.$$

Eine Senkrechte, die man aus $\Gamma_2^{(f)}$ gegen das gemeinsame Perpendikel der Geraden $C' C$, $A\Gamma_1^{(f)}$ fällt, schneidet die Kugel in dem gesuchten Punct F'_1 (nach Artt. 9, 11).

Bedeute H'_1 einen Punct, der ähnlich wie F'_1 durch die Gleichung definirt ist

$$(C', C, H'_1, A) = D_H.$$

Ein Perpendikel, das man aus F'_1 gegen CA zieht, legt den Punct $2 - F'_1 = F''_1$, und ein solches, das man aus A gegen CF'_1 zieht, den Punct $2F'_1 - 1 = F'''_1$ der Kugel fest. Man erhält den Punct H'_1, wenn man mit der Senkrechten, die man von F'''_1 aus gegen das gemeinsame Perpendikel von CC', $F'_1 F''_1$ fällen kann, die Kugel zum zweiten Male schneidet (nach Art. 16).

Hat man H'_1, so findet man endlich die zu f gehörige Form H durch das folgende Verfahren: Man ziehe $H'_1 A$ und fälle gegen diese Gerade und CC' die gemeinsame Senkrechte, welche die Kugel in den Puncten $\Gamma_1^{(H)}\ \Gamma_3^{(H)}$ treffe. Diese letzteren verbinde man mit C und suche darnach die gemeinsamen Perpendikel P_H, P_H' des Geradenpaares AA', $C\Gamma_1^{(H)}$ einerseits und des Paares AA', $C\Gamma_3^{(H)}$ andererseits auf. Die beiden Geraden, von wel-

chen die eine gleichzeitig auf P_H und AA', die andere gleichzeitig auf P_H' und AA' senkrecht steht, treffen die Kugel in den darstellenden Puncten der Form H.

21. Hat hiermit die Frage nach der Construction der Hesse'schen Covariante einer biquadratischen Grundform eine definitive Beantwortung gefunden, so mag es zugleich als ein Vorzug der entwickelten Behandlungsweise*) hervorgehoben werden, dass sie zur Erledigung des Problems nur solche Mittel herbeizog, die ganz direct gestatteten, die einzelnen Schritte mit streng geometrischer Interpretation zu begleiten. Will man diese letzte Forderung fallen lassen, und will man ausserdem darauf verzichten, nur die unbedingt nothwendigen Constructionen zu vollziehen, so kann man, nachdem das Resultat einmal gewonnen ist, rein mechanisch das ganze Verfahren symmetrischer gestalten. Man wird zu dem Ende ausser den Puncten $C'\,C\,A$ auch noch den Punct A' in die Betrachtung hineinziehen und jeder Construction, die man wesentlich auf einer Seite der Ebene $C\,B\,C'\,B'$ und eventuell auf einer bestimmten Seite der Ebenen $C\,A\,C'\,A'$ oder $A\,B\,A'\,B'$ durchführte, eine ganz ähnliche Construction an die Seite stellen, die nur auf der entgegengesetzten Seite der betreffenden Ebene operirt. Dadurch ergeben sich zu einem Punctepaar zwei (wie z. B. zu $\Gamma_1^{(f)}\,\Gamma_2^{(f)}$ die Puncte $\Gamma_3^{(f)}\,\Gamma_4^{(f)}$), zu einem einzelnen Punct drei neue Puncte ($F'_2\,F'_3\,F'_4$ zu F'_1, u. s. f.), die jedesmal das fragliche System oder den einzelnen Punct zu einem Quadrupel der Schaar $\varkappa f + \lambda H$ ergänzen. Und es erscheint darnach also die Aufsuchung von H auf die successive Bestimmung einer Anzahl von Quadrupeln dieser Schaar basirt, insofern aus f eine Form F', aus dieser ein Quadrupel H' und aus dem letzteren wiederum das gesuchte H selber abgeleitet wird. Der Uebergang von f zu F' und ebenso der umgekehrte Process, der H aus H' ermittelt, bedürfen je einer intermediären Form $\Gamma^{(f)}$ bez. $\Gamma^{(H)}$; die Construction von H' aus F' wird durch zwei zwischenliegende Quadrupel F'', F''' geleistet.

22. Unsere seitherigen Ueberlegungen geben indessen noch zu einer weiteren Gedankenreihe Veranlassung, und es scheint hier der Ort, auch deren ausdrückliche Erwähnung zu thun.

---

*) Sie ist wesentlich dieselbe, wie die, welche ich im Resultat in den Sitzungsberichten der phys.-med. Societät zu Erlangen — Sitzung vom 12. Juli 1875 — bekannt gegeben habe.

Wir haben gesehen, wie die Durchführbarkeit unseres Problems wesentlich auf dem Umstande beruhte, dass das Doppelverhältniss aus den vier Wurzelpuncten von H sich rational durch das analoge Doppelverhältniss von f ausdrückt, und wie sich für den Inhalt der betreffenden algebraischen Relation in einfachster Weise eine geometrische Form ergab. Diese rationale Abhängigkeit nun des Doppelverhältnisses D_H von D_f, von deren Nothwendigkeit man sich übrigens aus bekannten Sätzen der Gleichungstheorie a priori überzeugen kann*), gestattet es, die ganze Fragestellung aus einem allgemeineren Gesichtspunct in Angriff zu nehmen. Gelingt es überhaupt, auf der Kugel den einen oder anderen Punct anzugeben, der zu einer biquadratischen Ausgangsform in eindeutig umkehrbarer Beziehung steht, dergestalt, dass mit unseren geometrischen Hülfsmitteln der Punct gefunden werden kann, wenn die

*) Die Erwägungen, die zu diesem Ziele führen, können beispielsweise angestellt werden, wie folgt:

Man adjungire — unter der Voraussetzung nicht homogener Darstellungsweise, die hier angemessen erscheint — die Wurzeln $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$ der Gleichung

$$f = 0 = z^4 + 4az^3 + 6bz^2 + 4cz + d\,;$$

alsdann sind die quadratischen Formen $\varphi\ \psi\ \chi$, deren Product die Covariante T von f bildet, und deren Quadrate die Wurzeln der cubischen Resolvente von f sind, rational bekannt, da ja sie ausschliesslich die drei Zerfällungen von f in zwei Punctepaare beherrschen, und da diese Zerfällungen nach Voraussetzung rational gegeben sind. Jeder Process, welcher die Formen $\varphi\ \psi\ \chi$ als solche in rationaler Weise verwendet, wird daher gleichfalls nur zu rational bekannten Resultaten führen können. In diesem Falle befindet sich insbesondere die Herstellung der kanonischen Gleichungsform

$$f = z^4 + 6kz^2 + 1\,,$$

welche die Puncte $z = 0$, $z = \infty$ — gleichviel in welcher Anordnung — in die Wurzelpuncte irgend einer der Formen $\varphi\ \psi\ \chi$ und gleichzeitig die Puncte $z = \pm 1$ in eine der beiden übrigen Formen verlegt. D. h. auch der Coëfficient k ist rational bekannt; und er ist eine sechswerthige Function der Wurzeln $y_1\, y_2\, y_3\, y_4$, da die kanonische Darstellung von f auf sechs verschiedene Arten geleistet werden kann. Das — freilich etwas mühsame — Geschäft der wirklichen Transformation von f in die Gestalt $z^4 + 6kz^2 + 1$ zeigt dann weiter, dass k eine im Sinne der Substitutionstheorie mit dem Doppelverhältniss der Wurzeln ähnliche Function ist; und es muss daher nach dem fundamentalen Lagrange'schen Satze der Gleichungstheorie jede der Functionen k sich vermöge eines gemeinsamen Abhängigkeitsgesetzes rational durch eine correspondirende Function D_f, umgekehrt jedes D_f rational durch ein correspondirendes k sich ausdrücken lassen. — Dieselben Schlüsse gelten selbstverständlich für das Doppelverhältniss D_H und den Coëfficienten k' der kanonischen Gestalt von H; und da diese letztere durch die nämliche Trans-

Grundform gegeben ist, und umgekehrt diese letztere sich unzweideutig bestimmen lässt, wenn der zugehörige Punct willkürlich angenommen wird, so kann man nach einem und demselben Verfahren einen derartigen Punct $\varDelta_f$ sowohl zu f, als einen analogen Punct $\varDelta_H$ zu H construirt denken; der letztere wird durch den ersteren rational bedingt sein, gleichwie H von f rational abhängt, und die Aufgabe, die Lage der Form H anzugeben, wenn f bekannt ist, muss daher in allen solchen Fällen eine geometrisch vollkommen durchführbare Lösung zulassen.

23. Hierbei gewinnt es für den Augenblick freilich den Anschein, als könne man die Forderung, die in der unmittelbaren, geometrischen Verwerthung der Relation $D_H = -\frac{D_f - 2}{2D_f - 1} D_f$ unseren bisherigen Betrachtungen zu Grunde lag, einfach fallen lassen. Allein in Wahrheit müssen alle Methoden von dem angedeuteten Charakter in letzter Linie auf diese fundamentale Doppelverhältnissbeziehung zurückführen. Denn die Coëfficienten der Puncte $\varDelta_f$, $\varDelta_H$ werden sich zufolge der Bedingungen, denen wir die Puncte selbst unterwarfen, durch eine gemeinsame, lineare Function der Coëfficienten k, beziehlich k' der kanonischen Gestalten von f und H ausdrücken; sie werden daher in einer ähnlichen wechselseitigen Abhängigkeit stehen, wie k, k' und weiterhin wie die Doppelverhältnisse D_f, D_H, die sich ja ihrerseits gleichfalls als lineare Functionen jener kanonischen Coëfficienten darstellen. — Es erschien deshalb angezeigt, die bisherige Behandlung der Aufgabe nicht zu unterdrücken; um so mehr, als auch sie unmittelbar aus dem Wesen der Sache geschöpft war, und als sie jeden weiteren analytischen Apparat entbehrlich machte.

---

formation erhalten wird, die bei f anzuwenden war, so ist auch seinerseits k' rational von k abhängig. Aus den Relationen

$$k = R_1(D_f),\ k' = R_2(k),\ D_H = R_3(k'),$$

wo R_1, R_2, R_3 als Zeichen rationaler Functionen stehen, folgt aber ohne weiteres auch

$$D_H = R(D_f),\ \text{q. e. d.}$$

Die Covariante H lässt sich ersichtlichermassen in dieser Betrachtung durch jede beliebige Form der linearen Schaar $\varkappa f + \lambda H$ ersetzen; und in der That findet man, wenn man unter $D_{\varkappa f + \lambda H}$ das Doppelverhältniss der Verschwindungspuncte einer derartigen Form versteht, die Gleichung

$$D_{\varkappa f + \lambda H} = \frac{3\varkappa(D_f - 1) - 2\lambda(D_f - 2)}{3\varkappa(D_f - 1) + 2\lambda(2D_f - 1)} \cdot D_f.$$

24. Es mag aber zweckdienlich sein, uns auch für die verallgemeinerte Auffassung der ganzen Problemstellung ein Beispiel vor Augen zu führen; und wir verfahren dazu etwa folgendermassen: Unsere geometrischen Methoden setzen uns in den Stand, die darstellenden Puncte $a\,a'$ der Wurzeln einer quadratischen Gleichung auf der Kugel anzugeben, sobald wir zwei andere Punctepaare $b\,b'$, $c\,c'$ der Fläche kennen, zu denen $a\,a'$ gleichzeitig harmonisch liegen; denn zufolge der früheren Erörterungen stellen sich dann $a\,a'$ als die Durchstossungspuncte des gemeinsamen Perpendikels der Geraden $b\,b'$, $c\,c'$ mit der Fläche dar. Wir werden daher den Punct $\varDelta_f$ mit solchen Mitteln aus f abzuleiten suchen, dass wir von ihm rückwärts wieder durch zwei Stufen quadratischer Schritte zur Form f aufsteigen können. Zu dem Ende zerfällen wir f, das wir als gegeben voraussetzen, auf eine beliebige Art in zwei Punctepaare; und wir entscheiden uns etwa für die Zerlegung $f_1 f_2$, $f_3 f_4$, deren Paare beziehlich durch die beiden Puncte $A\,A'$ der Kugel harmonisch getrennt werden. Mit Bezug auf jedes dieser Paare bestimmen wir zu einem willkürlich angenommenen Punct K der Fläche die vierten harmonischen Puncte, für welche die Orte G_1, G_3 resultiren mögen. Ist man über die Lage der letzteren orientirt, so hat umgekehrt auch die Form f als bekannt zu gelten, insofern dann ja $f_1 f_2$ gleichzeitig harmonisch gegen $A\,A'$ und $K\,G_1$, $f_3\,f_4$ gleichzeitig harmonisch gegen $A\,A'$ und $K\,G_3$ liegen. Als den Punct K empfiehlt es sich, einen der von vornherein bekannten Wurzelpuncte der Covariante T, etwa den Punct C', zu wählen; aus der vollen Congruenz der zu leistenden Schritte geht alsdann hervor, dass die Puncte $G_1\,G_3$ in Gemeinschaft mit C' und dessen Diametralpunct C wieder ein harmonisches Quadrupel bilden, und durch die genannte Specialisirung wird somit auch für die geometrische Auflösung des Paares $G_1\,G_3$ in seine einzelnen Bestandtheile ein weiterer Anhalt geboten. Den Punct $\varDelta_f$ bestimmen wir schliesslich, um ein bestimmtes Bild vor uns zu haben, als vierten harmonischen Punct zu A mit Bezug auf die Elemente $G_1\,G_3$; so sind die letzteren nunmehr als das Punctepaar definirt, welches gleichzeitig zu $C\,C'$ und $A\,\varDelta_f$ harmonisch liegt, und die Entwickelung der Form f aus der Lage des Punctes $\varDelta_f$ kann jetzt thatsächlich in eindeutig bestimmter Weise bewerkstelligt werden.

25. Ist hiernach $\varDelta_H$ der Punct, der von H genau in der gleichen Weise abhängt, wie $\varDelta_f$ von f, so erübrigt uns nur noch

die Aufdeckung der Beziehung, welche zwischen Δ_H und Δ_f statthat, um den Schlussstein für die Construction von H aus f zu gewinnen. Diese Beziehung wird zufolge der besonderen Annahmen, die wir gemacht haben, unmittelbar mit der Relation zwischen D_f und D_H identisch, da sich nachweisen lässt, dass der Punct Δ_f geradezu in den repräsentirenden Punct F'_1 des Doppelverhältnisses D_f der früheren Construction, und demzufolge Δ_H in den früheren Punct H'_1 hineinfällt. Wir übergehen den einschlägigen Beweis, der geometrisch etwas umständlich zu führen sein würde, sich analytisch indessen mit leichter Mühe erbringen lässt; und heben nur hervor, dass — wie man sich am Kegelschnitt überzeugen kann — es eine fernere Folge dieser Verhältnisse ist, dass $G_1\, G_3$ mit denjenigen Puncten coincidiren, die wir früher als $\Gamma_1\, \Gamma_3$ bezeichneten. Es ist mithin zur Ermittelung von H nach den hier massgebenden Gesichtspuncten aus der seitherigen Construction das Verfahren zur Bestimmung von H'_1 aus F'_1 unverändert herüberzunehmen; und indem wir die verschiedenen, soeben erläuterten, Operationen zusammenfassen und zugleich wieder auf die Ausdrucksweise der projectivischen Anschauungen zurückgehen, können wir daher (vgl. Math. Annalen, Bd. IX, pag. 217) die folgende neue Regel für die constructive Bestimmung von H aufstellen:

26. Ist, wie in allen bisherigen Untersuchungen, auf der Kugel eine biquadratische Form f in ihrer kanonischen Lage gegeben, und soll der Ort der zugehörigen Hesse'schen Form bestimmt werden, so ziehe man die Geraden $f_1 f_2$, $f_3 f_4$ und fälle gegen jede derselben aus C' ein Perpendikel, wodurch die Puncte $\Gamma_1^{(f)}$, $\Gamma_3^{(f)}$ der Fläche festgelegt werden mögen. Die Gerade $\Gamma_1^{(f)}\, \Gamma_3^{(f)}$ begegnet der Axe $C\,C'$ unter einem Winkel von 0°; eine Senkrechte, die man aus A gegen sie zieht, treffe die Kugel im Puncte F'_1. — Aus F'_1 entwickele man wie früher (Artt. 16, 20) die Lage eines Punctes H'_1. — H'_1 verbinde man mit A und bestimme das gemeinsame Perpendikel $\Gamma_1^{(H)}\, \Gamma_3^{(H)}$ von $H'_1\, A$ und $C\, C'$; die beiden Punctepaare, in welchen die gemeinsamen Perpendikel der Geradenpaare $A\,A'$, $C'\, \Gamma_1^{(H)}$ und $A\,A'$, $C'\, \Gamma_3^{(H)}$ die Kugel schneiden, constituiren die Form H.

Die Willkürlichkeit, mit der wir in der Auszeichnung der Puncte $C'\, C\, A$ vorgegangen sind, gestattet es, die Construction in

mannichfacher Weise abzuändern, selbst wenn wir uns an die Einschränkung binden, überhaupt keine anderen als die darstellenden Puncte von T in den Kreis der verschiedenen Operationen hineinzuziehen. Der ganze Charakter der Constructionen kann dadurch nach den voraufgeschickten allgemeinen Bemerkungen nicht wesentlich alterirt werden, und wirklich lässt ein näheres Eingehen auf diese Frage Verhältnisse zu Tage treten, wie dieselben bereits an anderen Orten (Annalen, l. c.) skizzirt wurden.

27. Will man, statt das einzelne H aus einer gegebenen Grundform abzuleiten, sich im allgemeinen Aufschluss über den Verlauf der biquadratischen Covariante bei variirendem f verschaffen, so erscheint es bequemer, an Stelle der geometrischen Deductionen von functionentheoretischen Ueberlegungen auszugehen. Man wird durch dieselben (Annalen Bd. IX, pag. 216) zu dem Satz hingeleitet, dass durch die Abhängigkeit der Form H von f die geeignet zu wählenden Hälften von vier lediglich in ihren Ecken zusammenstossenden Octanten der Kugel auf die Gesammtfläche der vier übrigen Octanten abgebildet werden. — Der Vollständigkeit halber mag zum Schluss dieser Betrachtungen noch eine Herleitung des analytischen Ausdrucks für das erwähnte Abbildungsgesetz einen Platz finden.

Sei x ein beliebiger Punct der Form $\varkappa j f + \lambda i H$, y irgend ein Punct der zugehörigen Hesse'schen Form

$$H(\varkappa j f + \lambda i H) = \varkappa' j f + \lambda' i H .$$

Die beiden Gleichungen, die demzufolge bestehen, seien bezeichnet durch

$$\varkappa j f_x + \lambda i H_x = 0\,,\ \varkappa' j f_y + \lambda' i H_y = 0\,,$$

so dass sich $\varkappa$, λ beziehlich als mit iH_x, $-jf_x$ und $\varkappa'$, λ' mit iH_y, $-jf_y$ proportional erweisen. Es ist aber*)

$$\varkappa' j f + \lambda' i H \equiv \frac{i^2 j}{3} (\varkappa + \lambda)\, \lambda f + \left(j^2 \varkappa^2 - \frac{i^3 \lambda^2}{6}\right) H\,,$$

und es besteht demnach zwischen $\varkappa' : \lambda'$ und $\varkappa : \lambda$ die Relation:

$$\frac{\varkappa'}{\lambda'} = \frac{2 i^3 (\varkappa + \lambda)\, \lambda}{6 j^2 \varkappa^2 - i^3 \lambda^2}\,.$$

---

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, pag. 139.

Substituirt man für $\varkappa$, λ, $\varkappa'$, λ' die ihnen proportionalen Werthe, so gewinnt man für das gemeinte Gesetz den Ausdruck:

$$\frac{H_y}{f_y} = \frac{2\,(iH_x - jf_x)\,f_x}{6H_x^2 - if_x^2},$$

dem man noch beiderseits im Zähler und im Nenner beziehlich die Factoren i, j hinzufügen kann, um ihn homogen von der nullten Ordnung in den Coëfficienten von f darzustellen.

III.

1. Hat man eine binäre Form beliebiger Ordnung, so ist bekannt, dass durch das identische Verschwinden ihrer Hesse'schen Covariante angezeigt wird, dass die Grundform die n^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks ist. Man kann sich von dieser Thatsache, wie wir des folgenden wegen erwähnen, unter anderem Rechenschaft geben, indem man die Hesse'sche Form wirklich entwickelt und aus den Bedingungsgleichungen, die ihr Verschwinden implicirt, das betreffende Gesetz für die Coëfficienten der Grundform ableitet. — Sei

$$f = a_x^n = b_x^n = a_0\, x_1^n + \binom{n}{1} a_1\, x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2\, x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n\, x_2^n,$$

und werde die Hesse'sche Form H durch die ihr proportionale zweite Ueberschiebung von f über sich selbst, d. h. durch

$$(f,f)^2 = (ab)^2\, a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}$$

definirt, wie denn in Wahrheit*)

$$(1.)\qquad H = \frac{n^2\,(n-1)^2}{2}\,(f,f)^2$$

ist. Die letztgenannte Covariante, die als Form gerader Ordnung ein mittleres Glied besitzt, können wir in der Gestalt auffassen

$$(2.)\qquad \tfrac{1}{2}\,(f,f)^2 = A + B + C,$$

wo A, C Polynome von je $n - 2$ Gliedern bedeuten, unter B eben jenes mittlere Glied verstanden ist. Die Auswerthung des Symbols $(f,f)^2$ ergiebt, wenn wir, um das Bildungsgesetz deutlich hervor-

*) Clebsch, a. a. O. pag. 101.

treten zu lassen, auch den formalen Coëfficienten $\binom{n-2}{0}$ mit aufnehmen,

$$(f,f)^2 = \binom{n-2}{0}\binom{n-2}{0}(a_0 a_2 - 2 a_1 a_1 + a_2 a_0)\, x_1^{2n-4} +$$

$$+\left\{\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{1}(a_0 a_3 - 2 a_1 a_2 + a_2 a_1)\right.$$

$$\left. + \binom{n-2}{1}\binom{n-2}{0}(a_1 a_2 - 2 a_2 a_1 + a_3 a_0)\right\} x_1^{2n-5} x_2$$

$$+\left\{\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{2}(a_0 a_4 - 2 a_1 a_3 + a_2 a_2)\right.$$

$$+\binom{n-2}{1}\binom{n-2}{1}(a_1 a_3 - 2a_2 a_2 + a_3 a_1)$$

$$\left.+\binom{n-2}{2}\binom{n-2}{0}(a_2 a_2 - 2a_3 a_1 + a_4 a_0)\right\} x_1^{2n-6} x_2^2$$

$$+\cdots\cdots\cdot$$

d. h. es ist:

$$A = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x_1^{2n-4} + \binom{n-2}{1}(a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_1^{2n-5} x_2$$

$$+\left\{\binom{n-2}{2}(a_0 a_4 - 2a_1 a_3 + a_2^2) + \binom{n-2}{1}^2 (a_1 a_3 - a_2^2)\right\} x_1^{2n-6} x_2^2$$

$$+\cdots\cdots\cdot$$

$$C = (a_{n-2} a_n - a^2_{n-1})\, x_2^{2n-4} + \binom{n-2}{1}(a_{n-3} a_n$$

$$- a_{n-2} a_{n-1})\, x_1 x_2^{2n-5} + \left\{\binom{n-2}{2}(a_{n-4} a_n - 2a_{n-3} a_{n-1}\right.$$

$$\left.+ a^2_{n-2}) + \binom{n-2}{1}^2 (a_{n-3} a_{n-1} - a^2_{n-2})\right\} x_1^2 x_2^{2n-6} + \cdots\cdots,$$

während für B der Werth resultirt:

$$B = \left\{(a_0 a_n - 2a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2}) + \binom{n-2}{1}^2 (a_1 a_{n-1}\right.$$

$$- 2a_2 a_{n-2} + a_3 a_{n-3}) + \binom{n-2}{2}^2 (a_2 a_{n-2} - 2a_3 a_{n-3}$$

$$\left. + a_4 a_{n-4}) + \cdots\cdot\right\} x_1^{n-2} x_2^{n-2}.$$

Dies mittlere Glied ist so aufgebaut, dass es sich gesetzmässig ebensowohl der Reihe A wie der Reihe C als Schlussglied einfügen lässt; sein Coëfficient bricht

mit $\binom{n-2}{\frac{n-2}{2}}^2 \left(a_{\frac{n-2}{2}} a_{\frac{n+2}{2}} - a_{\frac{n}{2}}^2\right)$ bei geradem n ab,

mit $\binom{n-2}{\frac{n-3}{2}}^2 \left(a_{\frac{n-3}{2}} a_{\frac{n+3}{2}} - a_{\frac{n-1}{2}} a_{\frac{n+1}{2}}\right)$ bei ungeradem n.

Setzt man, um die Bedeutung der Forderung $(f,f)^2 = 0$ zu erfahren, zunächst die Coëfficienten in C und B, mit $a_{n-2}\,a_n - a_{n-1}^2$ anfangend, einzeln gleich Null, so ergiebt sich durch ein recurrentes Verfahren, dass die Coëfficienten der Grundform, um den entstehenden Gleichungen zu genügen, dem gemeinsamen Gesetz

$$a_{n-k} = \frac{a_{n-1}^k}{a_n^{k-1}} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n)$$

unterworfen werden müssen. Man begründet dies Gesetz allgemein durch den Schluss von k auf $k+1$, und dabei leistet die Relation

$$(3.)\qquad a_{\mu-1}\,a_{\nu+1} - 2a_\mu\,a_\nu + a_{\mu+1}\,a_{\nu-1} = 0\ ,$$

die unter Annahme jenes Gesetzes für beliebige Werthe von μ, ν identisch erfüllt ist, den doppelten Dienst, einmal die successive Berechnung der a_{n-k} wesentlich zu vereinfachen, indem sie die Coëfficienten der Ueberschiebung jedesmal auf ihr erstes Glied reducirt; und sodann den Nachweis zu liefern, dass die Zugrundelegung jenes Gesetzes nicht nur die erforderliche, sondern auch die hinreichende Bedingung für das Verschwinden von $(f,f)^2$ ist, insofern auch die Coëfficienten in dem Polynom A aus Termen vom Typus (3.) zusammengesetzt sind und daher immer zugleich mit diesen gleich Null werden. Die Substitution der genannten Werthe von a_{n-k} führt aber f in die Gestalt

$$f = \frac{1}{a_n^{n-1}}\,(a_{n-1}\,x_1 + a_n\,x_2)^n\,,$$

d. h. wesentlich in die Form

$$f = a_0\,x_1{}^n$$

über. —

2. Besteht f, statt lediglich aus seinem Anfangsgliede, aus irgend einem anderen einzelnen Gliede der vollständigen Form, ist also beispielsweise

$$f = \binom{n}{k+1}\,a_{k+1}\,x_1{}^{n-k-1}\,x_2{}^{k+1}\ ,$$

so resultiren — am einfachsten nach der Formel

$$(f,f)^2 = \frac{2}{n^2\,(n-1)^2}\left\{\frac{d^2 f}{dx_1{}^2}\,\frac{d^2 f}{dx_2{}^2} - \left(\frac{d^2 f}{dx_1\,dx_2}\right)^2\right\} —$$

für $(f,f)^2$ oder H die Werthe

$$(f,f)^2 = -2\binom{n-1}{k}\binom{n-2}{k}\frac{a^2_{k+1}}{k+1}x_1^{2n-2k-4}x_2^{2k},$$

$$H = -\binom{n-1}{k+1}\binom{n-1}{k}n^2(n-1)\,a^2_{k+1}x_1^{2n-2k-4}x_2^{2k}.$$

Man mag die Frage aufwerfen, ob auch die Umkehrung dieser Beziehung Geltung habe, d. h. ob auch, wenn H aus dem Product einer μ^{ten} und einer ν^{ten} Potenz von linearen Ausdrücken besteht, etwas ähnliches für die zugehörige Grundform statthaben muss, beziehlich welche Verhältnisse auftreten, wenn das nicht der Fall ist.

Um diese Frage zu entscheiden, beachten wir zunächst, dass wir das einzige nicht verschwindende Glied von H von vornherein als dem Polynom A, eventuell mit Einschluss des mittleren Gliedes B, angehörig betrachten dürfen, da jeder andere Fall durch die lineare Transformation $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$ sofort auf diese besondere Annahme zurückgeführt wird. Wir können daher unsere Forderung jedenfalls mit der Bedingung identificiren, dass das Polynom C lauter identisch verschwindende Coëfficienten besitze. Diese Bedingung lässt sich aber auf zwei verschiedene Weisen befriedigen: sie zwingt uns, entweder gleichzeitig $a_n = 0$ und $a_{n-1} = 0$ anzunehmen — dann zeigt sich, dass wir bei geradem n allen Coëfficienten a_{n-k} rückwärts bis einschliesslich $a_{\frac{n+2}{2}}$, bei ungeradem n allen bis einschliesslich $a_{\frac{n+1}{2}}$ verschwindende Werthe beilegen müssen — oder sie nöthigt uns, genau wie vorhin (Art. 1) die Coëfficienten als der gemeinsamen Darstellung

$$(4.)\qquad a_{n-k} = \frac{a_{n-1}^k}{a_n^{k-1}}\qquad (k = 0,\,1,\,\ldots\,n-1)$$

unterworfen vorauszusetzen, mit dem einzigen Unterschiede, dass sich jetzt über a_0 noch keine Bestimmung treffen lässt, da dieser Coëfficient in C überhaupt nicht eingeht. Um die verschiedenen Möglichkeiten, die sich hiernach darbieten, streng aus einander zu halten, unterscheiden wir die beiden Fälle, in denen B von Null verschieden ist oder selbst auch noch verschwindet.

3. Sei also erstens B nicht gleich Null. Durch diese Annahme wird der Fall $a_n = 0$, $a_{n-1} = 0$, wo ausserdem zugleich

n ungerade wäre, an sich ausgeschlossen, da die Reihe von Relationen $a_{\frac{n+1}{2}}=0$, $a_{\frac{n+3}{2}}=0$, ... $a_{n-1}=0$, $a_n=0$ unbedingt auch die Gleichung $B=0$ zur Folge hat. Ist dagegen n gerade, so führt die Voraussetzung $a_n=0$, $a_{n-1}=0$ dazu, allein den Coëfficienten $a_{\frac{n}{2}}$ von Null verschieden anzusetzen, und es gehört dann also der zweiten Ueberschiebung

$$(f,f)^2 = 2\left\{\binom{n-2}{\frac{n}{2}-2}\binom{n-2}{\frac{n}{2}} - \binom{n-2}{\frac{n}{2}-1}^2\right\} a_{\frac{n}{2}}^{\ 2}\, x_1^{\,n-2}\, x_2^{\,n-2}$$

oder der Hesse'schen Form

$$H = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 (n-1)\binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^{\ 2}\, x_1^{\,n-2}\, x_2^{\,n-2}$$

die Grundform

$$f = \binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}\, x_1^{\frac{n}{2}}\, x_2^{\frac{n}{2}}$$

zu. — Untersuchen wir die Wirkung des Gesetzes (4.), so dürfen wir zufolge einer früheren Bemerkung das mittlere Glied — und nunmehr unabhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist — in der vereinfachten Gestalt

$$B = (a_0\, a_n - 2a_1\, a_{n-1} + a_2\, a_{n-2})\, x_1^{\,n-2}\, x_2^{\,n-2}$$

$$= \left(a_0\, a_n - \frac{a_{n-1}^n}{a_n^{n-2}}\right) x_1^{\,n-2}\, x_2^{\,n-2}$$

zu Grunde legen; und wir haben dann eine Gleichung anzunehmen:

$$(5.)\qquad a_0\, a_n - \frac{a_{n-1}^n}{a_n^{n-2}} = p \quad \text{oder} \quad a_0 = \frac{p\, a_n^{n-2} + a_{n-1}^n}{a_n^{n-1}},$$

in der p eine beliebige Constante bedeutet, die nur nicht $=0$ ist. Nach der Natur unserer Aufgabe haben aber, wenn $B \gtrless 0$, in A die sämmtlichen Coëfficienten einzeln zu verschwinden, d. h. es hat, da auch diese sich vermöge der Relationen (4.) und (3.) je auf ihr erstes Glied reduciren, das System von Gleichungen zu bestehen

$$a_0\, a_k - 2a_1\, a_{k-1} + a_2\, a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots n-1);$$

dies giebt durch Substitution der gefundenen Werthe von a_0 etc. die Bedingung

$$\frac{p \cdot a_n^{n-2} \, a_{n-1}^{n-2}}{a_n^{2n-k-2}} = 0 ,$$

die, da $p \gtrless 0$ ist, wesentlich nur dadurch befriedigt werden kann, dass man $a_{n-1} = 0$ setzt und a_n einen endlichen, von Null verschiedenen Werth ertheilt. Dann aber ist zufolge der Gleichung (5.)

$$a_0 = \frac{p}{a_n} ,$$

während wegen (4.) alle übrigen Coëfficienten von f gleichzeitig mit a_{n-1} zu Null werden. Wir haben also in diesem Falle

$$f = \frac{p}{a_n} x_1{}^n + a_n x_2{}^n$$

und können folglich, wenn wir die verschiedenen Ergebnisse zusammenfassen, den Satz aussprechen:

Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass, abgesehen von dem Factor $n^2(n-1)^2$, die Hesse'sche Form sich auf

$$H = p x_1{}^{n-2} x_2{}^{n-2}$$

reducire, ist bei ungeradem n ausnahmslos die, dass die Ausgangsform der linearen Schaar

$$f = \frac{p}{a} x_1{}^n + a x_2{}^n$$

angehöre. Ist n gerade, so hat f entweder von dieser oder aber von der Gestalt zu sein

$$f = c \, x_1^{\frac{n}{2}} x_2^{\frac{n}{2}} .$$

Für die Gleichungstheorie ist der erstere Fall, wo n ungerade, der wichtigere, da auf ihn der andere durch die (ev. wiederholt anzuwendende) Substitution $x^2 = y$ zurückgeführt wird. Und es sind daher speciell die Kreistheilungsgleichungen $x_1{}^n + x_2{}^n = 0$ mit ungeradem Exponenten eindeutig dadurch charakterisirt, dass ihre Functionaldeterminante die Gestalt $x_1{}^{n-2} x_2{}^{n-2}$ hat.

4. Nehmen wir zweitens an, dass $B = 0$ sei, so ergiebt sich, dass das durch die Gleichung (4.) ausgesprochene Gesetz überhaupt

zu verwerfen ist; denn solange dasselbe noch einen bestimmten Inhalt hat, müsste neben allen übrigen auch noch der Coëfficient a_0 der Grundform demselben genügen; und da dann, wie wir sahen, in H die sämmtlichen Coëfficienten verschwinden, so würden wir also unsere Forderung, H in Gestalt eines einzigen Termes aufstellen zu dürfen, gar nicht realisiren können, vielmehr wieder auf den Eingangs erwähnten Fall $f = a_0\, x_1{}^n$ hingeleitet werden.

Der Versuch hat uns aber belehrt, dass thatsächlich Grundformen bestehen, die zu solchen Covarianten, wie wir sie hier verlangen, Anlass geben. Um dieselben allgemein zu ermitteln, sind wir daher ausschliesslich auf die zweite der oben berührten Möglichkeiten angewiesen, darauf nämlich, dass wir sowohl a_n als auch a_{n-1} gleich Null annehmen. Ausserdem haben nach wie vor C und B identisch zu verschwinden, und ganz ähnlich wie vorhin müssen deshalb jetzt bei geradem n alle Coëfficienten der Grundform von $a_{\frac{n}{2}}$ an, bei ungeradem n alle von $a_{\frac{n+1}{2}}$ an aufwärts gleich Null sein. — Verlangt man hiernach aber, dass auch in dem Polynom A nur ein einziges Glied, dass etwa nur $x_1{}^{2n-4-\mu}\, x_2{}^{\mu}$ einen nicht verschwindenden Coëfficienten besitze, so zeigt sich zunächst, dass für μ keine ungerade Zahl gewählt werden darf, d. h. dass Formen $x_1{}^{2n-5-2k}\, x_2{}^{2k+1}$ für keinerlei Werth von k überhaupt fähig sind, Hesse'sche Covarianten einer Grundform der gedachten Art zu repraesentiren. Denn man erkennt leicht, dass das Verschwinden aller zwischen diesem und dem Gliede B gelegenen Glieder unter allen Umständen das Verschwinden jenes Gliedes selbst mit Nothwendigkeit nach sich zieht, es also keinen Sinn hat, demselben allein einen geltenden Werth beizulegen. Wir beschränken uns deshalb darauf, für μ eine gerade Zahl $2k$ einzusetzen, und supponiren also, dass H auf das einzige Glied

$$C\,(a_0\, a_{2k+2} + c_1 \,.\, a_1\, a_{2k+1} + c_2 \,.\, a_2\, a_{2k} + \cdots$$
$$+ c_k\, a_k\, a_{k+2} + c_{k+1}\, a^2_{k+1})\, x_1{}^{2n-4-2k}\, x_2{}^{2k}$$

reducirt sei. Die Coëfficienten $a_{2k+2},\ a_{2k+1} \ldots a_{k+2}$ sind nun gleich Null, weil alle auf das gewählte Glied folgenden Terme von A verschwinden sollen; und es ist daher für unseren Zweck nothwendig und hinreichend, dass $a_{k+1} \lessgtr 0$ sei. Und ist das der Fall, so müssen ferner, damit auch die Anfangsglieder von A

bis zu dem ausgezeichneten hin in Wegfall kommen, noch a_k, $a_{k-1} \cdots a_1$, a_0 verschwindende Werthe haben. Es behält also lediglich a_{k+1} einen endlichen Werth; d. h.:

Gleichwie die aus einem einzigen Term bestehende Grundform

$$f' = \binom{n}{k+1} a_{k+1} x_1^{n-k-1} x_2^{k+1}$$

der Hesse'schen Covariante

$$H' = -n^2 (n-1) \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k+1} a_{k+1}^2 x_1^{2n-4-2k} x_2^{2k}$$

Entstehung giebt, ist umgekehrt auch jeder Form von Typus H' eine Form von der Gestalt f' eindeutig zugeordnet, so dass H' ihre Hesse'sche Covariante repraesentirt. Der Index k kann jeden ganzzahligen Werth von Null bis $n-2$ annehmen; und nur tritt bei geraden n für $k = \frac{n}{2} - 1$ der Inhalt des im vorigen Artikel gegebenen Satzes in Kraft. — Grundformen f, deren zugehöriges H aus einem einzigen Term mit ungeraden Exponenten von x_1, x_2 besteht, existiren ausschliesslich in dem Fall, dass diese Exponenten unter einander gleich sind; und wir sahen, dass dann für f die Formen resultiren, welche den Kreistheilungsgleichungen zu Grunde liegen.

Setzt man speciell $k = 0$, so erkennt man, dass die Grundform, um als Hesse'sche Covariante die $(2n-4)^{\text{te}}$ Potenz eines linearen Ausdrucks zu liefern, die Gestalt haben muss

$$f' = na_1 x_1^{n-1} x_2 \,.$$

Ist aber $H = -n^2 (n-1)^2 a_1^2 x_1^{2n-4}$, so ist nach dem Hesse'schen Satz $H(H) \equiv 0$, wenn unter $H(H)$ die Hesse'sche Form von H verstanden wird. Man hat daher als Corollar der vorstehenden Betrachtungen den Satz:

Die Bedingung, dass eine binäre Form n^{ter} Ordnung aus dem Product eines linearen Factors in die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz eines anderen linearen Factors bestehe, drückt sich durch das identische Verschwinden der Hesse'schen Covariante der zu der Ausgangsform gehörigen Hesse'schen Form aus.

5. Die Methoden, welche oben zur Untersuchung der zweiten Ueberschiebung einer Form über sich selbst in Anwendung gebracht wurden, lassen sich fast unverändert auch für die Betrachtung der

vierten Ueberschiebungen verwerthen, während für die späteren Covarianten der gleichen Art die Hereinziehung neuer Gesichtspuncte unerlässlich wird. Wir beantworten im folgenden noch die Frage, welche Bedeutung es für eine binäre Grundform hat, wenn ihre vierte Ueberschiebung über sich selbst identisch verschwindet.

Ist, wie bisher,

$$f = a_x^n = b_x^n = a_0\, x_1^n + n a_1\, x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2\, x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots\cdot + a_n\, x_2^n\ ,$$

so fliesst wieder aus der Definitionsgleichung $(f,f)^4 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}$ eine Darstellung

$$\tfrac{1}{2}(f,f)^4 = A' + B' + C'\ ,$$

in welcher die Ausdrücke A', B', C' die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned}
A' = {} & (a_0\, a_4 - 4a_1\, a_3 + 3a_2^2)\, x_1^{2n-8} + (n-4)\,(a_0\, a_5 - 3a_1\, a_4 \\
& \qquad + 2a_2\, a_3)\, x_1^{2n-9}\, x_2 + \\
& + \left\{ \binom{n-4}{2} (a_0 a_6 - 4a_1 a_5 + 7a_2 a_4 - 4a_3^2) + \binom{n-4}{1}\binom{n-4}{1} (a_1 a_5 \right. \\
& \qquad \left. - 4a_2\, a_4 + 3a_3^2) \right\} x_1^{2n-10}\, x_2^2 + \\
& + \left\{ \binom{n-4}{3} (a_0\, a_7 - 4a_1\, a_6 + 6a_2\, a_5 - 3a_3\, a_4) \right. \\
& \qquad \left. + \binom{n-4}{2}\binom{n-4}{1} (a_1\, a_6 - 3a_2\, a_5 + 2a_3\, a_4) \right\} x_1^{2n-11}\, x_2^3 + \\
& + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C' = {} & (a_{n-4}\, a_n - 4a_{n-3}\, a_{n-1} + 3a^2_{n-2})\, x_2^{2n-8} + (n-4)\,(a_{n-5}\, a_n \\
& \qquad - 3a_{n-4}\, a_{n-1} + 2a_{n-3}\, a_{n-2})\, x_1\, x_2^{2n-9} + \\
& + \left\{ \binom{n-4}{2} (a_{n-6}\, a_n - 4a_{n-5}\, a_{n-1} + 7a_{n-3}\, a_{n-2} - 4a^2_{n-3}) \right. \\
& \qquad + \binom{n-4}{1}\binom{n-4}{1} (a_{n-5}\, a_{n-1} - 4a_{n-4}\, a_{n-2} \\
& \qquad \left. + 3a^2_{n-3}) \right\} x_1^2\, x_2^{2n-10} + \\
& + \left\{ \binom{n-4}{3} (a_{n-7}\, a_n - 4a_{n-6}\, a_{n-1} + 6a_{n-5}\, a_{n-2} - 3a_{n-4}\, a_{n-3}) \right. \\
& \qquad + \binom{n-4}{2}\binom{n-4}{1} (a_{n-6}\, a_{n-1} - 3a_{n-5}\, a_{n-2} \\
& \qquad \left. + 2a_{n-4}\, a_{n-3}) \right\} x_1^3\, x_2^{2n-11} + \\
& + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$B' = \Big\{ (a_0 a_n - 4a_1 a_{n-1} + 6a_2 a_{n-2} - 4a_3 a_{n-3} + a_4 a_{n-4}) \\ + \binom{n-4}{n-5}\binom{n-4}{1}(a_1 a_{n-1} - 4a_2 a_{n-2} + 6a_3 a_{n-3} \\ - 4a_4 a_{n-4} + a_5 a_{n-5}) + \binom{n-4}{n-6}\binom{n-4}{2}(a_2 a_{n-2} \\ - 4a_3 a_{n-3} + 6a_4 a_{n-4} - 4a_5 a_{n-5} + a_6 a_{n-6}) \\ + \cdots \Big\} x_1^{n-4} x_2^{n-4}.$$

Auch hier kann B' als das gesetzmässig abschliessende Glied jeder der beiden Reihen A', C' aufgefasst werden; sein Coëfficient endigt

$$\text{in } \binom{n-4}{\frac{n-4}{2}}\binom{n-4}{\frac{n-4}{2}}\left(a_{\frac{n-4}{2}} a_{\frac{n+4}{2}} - 4a_{\frac{n-2}{2}} a_{\frac{n+2}{2}} + 3a^2_{\frac{n}{2}}\right), \text{ wenn } n$$

gerade,

$$\text{in } \binom{n-4}{\frac{n-3}{2}}\binom{n-4}{\frac{n-5}{2}}\left(a_{\frac{n-5}{2}} a_{\frac{n+5}{2}} - 3a_{\frac{n-3}{2}} a_{\frac{n+3}{2}} + 2a_{\frac{n-1}{2}} a_{\frac{n+1}{2}}\right),$$

wenn n ungerade ist.

6. Die Terme von A' sind so beschaffen, dass jeder spätere gegenüber dem unmittelbar vorhergehenden einen neuen Coëfficienten der Grundform mit sich führt; indem wir also diese Terme einzeln gleich Null setzen, wird sich uns neuerdings ein recurrentes Verfahren darbieten müssen, das uns in den Stand setzt, jene Coëfficienten aus einander und weiterhin also in independenter Darstellung zu berechnen. Um diese Rechnung möglichst übersichtlich zu gestalten, nehmen wir an, dass $a_0 = 0$ sei; dadurch erscheint der Fundamentalpunct $x_2 = 0$ in einen der Wurzelpuncte der Form f gelegt, und offenbar wird so die Allgemeinheit unserer Untersuchung in keiner Weise beeinträchtigt. Die Bedingungsgleichungen, die zu erfüllen sind, vereinfachen sich aber durch diese Festsetzung in der Weise, dass von a_3 an aufwärts die sämmtlichen Coëfficienten von f in Function der ersten beiden a_1, a_2 erhalten werden. Man findet beispielsweise, indem man etwa nur die fünf ersten Terme von A' gleich Null setzt, nach einander

$$a_3 = \frac{3}{4}\frac{a_2^2}{a_1};\ a_4 = \frac{1}{2}\frac{a_2^3}{a_1^2};\ a_5 = \frac{5}{16}\frac{a_2^4}{a_1^3};\ a_6 = \frac{3}{16}\frac{a_2^5}{a_1^4};\ a_7 = \frac{7}{64}\frac{a_2^6}{a_1^5};$$

dabei treten indessen in der Berechnung von a_4, a_5, a_6, a_7 der Reihe nach die überflüssigen Factoren $n-4$, $n-6$, $n-12$,

$n - 6$ auf, so dass die Fälle $n = 4, 6, 12$ einstweilen von unserer Betrachtung auszuschliessen sind.

7. Die Form, unter welcher die Grössen a_3 bis a_7 auftreten, macht die durchgreifende Existenz des folgenden Gesetzes

$$a_k = k a_1 \left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^{k-1} \tag{6.}$$

wahrscheinlich. Von der Allgemeinheit desselben überzeugt man sich wieder durch den Schluss von k auf $k+1$; und da, wie man unschwer erkennt, unter Annahme dieses Gesetzes der Ausdruck

$$A_{\mu\nu} = a_{\mu-2}\, a_{\nu+2} - 4a_{\mu-1}\, a_{\nu+1} + 6a_\mu\, a_\nu - 4a_{\mu+1}\, a_{\nu-1} \\ + a_{\mu+2}\, a_{\nu-2}$$

unabhängig von den Zahlwerthen der Indices μ, ν identisch verschwindet, so genügt es mit Rücksicht auf die Structur der einzelnen Terme von A', den Coëfficienten eines jeden derselben bei dem zu führenden Beweise als auf die Summe seiner ersten beiden Glieder reducirt vorauszusetzen. Insbesondere berechnet sich daher, weil auch $a_0 = 0$ ist, a_{k+1} aus der Gleichung

$$\binom{n-4}{k-2}(-4a_1\, a_{k+1} + 6a_2\, a_k - 4a_3\, a_{k-1} + a_4\, a_{k-2}) + \\ + \binom{n-4}{k-3}\binom{n-4}{1}(a_1\, a_{k+1} - 4a_2\, a_k + 6a_3\, a_{k-1} \\ - 4a_4\, a_{k-2} + a_5\, a_{k-3}) = 0\ ;$$

und da diese mit Hülfe der Relation (6.), die bis einschliesslich des Index k als gültig angenommen wird, sich zu

$$(nk - 6n + 12)\left\{ a_1\, a_{k+1} - (k+1)\, a_1^2 \left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^k \right\} = 0$$

vereinfacht, so ist in der That

$$a_{k+1} = (k+1)\, a_1 \left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^k,$$

so lange wir von den Fällen absehen, in welchen der Factor $nk - 6n + 12$ den Werth Null hat. Somit erweist sich das Gesetz (6.) als die nothwendige Bedingung dafür, dass $(f,f)^4$ identisch verschwinde; dass es auch die hinreichende Bedingung darstellt, folgt ohne weiteres daraus, dass die linken Seiten aller Bedingungsgleichungen, die durch das Nullsetzen von $(f, f)^4$ erwachsen, namentlich also auch der überzähligen, aus Aggregaten

von Ausdrücken $A_{\mu\nu}$ bestehen, und dass diese letzteren, wie wir vorhin bemerkten, sämmtlich einzeln verschwinden, sowie jenes Gesetz wirklich statthat. Es resultirt also für f die Form

$$f = a_1 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \left(\frac{a_2}{2a_1}\right)^{k-1} x_1^{\,n-k} x_2^{\,k};$$

diese Entwickelung lässt sich aber umsetzen in

$$(7.)\ f = \frac{n x_2}{2^{n-1} a_1^{\,n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} a_1^{\,n-1-k} a_2^{\,k} x_1^{\,n-1-k} x_2^{\,k}$$

$$= \frac{n x_2}{2^{n-1} a_1^{\,n-2}} (2a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-1},$$

und sie erhält vermöge der linearen Transformation

$$\varrho x_1 = \xi_1 - a_2 \xi_2$$
$$\varrho x_2 = \qquad 2a_1 \xi_2$$

wesentlich die Gestalt

$$f = c\, \xi_1^{\,n-1} \xi_2 .$$

Das ergiebt mithin den Satz: Die erforderliche und hinreichende Bedingung dafür, dass eine binäre Form n^{ter} Ordnung eine identisch verschwindende vierte Ueberschiebung über sich selbst besitze, ist die, dass die betreffende Form aus dem Product eines linearen Ausdrucks in die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz eines zweiten linearen Ausdrucks (der übrigens auch dem ersten gleich sein kann) bestehe. Zu abstrahiren ist dabei von denjenigen Werthen n, die sich als Lösungen der Diophantischen Gleichung $nk - 6n + 12 = 0$ erweisen.*)

Oder, wie wir im Hinblick auf das Corollar des Art. 4 auch sagen können:

Die Bedingung dafür, dass eine binäre Form n^{ter} Ordnung eine $(n-1)$fache Wurzel besitze, drückt sich ganz allgemein durch das identische Verschwinden der Covariante $H(H)$ aus; die Forderung $H(H) \equiv 0$ ist mit der

---

*) Der Beweis dieses Satzes lässt sich auch auf Grund der typischen Darstellung der binären Formen (über welche Clebsch a. a. O. Siebenter Abschnitt zu vergleichen ist) führen; wir haben vorgezogen, im Text eine directe Beweismethode zu geben, weil sie weiterhin in naturgemässer Weise auch die wirkliche Darstellung der Annahmeformen vermittelt.

anderen $(f,f)^4 \equiv 0$ gleichbedeutend in dem Umfange, als für die letztere nicht die erwähnten Ausnahmen bestehen.

8. Was die durch die Gleichung

$$nk - 6n + 12 = 0$$

begründeten Ausnahmefälle angeht, so ist das vollständige System ihrer ganzzahligen Lösungen dargestellt durch die Werthepaare:

$$\begin{array}{lrrrrrr} n = & 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 12 \\ k = & -6, & 0, & 2, & 3, & 4, & 5, \end{array}$$

und da die Relation $(f,f)^4 \equiv 0$ erst von $n = 4$ an einen wirklichen Inhalt hat, so bleiben in der That nur die drei Fälle $n = 4$, $n = 6$, $n = 12$ zu untersuchen, auf die wir schon oben aufmerksam wurden. Hat unsere Betrachtung zunächst nur gezeigt, dass in diesen Fällen Ausnahmeformen möglicherweise auftreten, so ist durch anderweitige Untersuchungen bekannt, dass eben für jene Werthe von n solche Formen thatsächlich vorhanden sind.

Bei $n = 4$ bedeutet ja das identische Verschwinden von $(f,f)^4$ die aequianharmonische Lage der vier Wurzelpuncte von f. Für $n = 6$ hat Clebsch nachgewiesen*), dass die gleiche Voraussetzung die Bedingung dafür ist, dass f die Covariante sechster Ordnung einer biquadratischen Form sei, eine Eigenschaft, durch welche die Wurzelpuncte von f in dieselben Lagenbeziehungen zu einander gesetzt erscheinen, wie die Eckpuncte eines regulären Oktaëders, wenn man die Definition des letzteren projectivisch allgemein formulirt.**) Und für Formen zwölfter Ordnung endlich hat Herr Klein gezeigt***), dass die Bedingung $(f,f)^4 \equiv 0$ die Bedeutung hat, die Wurzeln der Gleichung $f = 0$ in die Ecken eines regulären Ikosaëders zu verlegen.

9. Im genaueren Verfolg der hier eingeschlagenen Behandlungsweise des ganzen Problems werden wir denn auch auf eben jene Formen hingeleitet; und dem Verfahren, durch welches sie gewonnen werden, mag hier eine Stelle eingeräumt werden, da dasselbe zugleich die Art und Weise aufdeckt, in welcher die

---

*) „Binäre Formen", pag. 447.

**) Klein, „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst"; Math. Annalen, Band IX, pag. 197.

***) Ib. pag. 198.

Ausnahmeformen noch über das Mass ihrer Veränderlichkeit durch lineare Transformationen hinaus von einem willkürlichen Parameter abhängen. — Dabei mag es gestattet sein, den Coëfficienten a_1, a_2 beziehlich die Werthe 1, 2 zu ertheilen, so dass das Gesetz (6.) die vereinfachte Gestalt

$$a_k = k$$

erhält, und die Form f sich im allgemeinen, um der Bedingung $(f, f)^4 \equiv 0$ zu genügen, zu

$$f = C\, x_2 (x_1 + x_2)^{n-1}$$

specialisirt. Man kehrt sofort zu der früheren Darstellungsweise zurück, wenn man x_1, x_2, jedes für sich, proportional mit sich selbst verändert. Da ferner der kritische Factor $nk - 6n + 12$ bei der Berechnung von a_{k+1} zu Tage trat, und da die Gleichung $nk - 6n + 12 = 0$ den Werthen $n = 4, 6, 12$ die Zahlen $k = 3, 4, 5$ zuordnet, so werden wir in unseren drei Fällen zu gewärtigen haben, dass beziehlich die Coëfficienten a_4, a_5, a_6 die ersten sind, welche von dem allgemeinen Gesetz abweichen.

10. In der That haben wir bei $n = 4$ die einzige Bedingung zu erfüllen:

$$a_0\, a_4 - 4a_1\, a_3 + 3a_2^2 = 0\,,$$

und diese ergiebt, wenn wir wie früher $a_0 = 0$ nehmen, dagegen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ setzen, für a_3 den Werth 3, lässt aber a_4 völlig unbestimmt. Um diesen Coëfficienten dennoch soviel wie möglich in das allgemeine Gesetz einzuordnen, setzen wir unter Einführung des erwähnten Parameters λ,

$$a_4 = 4\lambda\,, \text{ oder bequemer noch } a_4 = 4\,(1 - \lambda^3)\,,$$

so dass wir für f die Gestalt erhalten

$$f = 4x_1^3\, x_2 + 6\,.\,2x_1^2\, x_2^2 + 4\,.\,3x_1\, x_2^3 + 4\,(1 - \lambda^3)\, x_2^4\,,$$

die sich sofort weiter umsetzt in

$$f = 4x_2 \left\{ (x_1 + x_2)^3 - \lambda^3\, x_2^3 \right\}\,,$$

oder — wenn wir unter ε eine der beiden imaginären dritten Wurzeln der positiven Einheit verstehen — in

$$f = 4x_2 \left\{ x_1 - (\lambda - 1)\, x_2 \right\} \left\{ x_1 - (\varepsilon\lambda - 1)\, x_2 \right\} \left\{ x_1 - (\varepsilon^2\, \lambda - 1)\, x_2 \right\}.$$

Das Doppelverhältniss der vier Wurzeln von f ist hiernach

$$\frac{\infty - (\varepsilon\lambda - 1)}{\varepsilon\lambda - 1 - (\lambda - 1)} : \frac{\infty - (\varepsilon^2\lambda - 1)}{\varepsilon^2\lambda - 1 - (\lambda - 1)} = \frac{\varepsilon^2\lambda - 1 - (\lambda - 1)}{\varepsilon\lambda - 1 - (\lambda - 1)} = \varepsilon + 1$$
$$= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} ,$$

d. h. es ist aequianharmonisch, wie verlangt werden musste.

Für den Parameterwerth $\lambda = 0$ resultirt die specielle Form vom Charakter $x_1{}^3 x_2$, die, wie wir wissen, gleichfalls unserer Forderung genügt. Im übrigen mögen die folgenden Gestalten der biquadratischen Formen von aequianharmonischem Doppelverhältniss

$$f = x_2 (x_1{}^3 \pm x_2{}^3) \, , = x_1 x_2 (x_1{}^2 \pm \sqrt{3}\, x_1 x_2 + x_2{}^2) \, ,$$
$$= x_1{}^4 \pm 2i\sqrt{3}\, x_1{}^2 x_2{}^2 + x_2{}^4$$

als besonders ausgezeichnet Erwähnung finden. Sie sind selbstverständlich durch lineare Transformationen aus der allgemeinsten Gestalt, die wir oben aufstellten, ableitbar.

11. Sei also zweitens $n = 6$. Von den fünf Bedingungsgleichungen, welche aus der Forderung $(f, f)^4 = 0$ fliessen, liefern nach unseren Festsetzungen die ersten beiden in Gemässheit des Gesetzes $a_k = k$

$$a_3 = 3 \, , \; a_4 = 4 \, ;$$

die dritte ist vermöge dieser Werthe identisch erfüllt, kann also zur Berechnung von a_5 nicht verwerthet werden; die vierte und fünfte werden einander proportional. Führt man daher wieder einen willkürlichen Parameter ein, dem man gegenwärtig aus Zweckmässigkeitsrücksichten die Form $1 - \frac{\lambda^4}{5}$ ertheilt, so kann man $a_5 = 5\left(1 - \frac{\lambda^4}{5}\right)$ setzen und findet dann $a_6 = 6\,(1 - \lambda^4)$.

Die allgemeinste Form sechster Ordnung mit identisch verschwindender vierter Ueberschiebung über sich selbst hat daher die Gestalt:

$$f = 6 \, . \, x_1{}^5 x_2 + 15 \, . \, 2x_1{}^4 x_2{}^2 + 20 \, . \, 3x_1{}^3 x_2{}^3 + 15 \, . \, 4x_1{}^2 x_2{}^4$$
$$+ 6 \, . \, 5\left(1 - \frac{\lambda^4}{5}\right) x_1 x_2{}^5 + 6\,(1 - \lambda^4)\, x_2{}^6$$
$$= 6x_2 (x_1 + x_2) \left\{ (x_1 + x_2)^4 - \lambda^4 x_2{}^4 \right\} ,$$

und da dieselbe durch die lineare Transformation

$$\varrho\xi_1 = x_1 + x_2\,, \quad \varrho\xi_2 = \lambda x_2$$

in

$$f = C\xi_1\,\xi_2\,(\xi_1{}^4 - \xi_2{}^4)$$

übergeht, so erweist sie sich thatsächlich als mit der auf das Oktaëder bezogenen Form sechster Ordnung identisch.

Neben diese oder die gleichberechtigte Gestalt $C x_1 x_2 (x_1{}^4 + x_2{}^4)$ stellt sich noch — für $\lambda = 1$, und wenn man x_2 durch $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,x_2$ ersetzt, wo $\varepsilon^4 = 1$ — die folgende:

$$f = C'\,x_1\,x_2\left(x_1{}^4 + \frac{5\varepsilon}{\sqrt{2}}\,x_1{}^3\,x_2 + 5\varepsilon^2\,x_1{}^2\,x_2{}^2 + \frac{5\varepsilon^3}{\sqrt{2}}\,x_1\,x_2{}^3 + x_2{}^4\right),$$

welche die Fundamentalpuncte der Coordinatenbestimmung in zwei benachbarten und nicht, wie jene, in zwei gegenüberstehenden Eckpuncten des Oktaëders gelegen annimmt. — Für $\lambda = 0$ resultirt wieder die specielle Form vom Typus $x_1{}^5\,x_2$.

12. Wir gehen endlich zu $n = 12$, dem letzten unserer Ausnahmefälle, über. Die vierte Ueberschiebung von f über sich selber ist von der 16ten Ordnung; die Forderung, dass sie identisch verschwinde, liefert daher 17 Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der 13 homogenen Coëfficienten $a_0, a_1, \cdots a_{12}$. Die ersten 10 Gleichungen genügen, da wir nach wie vor $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ setzen, zur Bestimmung dieser Unbekannten; sie liefern mit Rücksicht darauf, dass die Ermittelung von a_6 illusorisch wird, wir also statt dieses Coëfficienten einen beliebigen Parameter — und wir wählen für ihn die Gestalt $6\left(1 + \frac{\lambda^5}{42}\right)$ — einführen dürfen, das folgende Werthsystem:

$$a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 2\,,\ a_3 = 3\,,\ a_4 = 4\,,\ a_5 = 5\,,$$

$$a_6 = 6\left(1 + \frac{\lambda^5}{42}\right),\ a_7 = 7\left(1 + \frac{\lambda^5}{7}\right),\ a_8 = 8\left(1 + \frac{\lambda^5}{2}\right),$$

$$a_9 = 9\left(1 + \frac{4\lambda^5}{3}\right),\ a_{10} = 10\,(1 + 3\lambda^5)\,,\ a_{11} = 11\left(1 + 6\lambda^5 - \frac{\lambda^{10}}{11}\right),$$

$$a_{12} = 12\,(1 + 11\lambda^5 - \lambda^{10})\,.$$

Es ergiebt sich weiterhin, dass die noch übrigen Bedingungsgleichungen durch diese Werthe identisch befriedigt werden, und wir gewinnen sonach für die gesuchte Form den Ausdruck:

$$f = \binom{12}{1} x_1^{11} x_2 + \binom{12}{2} . 2x_1^{10} x_2^2 + \binom{12}{3} . 3x_1^9 x_2^3 + \binom{12}{4} . 4x_1^8 x_2^4$$
$$+ \binom{12}{5} . 5x_1^7 x_2^5 + \binom{12}{6} . 6\left(1 + \frac{\lambda^5}{42}\right) x_1^6 x_2^6$$
$$+ \binom{12}{7} . 7\left(1 + \frac{\lambda^5}{7}\right) x_1^5 x_2^7 + \binom{12}{8} . 8\left(1 + \frac{\lambda^5}{2}\right) x_1^4 x_2^8$$
$$+ \binom{12}{9} . 9\left(1 + \frac{4\lambda^5}{3}\right) x_1^3 x_2^9 + \binom{12}{10} . 10\,(1 + 3\lambda^5)\, x_1^2 x_2^{10}$$
$$+ \binom{12}{11} . 11\left(1 + 6\lambda^5 - \frac{\lambda^{10}}{11}\right) x_1 x_2^{11} + 12\,(1 + 11\lambda^5 - \lambda^{10})\, x_2^{12}.$$

Sammelt man nach Potenzen von λ, so erkennt man leicht, dass man die folgende Form vor sich hat:

$$f = 12x_2 \{(x_1 + x_2)^{11} + 11\,(x_1 + x_2)^6 x_2^5 \lambda^5 - (x_1 + x_2)\, x_2^{10} \lambda^{10}\}$$
$$= 12\,(x_1 + x_2)\, x_2 \{(x_1 + x_2)^{10} + 11\,(x_1 + x_2)^5 \lambda^5 x_2^5 - \lambda^{10} x_2^{10}\},$$

und wirklich geht diese durch die nämliche Substitution, die wir bei $n = 6$ anwandten, in die Ikosaëdergleichung (Klein, a. a. O. pag. 196)

$$f = C\,\xi_1\,\xi_2\,(\xi_1^{10} + 11\xi_1^5\,\xi_2^5 - \xi_2^{10})$$

über. Für die beiden Wurzeln $\lambda^5 = \frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{2}$ der Gleichung $1 + 11\lambda^5 - \lambda^{10} = 0$ entstehen, unter gleichzeitiger proportionaler Aenderung von x_2, zwei andere Gestalten von f, die dadurch zu kennzeichnen sind, dass sich der Factor $x_1 x_2$ absondert, und dass die Coëfficienten von x_1^{10}, x_2^{10} in dem zurückbleibenden Polynom einander gleich werden. Diese Gestalten charakterisiren in Gemeinschaft mit der soeben aufgestellten analytisch die drei verschiedenen Weisen, in welchen man die Puncte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ in zwei Ecken des Ikosaëders legen kann. — Der Specialfall erscheint nach wie vor durch den Werth $\lambda = 0$ bedingt.

13. Befinden sich hiernach die Ergebnisse unserer Analyse mit Bezug auf die Ausnahmefälle in Uebereinstimmung mit bekannten Resultaten, so führen sie uns auf der anderen Seite darüber hinaus zu dem Theorem:

Die durch die geometrischen Gebilde des regulären Tetraëders, Oktaëders, Ikosaëders vorgestellten binären Formen 4ter, 6ter, 12ter Ordnung sind die einzigen Formen von nicht verschwindender Discriminante, deren vierte Ueberschiebung über sich selbst identisch verschwindet.

Fig 1.

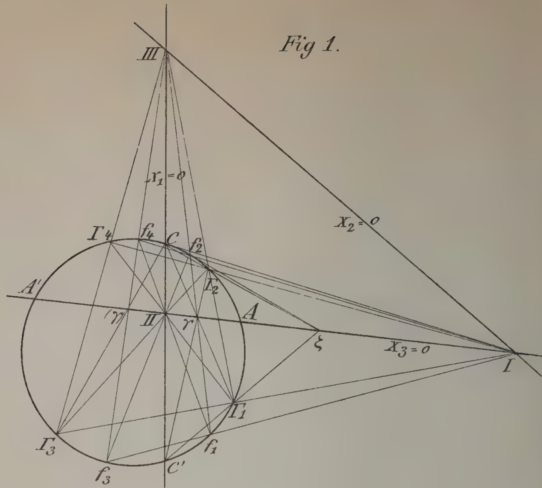


Fig. 2.

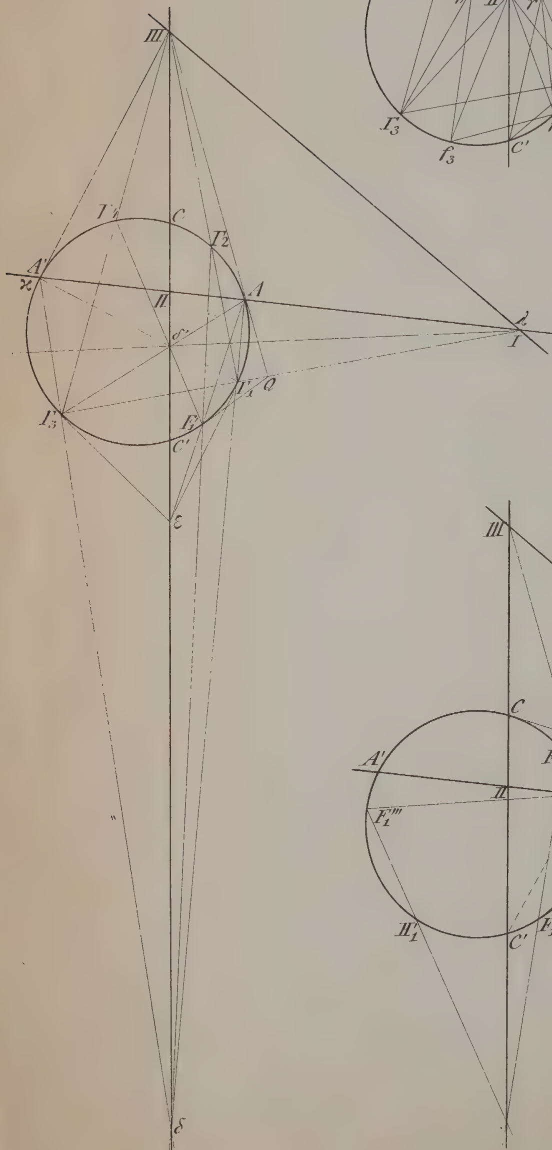
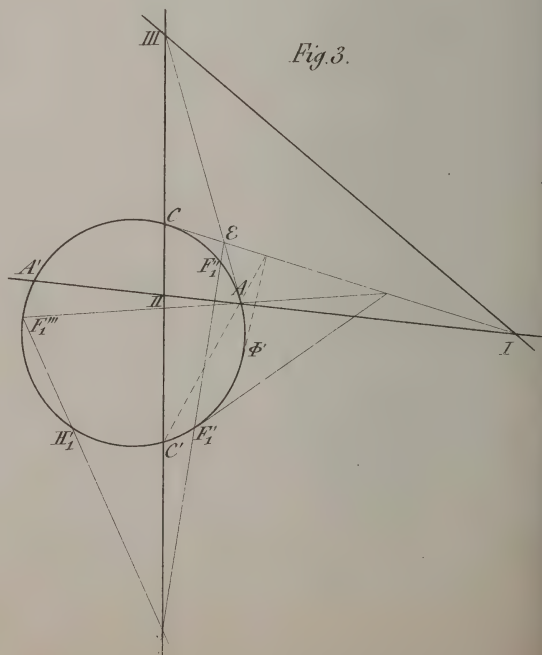


Fig. 3.



Independente Entwicklung

der

HEREN DIFFERENTIALQUOTIENTEN

mittelbarer und inverser Functionen.

Einladungsschrift

zu den

fungen der Schüler der technischen Lehranstalten in Nürnberg

am Schlusse des Schuljahres 1858/59

von

Professor Dr. Ad. Weiſs.

Nürnberg.

Druck von Fr. Campe & Sohn.

·pendente Entwicklung höherer Differentialquotienten mittelbarer und inverser Functionen.

Vor mehr als fünfzehn Jahren hatte ich, als ich in Crelles Journal (Bände 34. 8) eine Reihe von combinatorischen Abhandlungen veröffentlichte, schon vorliegenden ·tz zum Drucke bereit gemacht, hielt ihn aber damals zurück, weil ich glaubte, eine ·r gehende Behandlung des Stoffes hätte die in jenen Arbeiten erzielten Resultate ·r, (so dafs die gegenwärtige Abhandlung den Anstofs gab zu der genannten da- ·bekannt gemachten). An die besagte Erweiterung bin ich indessen nicht gekommen, ·wohl dürften die nachstehenden Sätze auch in ihrem jetzigen Umfang einer Veröffent- ·g würdig erscheinen, theilweise wegen der verhältnifsmäfsig bedeutenden Kürze, mit ·e über ein so weites Gebiet herrschen, theilweise auch wegen der fruchtbringenden ·ndung, deren die eine oder die andere fähig sein mag. —

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz wird bekanntlich der Zuwachs $\varDelta u$ eines Ausdrucks ·ssen Werth mittelbar oder unmittelbar von den willkührlichen Gröfsen w_1, w_2, w_3 ·w_n abhängt, für den Fall als diese beziehungsweise die Incremente $\varDelta w_1$, $\varDelta w_2$, $\varDelta w_3$, ·w_n erhalten, bestimmt durch die Gleichung:

$$\varDelta u = {}^1u + {}^2u + {}^3u + \ldots\ldots + {}^mu + \ldots\ldots$$

·der Posten u dieser Reihe ist das Product eines numerischen Coefficient und eines ·n $\varDelta w$ zu bildenden Polynoms von bestimmter Dimension. Für ${}^mu$ ist der numerische · $= \frac{1}{m!} = \frac{1}{1.2.3\ldots.m}$ und die Dimension des Polynoms ist $= m$ und wird da- ·l erhalten, dafs man aus den $\varDelta w$ als Elementen die m^{te} Combinationsclasse mit unbe- ·äkter Wiederholung herstellt. Jede einzelne Combination hat ferner einen durch Ab- ·r zu bildenden Factor, welcher partielle Ableitung, partieller Differentialquotient der ·e·nen Function beziehlich der willkührlichen Gröfsen w genannt und auf folgende be- ·n· Weise bezeichnet wird:

·ie Combinationen haben im Allgemeinen die Form:

$$\varDelta w_1^{\alpha_1}\ \varDelta w_2^{\alpha_2}\ \varDelta w_3^{\alpha_3} \ldots \varDelta w_n^{\alpha_n}$$

und die zu dieser Combination gehörige Partialableitung ist alsdann:

$$\frac{d^m u}{dw_1^{\alpha_1}\ dw_2^{\alpha_2}\ dw_3^{\alpha_3}\ \ldots\ldots\ dw_n^{\alpha_n}}.$$

Die Darstellung der einzelnen (Differential-) Posten der Taylor'schen Reihe nun Vorwurf der gegenwärtigen Abhandlung und zwar in den sogleich näher bezeichn den Fällen.

I. Eine Gröſse u ist von einer zweiten Gröſse v und diese von einer dritten Gröſs gegebener Weise abhängig.

II. Eine Gröſse u ist von einer andern Gröſse v_1, diese von einer dritten v_2, diese einer vierten v_3 und so weiter, endlich eine n^{te} v_{n-1} von der allein willkührliche in gegebener Weise abhängig.

III. Eine Gröſse v ist von w abhängig, so daſs letztere die willkührliche Gröſse ist, Relation zwischen beiden ist aber in Beziehung auf die willkührliche Gröſse entwi gegeben.

IV. Eine Gröſse u ist in gegebener Weise von einer Gröſse v und diese von der a willkührlichen w abhängig, die Relation zwischen den letztern ist aber in Bezieh auf die willkührliche entwickelt gegeben.

V. Eine Gröſse u ist in gegebener Weise von beliebig vielen Gröſsen $v_1, v_2, v_3 \ldots$ abhängig und eine jede der letztern ist beziehungsweise von den willkührlichen Grö $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ in gegebener Weise abhängig.

VI. Eine Gröſse u ist von einer zweiten Gröſse v, diese aber von beliebig vielen an willkührlichen Gröſsen $w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w_n$ in gegebener Weise abhängig.

In den für diese Fälle aufgestellten Formeln hat man sich der Kürze wegen nac hender Bezeichnungen bedient:

1) $\quad {}^\alpha f(w)$ oder kurzweg ${}^\alpha f = \dfrac{1}{\alpha!}\dfrac{d^\alpha f(w)}{dw^\alpha}$

die oben stehende Zahl α ist also der Ableitungsexponent.

2) $\quad {}^\alpha f(\alpha_1 w_1, \alpha_2 w_2, \alpha_3 w_3 \ldots\ldots \alpha_n w_n) = \dfrac{1}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \alpha_3!\ \ldots\ldots\ \alpha_n!}\ \dfrac{d^\alpha f(w_1, w_2, w_3 \ldots\ldots w}{dw_1^{\alpha_1}\ dw_2^{\alpha_2}\ dw_3^{\alpha_3}\ \ldots\ldots\ d}$

hier ist bekanntlich $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n$.

3) $\quad C(\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3 \ldots \Delta w_n)^m = C(\Delta w)^m$

bedeutet die m^{te} Combinationsclasse aus den Elementen $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3 \ldots\ldots \Delta w_n$ mi beschränkter Wiederholung gebildet.

4) $\quad \overset{s}{\bar{C}}({}^1f, {}^2f, {}^3f, \ldots\ {}^\alpha f)^m = \overset{s}{\bar{C}}(f)^m$

bedeutet die m^{te} Combinationsclasse aus den Elementen ${}^1f, {}^2f, {}^3f \ldots {}^\alpha f$ mit unbeschrä Wiederholung gebildet, aber so, daſs die Summe der Ableitungsexponenten in jeder zelnen Combination $= s$ ist. Ferner deutet der horizontale Strich durch das Zeichen (

… jede einzelne Combination mit der zugehörigen Permutationszahl, d. h. jener Zahl, …che angibt, wie vielmal die Elemente der Combination unter sich versetzt werden kön…, zu multipliciren ist.

I.

Hier ist $u = f(v)$; $v = f(w)$ und man findet: ${}^{m}u = \frac{1}{m!}\frac{d^m u}{dw^m}\,\varDelta w^m =$

$$= \sum \left\{ {}^{\alpha}F\, \overset{m}{C}\, (f)^{\alpha} \right\} \varDelta w^m,$$

… Summenzeichen bezieht sich auf α, das alle ganze Zahlen von 1 bis m annimmt. —

Als Beispiel für ${}^{6}u = \frac{1}{6!}\frac{d^6 u}{dw^6}\,\varDelta w^6$ hat man:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{1} &= {}^{1}F\, {}^{6}f \\
{}^{2}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{2} &= {}^{2}F\, (2\,{}^{1}f\,{}^{5}f + 2\,{}^{2}f\,{}^{4}f + ({}^{3}f)^{2}) \\
{}^{3}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{3} &= {}^{3}F\, (3({}^{1}f)^{2}\,{}^{4}f + 6\,{}^{1}f\,{}^{2}f\,{}^{3}f + ({}^{2}f)^{3}) \\
{}^{4}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{4} &= {}^{4}F\, (4({}^{1}f)^{3}\,{}^{3}f + 6({}^{1}f)^{2}\,({}^{2}f)^{2}) \\
{}^{5}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{5} &= {}^{5}F\, (5({}^{1}f)^{4}\,{}^{2}f) \\
{}^{6}F\, \overset{6}{C}\, (f)^{6} &= {}^{6}F\, (({}^{1}f)^{6}).
\end{aligned}
$$

…rt man sämmtliche rechts stehende Werthe zusammen und multiplicirt die Summe mit … so hat man das verlangte ${}^{6}u$ für $u = F(v)$; $v = f(w)$. —

II.

Hier ist $u = f_1(v_1)$; $v_1 = f_2(v_2)$; $v_2 = f_3(v_3)$; .... $v_{n-2} = f_{n-1}(v_{n-1})$; $(v_{n-1}) = f_n(w)$ und … findet ${}^{m}u = \frac{1}{m!}\frac{d^m u}{w^m}\,\varDelta w^m =$

$$= \sum \left\{ {}^{\alpha_1}f_1 \cdot \overset{\alpha_2}{C}\, (f_2)^{\alpha_1} \cdot \overset{\alpha_3}{C}\, (f_3)^{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \overset{\alpha_{n-1}}{C}\, (f_{n-1})^{\alpha_{n-2}} \cdot \overset{m}{C}\, (f_n)^{\alpha_{n-1}} \right\} \varDelta w^m,$$

…ie Summation eine $(n-1)$-fache ist und sich auf die Gröfsen α bezieht, welche die …he haben

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_1 & \text{von } 1 & \text{bis } m \\
\alpha_2 & \text{von } \alpha_1 & \text{bis } m \\
\alpha_3 & \text{von } \alpha_2 & \text{bis } m \\
\hline
\alpha_{n-1} & \text{von } \alpha_{n-2} & \text{bis } m.
\end{array}
$$

Ist z. B. gegeben $u = f_1(v_1)$; $v_1 = f_2(v_2)$; $v_2 = f_3(v_3)$; $v_3 = f_4(w)$ und es ist … $= \frac{1}{6!}\frac{d^6 u}{dw^6}\,\varDelta w^6$ herzustellen, so hat man:

$${}^1f_1\,{}^1f_2\,[{}^1f_3\,{}^6f_4+2\,{}^2f_3\,{}^5f_4\,{}^1f_4+2\,{}^2f_3\,{}^4f_4\,{}^2f_4+{}^2f_3\,({}^3f_4)^2+{}^3f_3\,(3\,{}^4f_4\,({}^1f_4)^2+6\,{}^3f_4\,{}^2f_4\,{}^1f_4+({}^2f_4)$$
$$+\,{}^4f_3\,(4\,{}^3f_4\,({}^1f_4)^3+6({}^2f_4)^2({}^1f_4)^2)+5\,{}^5f_3\,{}^2f_4\,({}^1f_4)^4+{}^6f_3\,({}^1f_4)^6]+$$
$$+\,[{}^1f_1\,{}^2f_2+{}^2f_1\,({}^1f_2)^2]\,[({}^1f_3)^2\,(2\,{}^5f_4\,{}^1f_4+2\,{}^4f_4\,{}^2f_4+({}^3f_4)^2)+2\,{}^1f_3\,{}^2f_3\,(3\,{}^4f_4\,({}^1f_4)^2+6\,{}^3f_4\,{}^2f_4$$
$$+({}^2f_4)^3)+(2\,{}^1f_3\,{}^3f_3+({}^2f_3)^2)\,(4\,{}^3f_4\,({}^1f_4)^3+6({}^2f_4)^2\,({}^1f_4)^2)+(2\,{}^1f_3\,{}^4f_3+2\,{}^2f_3\,{}^3f_3)\,(5\,f_4({}^1f_4$$
$$+\,(2\,{}^1f_3\,{}^5f_3+2\,{}^2f_3\,{}^4f_3+({}^3f_3)^2)\,(({}^1f_1)^6)]+$$
$$+\,[{}^1f_1\,{}^3f_2+2\,{}^2f_1\,{}^1f_2\,{}^2f_2+{}^3f_1\,({}^1f_2)^3]\,[({}^1f_3)^3\,(3\,{}^4f_4\,({}^1f_4)^2+6\,{}^3f_4\,{}^2f_4\,{}^1f_4+({}^2f_4)^3)+3({}^1f_3)^2\,{}^2f_3\,(4\,{}^3f_4({}^1f$$
$$+\,6({}^2f_4)^2\,({}^1f_4)^2)+(3\,({}^1f_3)^2\,{}^3f_3+3\,{}^1f_3\,({}^2f_3)^2)\,(5\,{}^2f_4\,({}^1f_4)^4)+(3\,({}^1f_3)^2\,{}^4f_3+6\,{}^3f_3\,{}^2f_3$$
$$+\,({}^2f_3)^3)\,(({}^1f_4)^6)]+$$
$$+\,[{}^1f_1\,{}^4f_2+{}^2f_1\,(2\,{}^1f_2\,{}^3f_2+({}^2f_2)^2)+{}^3f_1\,(3({}^1f_2)^2\,{}^2f_2)+{}^4f_1\,({}^1f_2)^4]\,[({}^1f_3)^4\,(4({}^1f_4)^3\,{}^3f_4+6({}^1f_4)^2({}^2f$$
$$+\,4({}^1f_3)^3\,{}^2f_3\,(5\,{}^2f_4\,({}^1f_4)^4)+(4({}^1f_3)^3\,{}^3f_3+6({}^1f_3)^2\,({}^2f_3)^2)\,(({}^1f_4)^6)]+$$
$$+\,[{}^1f_1\,{}^5f_2+{}^2f_1\,(2\,{}^1f_2\,{}^4f_2+2\,{}^2f_2\,{}^3f_2)+{}^3f_1\,(3({}^1f_2)^2\,{}^3f_2+3\,{}^1f_2\,({}^2f_2)^2)+{}^4f_1\,(4({}^1f_2)^3\,{}^2f_2)+{}^5f_1\,({}^1f$$
$$\times\,[({}^1f_3)^5.5.{}^2f_4\,({}^1f_4)^4+5\,{}^2f_3\,({}^1f_3)^4\,({}^1f_4)^6]+$$
$$+\,[{}^1f_1\,{}^6f_2+{}^2f_1\,(2\,{}^1f_2\,{}^5f_2+2\,{}^2f_2\,{}^4f_2+({}^3f_2)^2)+{}^3f_1\,(3({}^1f_2)^2\,{}^4f_2+6\,{}^1f_2\,{}^2f_2\,{}^3f_2+({}^2f_2)^3)+{}^4f_1\,(4({}^1f_2)^3$$
$$+\,6({}^1f_2)^2\,({}^2f_2)^2)+{}^5f_1\,(5({}^1f_2)^4\,{}^2f_2)+{}^6f_1\,({}^1f_2)^6]\cdot[({}^1f_3)^6\,({}^1f_4)^6].$$

III.

Hier ist $w=f(v)$ gegeben und man findet ${}^m v=\dfrac{1}{m!}\dfrac{d^m v}{dw^m}\,\varDelta w^m=$

$$\sum\left\{\frac{(-1)^{\alpha}\binom{m+\alpha-1}{\alpha-1}}{\alpha({}^1f)^{m+\alpha}}\;\overset{m+\alpha-1}{\mathfrak{C}}\;({}^2f\ldots{}^mf)^{\alpha}\right\}\varDelta w^m.$$

Die Summation bezieht sich anf α, das alle Werthe zwischen 1 und $m-1$ annimmt,

ist $\binom{m+\alpha-1}{\alpha-1}=\dfrac{(m+\alpha-1)\;(m+\alpha-2)\;\ldots\ldots\;(m+1)}{1.\qquad\quad 2.\qquad\quad \ldots\ldots\quad \alpha-1}$.

Ist z. B. ${}^6v$ herzustellen, so nimmt α die Werthe 1, 2, 3, 4 und 5 an, wodurc
ergibt:

$$\left\{-\frac{{}^6f}{({}^1f)^7}+\frac{7({}^2f\,{}^5f+{}^3f\,{}^4f)}{({}^1f)^8}-\frac{28\,(({}^2f)^2\,{}^4f+{}^2f({}^3f)^2)}{({}^1f)^9}+\frac{84\,({}^2f)^3\,{}^3f}{({}^1f)^{10}}-\frac{42\,({}^2f)^5}{({}^1f)^{11}}\right\}\varDelta u.$$

IV.

Hier ist auch $w=f(v)$ gegeben, aber auch noch $u=F(v)$, und gesucht wird:

$${}^m u=\frac{1}{m!}\frac{d^m u}{dw^m}\,\varDelta w^m,$$

wofür man findet:

$$\left\{\frac{{}^mF}{({}^1f)^m}+\sum\frac{(-1)^{\alpha}\binom{m+\alpha-1}{\alpha-1}\beta}{\alpha({}^1f)^{m+\alpha}}\;{}^{\beta}F\;\overset{m+\alpha-\beta}{\mathfrak{C}}\;({}^2f,{}^3f\ldots{}^mf)^{\alpha}\right\}\varDelta w^m.\ ^{*)}$$

---

*) Dafs diese Formel die vorige als speciellen Fall enthält und in dieselbe übergehen mufs, we ${}^1F=1$, ${}^2F={}^3F=\ldots={}^mF=0$ setzt, bedarf kaum der Erwähnung.

erstreckt sich die Summation auf die beiden Gröſsen α und β, welche die Werthe n:

$$\begin{array}{l} \alpha = 1 \text{ und } \beta = 1, 2, 3, \ldots (m-1) \\ \alpha = 2 \text{ und } \beta = 1, 2, 3, \ldots (m-2) \\ \alpha = 3 \text{ und } \beta = 1, 2, 3, \ldots (m-3) \\ \hline \alpha = (m-1) \text{ und } \beta = 1, \end{array}$$

$\alpha + \beta$ durchläuft alle Werthe von 2 bis m.

Beispielsweise sei der Ausdruck ${}^6u$ zu entwickeln. Man findet:

$$\left\{ \frac{{}^6F}{({}^1f)^6} - \frac{{}^1F\,{}^6f + 2\,{}^2F\,{}^5f + 3\,{}^3F\,{}^4f + 4\,{}^4F\,{}^3f + 5\,{}^5F\,{}^2f}{({}^1f)^7} + \right.$$

$$+ \frac{7\,{}^1F\,({}^2f\,{}^5f + {}^3f\,{}^4f) + 7\,{}^2F\,(2\,{}^2f\,{}^4f + ({}^3f)^2) + 21\,{}^3F\,({}^2f\,{}^3f) + 14\,{}^4F\,({}^2f)^2}{({}^1f)^8} -$$

$$- \frac{28\,{}^1F\,(({}^2f)^2\,{}^4f + {}^2f\,({}^3f)^2) + 56\,{}^2F\,(({}^2f)^2\,{}^3f) + 28\,{}^3F\,(({}^2f)^3)}{({}^1f)^9} +$$

$$\left. + \frac{84\,{}^1F\,(({}^2f)^3\,{}^3f) + 42\,{}^2F\,(({}^2f)^4)}{({}^1f)^{10}} - \frac{42\,{}^1F\,(({}^2f)^5)}{({}^1f)^{11}} \right\} \varDelta w^6.$$

V.

Hier ist $u = F(v_1, v_2, v_3, \ldots v_n)$; $v_1 = f_1(w_1)$, $v_2 = f_2(w_2)$, $v_3 = f_3(w_3) \ldots v_n = f_n(w_n)$.

findet ${}^mu = \dfrac{1}{m!} \left\{ \dfrac{d^m u}{C(dw_1, dw_2, dw_3, \ldots dw_n)^m} \right\} C(\varDelta w_1, \varDelta w_2, \varDelta w_3 \ldots \varDelta w_n)^m$, wo aber ler Combination der dw immer die gleiche der $\varDelta w$ gehört, und hiefür findet man:

$$\left\{ F(\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \alpha_3 v_3 \ldots \alpha_n v_n) P \overset{\beta_1}{C}(f_1)\alpha_1 . \overset{\beta_2}{C}(f_2)\alpha_2 . \overset{\beta_3}{C}(f_3)\alpha_3 \ldots \overset{\beta_n}{C}(f_n)\alpha_n \right\} C(\varDelta w_1, \varDelta w_2, \varDelta w_3 \ldots \varDelta w_n)^m.$$

Zum Verständniſs dieser Formel bemerke man:

1) Die Combinationen der $\varDelta w$ haben im Allgemeinen die Form

$$\varDelta w_1^{\beta_1}\ \varDelta w_2^{\beta_2} \ldots \varDelta w_n^{\beta_n},$$

wodurch die β für eine jede einzelne Combination besonders bestimmt sind, auch ist $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \beta_n = m$.

2) Die verschiedenen α nehmen ferner jedesmal alle mögliche Werthe an, gehen deſshalb von 1 bis zu dem Werthe des zugehörigen β; endlich ist auch:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_n.$$

3) Das P vor dem C deutet an, daſs vor jedes Product der verschiedenen f die Zahl, welche anzeigt, wie oft diese unter einander verstellbar sind, als Factor hinzuzusetzen ist.

Als Beispiel zur Erläuterung diene die Herstellung von ${}^6u$, dabei sei $u = F(v_1, {}^{\cdot}_{\cdot}$
$v_4)$ und $v_1 = f_1(w_1)$, $v_2 = f_2(w_2)$, $v_3 = f_3(w_3)$ und $v_4 = f_4(w_4)$.

Es ist hier $m = 6$ und $n = 4$ und es gibt nun $C\,(\varDelta w_1, \varDelta w_2, \varDelta w_3, \varDelta w_4)^6$ bel
lich 84 Combinationen, welche jedoch nur nachstehende 9 verschiedene Formen habe

$$a^6,\ a^5 b,\ a^4 b^2,\ a^4 b c,\ a^3 b^3,\ a^3 b^2 c,\ a^3 b c d,\ a^2 b^2 c^2,\ a^2 b^2 c d.$$

1) Zur ersten Form gehört $(\varDelta w_1)^6$; hier gibt es also nur ein C für die f_1 und β=
ebenso kommt in F nur das v_1 vor, aber dieses mit verschiedenen α, man erhält als b
mit $(\varDelta w_1)^6$ folgenden:

$$\Big\{ {}^1F({}^1v_1)\,{}^6f_1 + {}^2F({}^2v_1)\,(2\,{}^5f_1\,{}^1f_1 + 2\,{}^4f_1\,{}^2f_1 + ({}^3f_1)^2) + {}^3F({}^3v_1)\,(3\,{}^4f_1\,({}^1f_1)^2 + 6\,{}^3f_1\,{}^2f_1\,{}^1f_1 + ({}^2f_1$$
$$+ {}^4F({}^4v_1)\,(4\,{}^3f_1\,({}^1f_1)^3 + 6({}^2f_1)^2\,({}^1f_1)^2) + {}^5F({}^5v_1)\,(5\,{}^2f_1\,({}^1f_1)^4) + {}^6F({}^6v_1)\,({}^1f_1)^6 \Big\}\, \varDelta w_1$$

Ganz denselben Bau haben die 3 Posten mit $(\varDelta w_2)^6$, $(\varDelta w_3)^6$ und $(\varDelta w_4)^6$, nı
überall statt dem untern Index 1 der betreffende Index 2, 3 oder 4 zu setzen.
braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daſs dieses Resultat mit dem in I. zusammen

2) Zur zweiten Form gehört $(\varDelta w_1)^5\, \varDelta w_2$; hier gibt es also ein C für f_1 mit β=
und ein C für f_2 mit $\beta_2 = 1$ und man erhält daher als Posten mit $(\varDelta w_1)^5\, \varDelta w_2$:

$$\Big\{ {}^2F({}^1v_1, {}^1v_2)\,(2\,{}^5f_1\,{}^1f_2) + {}^3F({}^2v_1, {}^1v_2)\,(6\,{}^4f_1\,{}^1f_1\,{}^1f_2 + 6\,{}^3f_1\,{}^2f_1\,{}^1f_2) + {}^4F({}^3v_1, {}^1v_2)\,(12\,{}^3f_1\,({}^1f_1)\,f$$
$$+ 12({}^2f_1)^2\,{}^1f_1\,{}^1f_2) + {}^5F({}^4v_1, {}^1v_2)\,(20\,{}^2f_1\,({}^1f_1)^3\,{}^1f_2) + {}^6F({}^5v_1, {}^1v_2)\,(6({}^1f_1)^5\,{}^1f_2) \Big\}\, (\varDelta w_1$$

Ganz denselben Bau haben die 11 Posten mit: $(\varDelta w_1)^5\, \varDelta w_3$, $(\varDelta w_1)^5\, \varDelta w_4$, $(\varDelta w_2)$
$(\varDelta w_2)^5\, \varDelta w_3$, $(\varDelta w_2)^5\, \varDelta w_4$, $(\varDelta w_3)^5\, \varDelta w_1$, $(\varDelta w_3)^5\, \varDelta w_2$, $(\varDelta w_3)^5\, \varDelta w_4$, $(\varDelta w_4)^5\, \varDelta w_1$,
$\varDelta w_2$, $(\varDelta w_4)^5\, \varDelta w_3$, um sie selbst zu finden, braucht es blos eine schickliche Vertau
der untern Indices im Posten mit $(\varDelta w_1)^5\, \varDelta w_2$.

3) Zur dritten Form gehört $(\varDelta w_1)^4\, (\varDelta w_2)^2$; hier gibt es ein C für f_1 wo $\beta_1 =$
ein C für f_2 wo $\beta_2 = 2$ weſshalb man erhält:

$$\Big\{ {}^2F({}^1v_1, {}^1v_2)\,(2\,{}^4f_1\,{}^2f_2) + {}^3F({}^1v_1, {}^2v_2)\,(3\,{}^4f_1\,({}^1f_2)^2) + {}^3F({}^2v_1, {}^1v_2)\,(6\,{}^3f_1\,{}^1f_1\,{}^2f_2 + 3({}^2f_1)^2$$
$$+ {}^4F({}^2v_1, {}^2v_2)\,(12\,{}^3f_1\,{}^1f_1\,({}^1f_2)^2 + 6({}^2f_1)^2\,({}^1f_2)^2) + {}^4F({}^3v_1, {}^1v_2)\,(12\,{}^2f_1\,({}^1f_1)^2$$
$$+ {}^5F({}^3v_1, {}^2v_2)(30\,{}^2f_1\,({}^1f_1)^2({}^1f_2)^2) + {}^5F({}^4v_1, {}^1v_2)(5({}^1f_1)^4\,{}^2f_2) + {}^6F({}^4v_1, {}^2v_2)(15({}^1f_1)^4({}^1f_2)^2) \Big\}\, \varDelta w_1$$

Diese Zusammensetzung haben auch die 11 Posten mit: $(\varDelta w_1)^4\, (\varDelta w_3)^2$, $(\varDelta w_1)^4$
$(\varDelta w_2)^4\, (\varDelta w_1)^2$, $(\varDelta w_2)^4\, (\varDelta w_3)^2$, $(\varDelta w_2)^4\, (\varDelta w_4)^2$, $(\varDelta w_3)^4\, (\varDelta w_1)^2$, $(\varDelta w_3)^4\, (\varDelta w_2)^2$, $(\varDelta w_3)^4$
$(\varDelta w_4)^4\, (\varDelta w_1)^2$, $(\varDelta w_4)^4\, (\varDelta w_2)^2$, $(\varDelta w_4)^4\, (\varDelta w_3)^2$, und um sie selbst zu finden, hat ma
wieder die untern Indices in gehöriger Weise zu vertauschen.

4) Zur vierten Form gehört $(\varDelta w_1)^4\, \varDelta w_2\, \varDelta w_3$; hier hat man das C aus den
$\beta_1 = 4$, das C aus den f_2 und $\beta_2 = 1$ und das C aus den f_3 und $\beta_3 = 1$ wd
man erhält:

$$\Big\{ {}^3F({}^1v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)\,(6\,{}^4f_1\,{}^1f_2\,{}^1f_3) + {}^4F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)\,(24\,{}^3f_1\,{}^1f_1\,{}^1f_2\,{}^1f_3 + 12({}^2f_1)^2\,{}^1f_2$$
$$+ {}^5F({}^3v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)\,(60\,{}^2f_1\,({}^1f_1)^2\,{}^1f_2\,{}^1f_3) + {}^6F({}^4v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)\,(30({}^1f_1)^4\,{}^1f_2\,{}^1f_3) \Big\}\, \varDelta w_1{}^4\, \varDelta$$

Dieselbige Zusammensetzung haben auch die 11 Posten mit $(\varDelta w_1)^4\ \varDelta w_2\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_1)^4$ $\varDelta w_4$, $(\varDelta w_2)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_3$, $(\varDelta w_2)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_2)^4\ \varDelta w_3\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_3)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_2$, $(\varDelta w_3)^4$ $\varDelta w_4$, $(\varDelta w_3)^4\ \varDelta w_2\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_4)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_2$, $(\varDelta w_4)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_3$, $(\varDelta w_4)^4\ \varDelta w_2\ \varDelta w_3$, und ind somit selbst durch gehörige Vertauschung der untern Indices leicht aus dem Posten $(\varDelta w_1)^4\ \varDelta w_2\ \varDelta w_3$ zu finden.

5) Als Posten der fünften Form hat man den mit $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_2)^3$; hier gibt es ein C f_1 und $\beta_1 = 3$ und ein C der f_2 und $\beta_2 = 3$, und man erhält:

$$\ldots({}^1v_1, {}^1v_2)(2\,{}^3f_1\,{}^3f_2) + {}^3F({}^1v_1, {}^2v_2)(6\,{}^3f_1\,{}^2f_2\,{}^1f_2) + {}^3F({}^2v_1, {}^1v_2)(6\,{}^2f_1\,{}^1f_1\,{}^3f_2) + {}^4F({}^1v_1, {}^3v_2)(4\,{}^3f_1({}^1f_2)^3) +$$
$$+ {}^4F({}^2v_1, {}^2v_2)(24\,{}^2f_1\,{}^1f_1\,{}^2f_2\,{}^1f_2) + {}^4F({}^3v_1, {}^1v_2)(4({}^1f_1)^3\,{}^3f_2) + {}^5F({}^2v_1, {}^3v_2)(20\,{}^2f_1\,{}^1f_1({}^1f_2)^3) +$$
$${}^5F({}^3v_1, {}^2v_2)(20({}^1f_1)^3\,{}^2f_2\,{}^1f_2) + {}^6F({}^3v_1, {}^3v_2)(20({}^1f_1)^3({}^1f_2)^3)\Big\}(\varDelta w_1)^3(\varDelta w_2)^3.$$

Auf ganz ähnliche Weise sind alle übrigen 5 Posten dieser Form, nämlich die mit $\ldots)^3\ (\varDelta_3)^3$, $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_4)^3$, $(\varDelta w_2)^3\ (\varDelta w_3)^3$, $(\varDelta w_2)^3\ (\varDelta w_4)^3$ und $(\varDelta w_3)^3\ (\varDelta w_4)^4$ zusammen …t, und man findet sie aus dem aufgestellten durch Vertauschung der untern Indices.

6) Als Posten der sechsten Form hat man den mit $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_2)^2\ \varDelta w_3$, hier ist $\ldots 3$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 1$, und die übrigen $\beta = 0$. Also gibt es:

$$\ldots({}^1v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)(6\,{}^3f_1\,{}^2f_2\,{}^1f_3) + {}^4F({}^1v_1, {}^2v_2, {}^1v_3)(12\,{}^3f_1({}^1f_2)^2\,{}^1f_3) + {}^4F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)(24\,{}^2f_1\,{}^1f_1\,{}^2f_2\,{}^1f_3) +$$
$$+ {}^5F({}^2v_1, {}^2v_2, {}^1v_3)(60\,{}^2f_1\,{}^1f_1({}^1f_2)^2\,{}^1f_3) + {}^5F({}^3v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)(20({}^1f_1)^3\,{}^2f_2\,{}^1f_3) +$$
$$+ {}^6F({}^3v_1, {}^2v_2, {}^1v_3)(60({}^1f_1)^3({}^1f_2)^2\,{}^1f_3)\Big\}(\varDelta w_1)^3(\varDelta w_2)^2\,\varDelta w_3.$$

Ganz gleiche Zusammensetzung haben auch die 23 Posten mit $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_2)^2\ \varDelta w_4$, $\ldots\ (\varDelta w_3)^2\ \varDelta w_2$, $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_3)^2\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_4)^2\ \varDelta w_2$, $(\varDelta w_1)^3\ (\varDelta w_4)^2\ \varDelta w_3$, $(\varDelta w_2)^3$ $\varDelta w_3$, $(\varDelta w_2)^3\ (\varDelta w_1)^2\ \varDelta w_4$ u. s. f., welche man ebenfalls durch Vertauschung der … Indices aus dem Posten, den wir so eben entwickelten, findet.

…) Als Posten der siebenten Form hat man den mit $(\varDelta w_1)^3\ \varDelta w_2\ \varDelta w_3\ \varDelta w_4$, hier ist $\ldots = 3$, $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$, und die übrigen $\beta = 0$. Also erhält man:

$$\ldots({}^1v_1, {}^1v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)(24\,{}^3f_1\,{}^1f_2\,{}^1f_3\,{}^1f_4) + {}^5F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)(120\,{}^2f_1\,{}^1f_1\,{}^1f_2\,{}^1f_3\,{}^1f_4) +$$
$$+ {}^6F({}^3v_1, {}^1v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)(120({}^1f_1)^3\,{}^1f_2\,{}^1f_3\,{}^1f_4)\Big\}\varDelta w_1{}^3\,\varDelta w_2\,\varDelta w_3\,\varDelta w_4,$$

…nz gleiche Zusammensetzung haben die 3 Posten mit $(\varDelta w_2)^3\ \varDelta w_1\ \varDelta w_3\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_3)^3$ $\varDelta w_2\ \varDelta w_4$, $(\varDelta w_4)^4\ \varDelta w_1\ \varDelta w_2\ \varDelta w_3$.

…) Als Posten der achten Form hat man den mit $(\varDelta w_1)^2\ (\varDelta w_2)^2\ (\varDelta w_3)^2$, hier ist $\ldots = \beta_2 = \beta_3 = 2$ und alle übrigen $\beta = 0$. Deſshalb bekommt man:

$$\ldots({}^1v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)(6\,{}^2f_1\,{}^2f_2\,{}^2f_3) + {}^4F({}^1v_1, {}^1v_2, {}^2v_3)(12\,{}^2f_1\,{}^2f_2({}^1f_3)^2) + {}^4F({}^1v_1, {}^2v_2, {}^1v_3)(12\,{}^2f_1({}^1f_2)^2\,{}^2f_3) +$$
$$+ {}^4F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^1v_3)(12({}^1f_1)^2\,{}^2f_2\,{}^2f_3) + {}^5F({}^1v_1, {}^2v_2, {}^2v_3)(30\,{}^2f_1({}^1f_2)^2({}^1f_3)^2) +$$
$$+ {}^5F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^2v_3)(30({}^1f_1)^2\,{}^2f_2({}^1f_3)^2) + {}^5F({}^2v_1, {}^2v_2, {}^1v_3)(30({}^1f_1)^2({}^1f_2)^2\,{}^2f_3) +$$
$$+ {}^6F({}^2v_1, {}^2v_2, {}^2v_3)(90({}^1f_1)^2({}^1f_2)^2({}^1f_3)^2)\Big\}(\varDelta w_1)^2(\varDelta w_2)^2(\varDelta w_3)^2.$$

Ganz dieselbe Zusammensetzung haben die übrigen 3 Posten mit $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_2)^2\ (\Delta$ $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_3)^2\ (\Delta w_4)^2$ und $(\Delta w_2)^2\ (\Delta w_3)^2\ (\Delta w_4)^2$.

9) Als Posten der letzten Form hat man den mit $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_2)^2\ \Delta w_3\ \Delta w_4$. Hi $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\beta_2 = \beta_4 = 1$ und die übrigen $\beta = 0$. Man findet:

$$\Big\{ {}^4F({}^1v_1, {}^1v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)\,(24\,{}^2f_1\,{}^2f_2\,{}^1f_3\,{}^1f_4) + {}^5F({}^1v_1, {}^2v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)\,(60\,{}^2f_1\,({}^1f_2)^2\,{}^1f_3\,{}^1f$$
$$+ {}^5F({}^2v_1, {}^1v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)\,(60\,({}^1f_1)^2\,{}^2f_2\,{}^1f_3\,{}^1f_4) +$$
$$+ {}^6F({}^2v_1, {}^2v_2, {}^1v_3, {}^1v_4)\,180\,({}^1f_1)^2\,({}^1f_2)^2\,{}^1f_3\,{}^1f_4)\Big\}\,(\Delta w_1)^2\,(\Delta w_2)^2\,\Delta w_3$$

Und aus diesem Posten findet man leicht durch einfache schickliche Vertauschun untern Indices die Posten mit derselbigen Form, nämlich die 5 mit $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_3)^2\ \Delta w_2$ $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_4)^2\ \Delta w_2\ \Delta w_3$, $(\Delta w_2)^2\ (\Delta w_3)^2\ \Delta w_1\ \Delta w_4$, $(\Delta w_2)^2\ (\Delta w_4)^2\ \Delta w_1\ \Delta w_3$ und $($ $(\Delta w_4)^2\ \Delta w_1\ \Delta w_2$.

VI.

Hier ist

$$u = F(v);\ v = f(w_1, w_2, w_3 \ldots w_n) \text{ und für}$$

$${}^m u = \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m u}{C(dw_1, dw_2, dw_3 \ldots dw_n)^m}\right\} C(\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3 \ldots \Delta w_n),$$

wo aber zu jeder Combination der dw immer die gleiche der Δw zu stellen ist, findet

$$\sum {}^\alpha F\ \overset{m}{C}\,(f\{\})\ {}^\alpha C(\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3 \ldots \Delta w_n)^m.$$

Die Combinationen der Δw, welche die in V. angegebene Form haben, werd erst hergestellt. Die Gröſse α erhält alle Werthe von 1 bis m. Hinter ein jedes f men in die Klammern $\{\}$ eben so viele w als der Ableitungsexponent Einheiten hat zwar so gruppirt, daſs die w aller f ein und derselben Combination immer für si nämliche Gruppe bilden, wie die Δw. —

Beispielsweise sei gegeben $u = F(v)$ und $v = f(w_1, w_2, w_3, w_4)$ und es s ${}^6u$ wenigstens der Ausdruck hergestellt werden, welcher zur $\Delta w =$ Gruppe gehö sich unter der Form $(\Delta w_1)^2\ (\Delta w_2)^2\ \Delta w_3\ \Delta w_4$ präsentirt. Man findet dann hiefür:

$${}^1F(v)\,({}^6f({}^2w_1, {}^2w_2, w_3, w_4)) +$$
$$+ {}^2F(v)\,(2\,{}^5f({}^2w_1, {}^2w_2, w_3)\,{}^1f(w_4) + 2\,{}^5f({}^2w_1, {}^2w_2, w_4)\,{}^1f(w_3) + 2\,{}^5f({}^2w_1, w_2, w_3, w_4)\,{}^1f$$
$$+ 2\,{}^5f(w_1, {}^2w_2, w_3, w_4)\,{}^1f(w_1) + 2\,{}^4f({}^2w_1, {}^2w_2)\,{}^2f(w_3, w_4) + 2\,{}^4f({}^2w_1, w_2, w_3)\,{}^2f(w_2,$$
$$+ 2\,{}^4f({}^2w_1, w_2, w_4)\,{}^2f(w_2, w_3) + 2\,{}^4f({}^2w_1, w_3, w_4)\,{}^2f({}^2w_2) + 2\,{}^4f(w_1, {}^2w_2, w_3)\,{}^2f(w_1,$$
$$+ 2\,{}^4f(w_1, {}^2w_2, w_4)\,{}^2f(w_1, w_3) + 2\,{}^4f(w_1, w_2, w_3, w_4)\,{}^2f(w_1, w_2) + 2\,{}^4f({}^2w_2, w_3, w_4)\,{}^2f($$
$$+ 2\,{}^3f({}^2w_1, w_2)\,{}^3f(w_2, w_3, w_4) + 2\,{}^3f({}^2w_1, w_3)\,{}^3f({}^2w_2, w_4) + 2\,{}^3f({}^2w_1, w_4)\,{}^3f({}^2w_2,$$
$$+ 2\,{}^3f(w_1, {}^2w_2)\,{}^3f(w_1, w_3, w_4) + 2\,{}^3f(w_1, w_2, w_3)\,{}^3f(w_1, w_2, w_4)) +$$

$$(v)\big(6\,{}^4f({}^2w_1,{}^2w_2)\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+6\,{}^4f({}^2w_1,w_2,w_3)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_4)+6\,{}^4f({}^2w_1,w_2,w_4)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)+$$
$$+3\,{}^4f({}^2w_1,w_3,w_4)\,({}^1f(w_2))^2+6\,{}^4f(w_1,{}^2w_2,w_3)\,{}^1f(w_1)\,{}^1fw_4+6\,{}^4f(w_1,{}^2w_2,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_3)+$$
$$+6\,{}^4f(w_1,w_2,w_3,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)+3\,{}^4f({}^2w_2,w_3,w_4)\,({}^1f(w_1))^2+6\,{}^3f({}^2w_1,w_2)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+6\,{}^3f({}^2w_1,w_2)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_3)+6\,{}^3f({}^2w_1,w_2)\,{}^2f(w_3,w_4)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f({}^2w_1,w_3)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+6\,{}^3f({}^2w_1,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f({}^2w_1,w_4)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_3)+6\,{}^3f({}^2w_1,w_4)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_2)+$$
$$+6\,{}^3f(w_1,{}^2w_2)\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^1f(w_4)+6\,{}^3f(w_1,{}^2w_2)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^1f(w_3)+6\,{}^3f(w_1,{}^2w_2)\,{}^2f(w_3,w_4)\,{}^1f(w_1)+$$
$$+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_3)\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^1f(w_4)+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_3)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_1)+$$
$$+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_4)\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^1f(w_3)+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_4)\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f(w_1,w_2,w_4)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_1)+$$
$$+6\,{}^3f(w_1,w_3,w_4)\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f(w_1,w_3,w_4)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_1)+6\,{}^3f({}^2w_2,w_3)\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+6\,{}^3f({}^2w_2,w_3)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^1f(w_1)+6\,{}^3f({}^2w_2,w_4)\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^1f(w_3)+6\,{}^3f({}^2w_2,w_4)\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^1f(w_1)+$$
$$+6\,{}^3f(w_2,w_3,w_4)\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^1f(w_2)+6\,{}^3f(w_2,w_3,w_4)\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^1f(w_1)+6\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^2f(w_3,w_4)+$$
$$+6\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)+3\,({}^2f(w_1,w_2))^2\,{}^2f(w_3,w_4)+6\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)+$$
$$+6\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^2f(w_2,w_3)+6\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^2f({}^2w_2)\big)+$$

$$)\big(24\,{}^3f({}^2w_1,w_2)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+12\,{}^3f({}^2w_1,w_3)\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_4)+12\,{}^3f({}^2w_1,w_4)\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_3)+$$
$$+24\,{}^3f(w_1,{}^2w_2)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w)_4+24\,{}^3f(w_1,w_2,w_3)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+24\,{}^3f(w_1,w_2,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)+12\,{}^3f(w_1,w_3,w_4)\,{}^1f(w_1)\,({}^1f(w_2))^2+$$
$$+12\,{}^3f({}^2w_2,w_3)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_4)+12\,{}^3f(w_2,w_3,w_4)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_2)+$$
$$+12\,{}^3f({}^2w_2,w_4)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_3)+24\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+24\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+24\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)+12\,{}^2f({}^2w_1)\,{}^2f(w_3,w_4)\,({}^1f(w_2))^2+12\,({}^2f(w_1,w_2))^2\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+24\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_4)+24\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)+$$
$$+24\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_4)+24\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_3)+$$
$$+24\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^2f(w_3,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)+12\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^2f(w_1,w_4)\,({}^1f(w_2))^2+$$
$$+24\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_4)+24\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)+$$
$$+24\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_3)+24\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)+$$
$$+12\,{}^2f({}^2w_2)\,{}^2f(w_3,w_4)\,({}^1f(w_1))^2+12\,{}^2f(w_2,w_3)\,{}^2f(w_2,w_4)\,({}^1f(w_1))^2\big)+$$

$$v)\big(60\,{}^2f({}^2w_1)\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+120\,{}^2f(w_1,w_2)\,{}^1f(w_1)\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+60\,{}^2f(w_1,w_3)\,{}^1f(w_1)\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_4)+60\,{}^2f(w_1,w_4)\,{}^1f(w_1)\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_3)+$$
$$+60\,{}^2f({}^2w_2)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)+60\,{}^2f(w_2,w_3)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_4)+$$
$$+60\,{}^2f(w_2,w_4)\,({}^1f(w_1))^2\,{}^1f(w_2)\,{}^1f(w_3)+30\,{}^2f(w_3,w_4)\,({}^1f(w_1))^2\,({}^1f(w_2))^2\big)+$$

$$v)\big(180\,({}^1f(w_1))^2\,({}^1f(w_2))^2\,{}^1f(w_3)\,{}^1f(w_4)\big).\ —$$

Jahresbericht

über die

chnischen und landwirthschaftlichen

Lehranstalten

in Nürnberg

bekannt gemacht

am Schlusse des Schuljahres 1858|59.

Nürnberg.

Druck von Fr. Campe & Sohn.

technischen und landwirthschaftlichen Lehranstalten zu Nürnberg haben zur Aufgabe, denje-
Knaben und Jünglingen, die theils in Rücksicht auf einen gewerblichen oder landwirth-
lichen Beruf, theils zum Behuf einer höhern technischen Ausbildung technische Kenntnisse und
keiten zu erwerben haben, den hiezu nöthigen Unterricht von den ersten Elementen an bis
m zum Uebergange auf die Universität erforderlichen Bildungsgrad zu ertheilen.

Ihre diesem Zwecke gemäße Gliederung ist folgende:

I. Die Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule.

a) Landwirthschaftliche Abtheilung.

tanstalt:	1) Die Kreis-Landwirthschaftsschule mit Schülern	67
anstalten:	2) Die Ackerbauschule mit Schülern	18
	3) Die Vorbereitungsschule mit Schülern	12
	4) Praktischer Curs mit Schülern	4

b) Gewerbliche Abtheilung.

tanstalt:	1) Die Kreis-Gewerbsschule mit Schülern	161
	mit Hospitanten	17
anstalten:	2) Die Elementar-Zeichnungsschule mit Schülern	255
	3) Die Sonntags-Handwerkerschule mit Schülern	1641

II. Die polytechnische Schule.

llständige Eleven	64
ospitanten	26
Schüler und Hospitanten	2265

Bericht über die einzelnen Anstalten.

I. Die Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschul

A. Vorstand und Lehrerpersonale.

Rektor: Professor Dr. Heinrich Rose.

Lehrerpersonale.

a) Landwirthschaftliche Abtheilung.

Inspector: Herr Dr. J. C. Kellermann.

Herr C. Engel, Oekonomieverwalter, für praktische Landwirthschaft.
" Feldkirchner, Pfarrer, für die protestantische Religionslehre.
" Dr. J. C. Kellermann, für landwirthschaftliche Betriebslehre und Geometrie.
" Joh. Gottl. Kellermann jun., für deutsche Sprache, Geographie und Arithmetik.
" Stadtkaplan Schmitt, für die katholische Religionslehre.
" Dr. Heinrich Weger, für Naturgeschichte, Physik, Chemie und Technologie.
" Andreas Firsching, Lehramts-Verweser, für theoretische Landwirthschaft und Botan

Assistenten:

Herr Carl Fick, für Landwirthschaft, gemeinnützige Kenntnisse und Zeichnen, bis Juni; d
Herr Johann Them.
" Gottlieb Huber, für Realien und Schönschreiben.

b) Gewerbliche Abtheilung.

Kreis-Gewerbsschule.

Herr Leonhard Dengler, Lehramts-Verweser, für deutsche Sprache im ersten und zweiten
" Dr. A. Flegler, Professor, für Geographie, Geschichte und deutsche Sprache.
" Carl Heller, für Gewerbeplastik.
" Franz Henning, Stadtkaplan, für die katholische Religionslehre.
" Fr. Aug. Klingenfeld, Professor, für darstellende Geometrie und Mechanik.
" Leonhard Marx, für Arithmetik, Geometrie und Geographie.
" Fr. Carl Mayer, für Ornamentenzeichnen.
Rektor Dr. Heinrich Rose, für Mathematik.
Herr Joh. Matthias Rosenschon, für französische Sprache.
" Karl Rüdel, Pfarrer, für die protestantische Religionslehre.
" Dr. Karl Stölzel, für Physik, Chemie, Mineralogie und Gewerbskunde.
" Dr. Heinrich Weger, für Zoologie und Botanik.
" Joh. Georg Wolff, für Ornamenten- und Linearzeichnen.

Assistenten:

Lehramts-Candidat Anton Faist, für Mathematik.
Lehramts-Candidat Hagen, für Mathematik.

Elementar-Zeichnungsschule.

Joh. Georg Christian Rosée, Kupferstecher.
Joh. Matth. Rosenschon, Maler.

Sonntags-Handwerkerschule.

Lehramts-Verweser Dengler, für Arithmetik.
J. G. Kellermann jun., für Arithmetik.
Anton Faist, für Arithmetik.
Leonhard Marr, für Geometrie.
Professor Dr. Weiß, für Physik.
Assistent Hagen, für Chemie.
Herren Fr. Carl Mayer, Carl Gottlieb Möbius, Felix Grünewald, Joh. Georg Christian Rosée, Joh. Matth. Rosenschon, Franz Xaver Ziegler, Hermann Kellner, Johann Maar und Eberlein, für Ornamenten- und Linearzeichnen.
Carl Heller, für Bossiren und Modelliren.

B. Der Unterricht.

a) Landwirthschaftliche Abtheilung.

1. Die Kreis-Landwirthschaftsschule.

Die Kreis-Landwirthschaftsschule, verbunden mit der landwirthschaftlichen Erziehungs-Anstalt ..tenhof, hat zum Zweck, durch Erziehung und durch theoretischen sowohl, als praktischen ..cht in der Landwirthschaft und deren Hülfswissenschaften jungen Leuten Gelegenheit zu ..n theils für eine dereinstige selbstständige Bewirthschaftung oder Verwaltung, Pachtung kleiner ..ittelgroßer Oekonomiegüter mit intensiver Wirthschaft sich auszubilden, theils auch zum ..itt an eine höhere landwirthschaftliche Lehranstalt oder an die Central-Thierarzneischule zu ..en sich vorzubereiten.

Der Unterricht vertheilt sich in folgender Weise:

Erster Curs.

..igionsunterricht: a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Pfar..e Feldkirchner.

Erläuterung des Dekalogs und des apostolischen Symbolums.

..) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Schmitt.

α) Die Lehren vom Glauben, der Nothwendigkeit und den Eigenschaften des Glaubens überhaupt und die zwölf Glaubensartikel insbesondere wurden nach dem Diözesankatechismus memorirt und erklärt.

β) Nach der Bibel von Jean Paul Mathias wurden cursorisch genommen: die G
des alten und das Einschlägige des neuen Bundes.

2) Theoretische Landwirthschaft, wöchentlich 5 Stunden. Lehrer: Verweser A. Fir
Agronomie: Allgemeine Eigenschaften des Bodens. Eintheilung der Bodenarter verschiedene Verhalten der einzelnen Bodenarten zu Feuchtigkeit, Wärme, Gewicht un ger. Ertragsfähigkeit und Werth derselben. Mittel, das nachtheilige Verhalten des zu verbessern. Ackerkrume und Untergrund. Enge Beziehung beider zu einander. der örtlichen Lage auf die Eigenschaften des Bodens. Verschiedene Klassifikationen de
Agrikultur: Ordnung der verschiedenen Bodenarten und Urbarmachung derselben der Bodenbearbeitung; großer Werth einer richtigen Bearbeitung. Die verschiedenen A Bodenbearbeitung; zweckmäßigste Art der Ausführung.
Geräthekunde: Beschreibung und Anwendung der wichtigsten landwirthschaftlich räthe zur Bearbeitung des Bodens mit der Hand und mit Gespann: Spaten, Drai zeuge, Hauen, Häufel- und Hackenpflüge, Schäufel- und Rührpflüge, Schneideeggen, Walzen und Schleifen. Bespannung der Zugthiere. Wagen, Karren, Schlitten, M Wesentlich nach Dr. Fraas Schule des Landbaues.

3) Praktische Landwirthschaft. — Wie beim dritten Curs näher dargelegt ist.

4) Naturgeschichte, wöchentlich 5 Stunden.
a) Zoologie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Dr. Heinrich Weger.
Aufgabe und Nutzen der Naturgeschichte für die Landwirthschaft. Die Naturreic sentliche Kennzeichen der Thiere. Eintheilung des Thierreichs. Anatomisch-physi Erklärung des Bewegungs-, Empfindungs-, Ernährungs- und Fortpflanzungs-S Allgemeine und besondere Beschreibung der Säugethiere, Vögel, Reptilien, Fis Gliederthiere und Schleimthiere, wobei die landwirthschaftlich-wichtigen Thiere b Berücksichtigung fanden. — Nach Leunis, Leitfaden der Naturgeschichte.
b) Botanik, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: A. Firsching.
α) Allgemeine Botanik. Charakteristische Eigenschaften der Pflanzen im Gege den übrigen Naturkörpern. Die Pflanzenorgane und zwar: Elementarorga len, Gefäße, Zellgewebe, Bau der Oberhaut), Ernährungsorgane (Wurzel, und Blätter mit ihren morphologischen Unterschieden), Vermehrungsorgane beln, Knollen, Schößlinge und Stecklinge) und Fortpflanzungsorgane (theile und Frucht).
β) Spezielle Botanik. Klassifikation der Pflanzen nach Linnè. Beschreibung die Landwirthschaft wichtigen Gewächse. Nach Leunis analytischem Leitfaden turgeschichte.
Vorzeigung von Exemplaren, Excursionen und der zur Anstalt gehörige b Garten, sowie das Versuchsfeld dienten zur Erläuterung des Vorgetragenen.

5) Arithmetik, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.
Numeriren. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen. Die Theilba Zahlen. Lehre von den gemeinen und Decimalbrüchen. Verhältnisse und Prop Geschäftsrechnungen. Kopfrechnen.

6) Deutsche Sprache, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.
Wort- und Satzlehre. Orthographische Uebungen. Stylübungen. Uebung im Le

eographie, wöchentlich 2 Stunden Lehrer: Gottlieb Kellermann.
Beschreibung Bayerns und Deutschlands. Uebersichtliche Behandlung der fünf Erdtheile. as Nothwendigste aus der mathematischen Geographie.

ichnen, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J. Them.
Freihandzeichnen von geraden und Bogen-Linien und einfachen landwirthschaftlichen Ge- then.

hönschreiben, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Assistent G. Huber.
Uebung der Current- und Lateinschrift.

Zweiter Curs.

ligionsunterricht: a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Pfar- Feldkirchner.
Erklärung des II. bis VI. Hauptstücks nach Dr. Luther's kleinem Katechismus.

Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Schmitt.

α) Das zweite Hauptstück: „Von den Geboten überhaupt und den zehn Geboten insbesondere“ memorirt und erklärt.

β) Cursorisch die sämmtlichen Geschichten des neuen Bundes.

eoretische Landwirthschaft, wöchentlich 7 Stunden. Lehrer: Verweser A. Firsching.
Düngerlehre. Wichtigkeit des Düngers. Wirkung desselben. Mineralischer, Pflanzen- Thierdünger. Compostbereitung. Hoher Werth der Jauche. Zweckmäßige Anlegung der ngstätte. Behandlung des Düngers im Stalle, auf der Dungstätte und auf dem Felde. richtung des Stalles nach der Art des zu bereitenden Düngers. Pferch. Brache.
Allgemeiner Pflanzenbau. Verbreitung der landwirthschaftlichen Nutzpflanzen. Ein- l des Bodens darauf. Eintheilung der Nutzpflanzen. Saat. Zerstörung des Unkrauts Vorbereitung des Bodens zur Saat. Pflege der Pflanzen. Ernte. Entkörnung. Auf- ahrung der verschiedenen Früchte, sowohl im Freien, als unter Dach.
Spezieller Pflanzenbau. Anbau der Getreidefrüchte, Hülsenfrüchte, der Wurzel- und llengewächse, der Fabrik- und Handelspflanzen. Wiesenbau. Wiesenpflege. Drainage. verschiedenen Bewässerungsarten. Düngung der Wiesen. Wiesenernte. Braunheube- ung. Weiden und künstliche Wiesen (Kleegrasfelder). Die übrigen Futterstoffe, die bei ommender Futternoth aushelfen können. Obstbaumzucht: Aufzucht, Veredlung, Verpflan- z und weitere Pflege der Obstbäume. Nach Dr. Fraas Schule des Landbaues.

iktische Landwirthschaft. Wie beim dritten Curs näher dargelegt ist.

urlehre, wöchentlich 5 Stunden. Lehrer: Dr. Heinrich Weger.
Physik. Aufgabe und Nutzen der Physik. — Allgemeine Eigenschaften der Körper, Aggregatzustand, Cohäsion, Adhäsion. Gewicht und Maß. Bewegung und Gleichgewicht. Mechanik der festen Körper, Fundamental-Maschinen. Hydrostatik, Aërostatik, Pumpen, Luftballon, Bestimmung des specifischen Gewichtes mit Hülfe des Archimedischen Principes. Luftdruck und Barometer. Wellenbewegungen. Akustik. Wärmelehre. Quellen und Leiter der Wärme. Verbreitung der Wärme durch Strahlung und Strömung. Ausdehnung er Körper. Thermometer. Aenderung des Aggregatzustandes. Dampfmaschinen. Freie

und gebundene Wärme. Verbreitung der Wärme auf der Erdoberfläche. Klima,
und wässerige Ausscheidung der Luft. Hygrometer. Gewitter. — Nach Müllers (
riß der Physik.

b) Chemie. Einleitung. Begriff und Eintheilung der Elemente. Verbindungen
und höherer Grade, Basen, Säuren, Salze. — Chemische Verwandtschaft. Ele
mische Theorie. Die Aequivalentzahlen und ihre Gesetze (Stöchiometrie). Die wic
chemischen Operationen und Prozesse auf trocknem und nassem Wege. — Die Me
unter specieller Beschreibung ihres Vorkommens, der Darstellung, der Eigenschaft
Verbindungsweisen und technischen Anwendung.

Physikalische und chemische Experimente unterstützten den Unterricht.

5) Arithmetik, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.

Wiederholung der Lehre von den gemeinen und Decimalbrüchen, von den Verhä
und Proportionen. Die vier Grundrechnungsarten mit unbestimmten Zahlen. Zusam
setzte Regel de tri in ihrer Anwendung auf die verschiedenen Rechnungsfälle des Ge
lebens.

6) Geometrie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Dr. Kellermann.

Einleitung. Winkel, Parallelen. Dreieck, Viereck. Flächenberechnungen. Nach Dr.
Lehrbuch der ebenen Geometrie.

7) Deutsche Sprache, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.

Der einfache und zusammengezogene Satz. Satzverbindung und Satzgefüge. Perio
Stylübungen. Memoriren von Gedichten und Analysiren von Stylstücken.

8) Zeichnen, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J.

Freihandzeichnen landwirthschaftlicher Geräthe. Linearzeichnen. Zusamme
gen von Bogen- und geraden Linien. Anfangsgründe und Uebungen im Zeichnen vo
wirthschaftlichen Bauplänen und Werkzeugen.

Dritter Curs.

1) Religionsunterricht: a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden.
Pfarrer Feldkirchner.

Dr. Luther's kleiner Katechismus ganz, mit besonderer Betonung der Christolog
Eschatologie.

b) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Schmitt.

α) Das dritte Hauptstück. Von der Gnade und den Gnadenmitteln nach dem Dehare
Katechismus memorirt und erklärt.

β) Cursorisch die 12 ersten Kapitel von Rippels Erklärung der kirchlichen Cerem

2) Theoretische Landwirthschaft.

a) Thierproduktionslehre, wöchentlich 4 Stunden Lehrer: Verweser: A. Firs

Allgemeine Thierproduktionslehre: Grün-, Trocken-, Wurzel- und Körn
Verwerthung der Abfälle von den landwirthschaftlichen Gewerben. Zubereitung d
rungsmittel. Vergleichende Zusammenstellung der verschiedenen Futtermittel.
Wie viel Nahrung das Thier braucht.

Spezielle Thierproduktionslehre: Rindviehzucht, Pferdezucht, Schafzuc
Wollkunde, Schweinezucht, Ziegenzucht, Geflügelzucht. Die verschiedenen besserenh

thier-Racen, Stämme und Schläge mit besonderer Berücksichtigung der in Bayern vorkommenden.

Nach Dr. Fraas Schule des Landbaues.

) Landwirthschaftliche Betriebslehre, wöchentlich 5 Stunden. Lehrer: Dr. Kellermann.

Die landwirthschaftliche Betriebslehre im engern Sinn: Die Lehre vom Landgut, von dem in der Landwirthschaft angelegten Kapitale, von der landwirthschaftlichen Arbeit, von den Feldsystemen. Die Lehre von den landwirthschaftlichen Berechnungen. — Nach Dr. Fraas Schule des Landbaues und nach eigenem Hefte.

raktische Landwirthschaft, nach den verschiedenen Jahreszeiten und Beschäftigungen, ichentlich 12—30 Stunden.

Dieser Unterricht erstreckte sich auf fast alle Theile der Landwirthschaft. Ohne erhebliche eihülfe von Lohnarbeitern wurde durch die Eleven der Anstalt, unter Anweisung des kgl. Inctors Dr. Kellermann, des Lehrers der praktischen Landwirthschaft, Oekonomie-Verwalters Engel, des Verwesers A. Firsching, des Lehrers Kellermann jun. und der Assistenten ck und Huber, die Gesammt-Oekonomie, welche aus circa 161 Tagwerk Acker-, Garten- d Wiesenland, sowie trocken gelegten Weihern besteht und einen Viehstand von 32 Stück ndvieh und einigen Pferden enthält, bewirthschaftet, und die Eleven erhielten Unterricht in : Verbesserung des Bodens durch mechanische und chemische Mittel, in der Beurbarung ajolen und Entwässern) öder Gründe, in der Kultur der verschiedenen Getreidearten, Hackchte, Futterkräuter, des Tabaks, Hopfens, im Anbau neuer landw. Gewächse auf Aeckern, f dem bedeutend erweiterten Versuchsfelde und im botanischen Garten, in der Wart und lege des Viehes, in der Bienen- und Geflügelzucht, in der Milchwirthschaft, in der Anwenng und Führung der verbesserten Ackerwerkzeuge, in der Obstbaumzucht und im Obst- und müsebau. Excursionen.

emie, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Dr. Heinrich Weger.

a Reine Chemie. Die Metalloide und ihre unorganischen Verbindungen. Die Metalle und ihre unorganischen Verbindungen. — Chemie der organischen Reiche. Die organischen Bestandtheile der Pflanzen. Pflanzensäuren, Pflanzenbasen und indifferente Stoffe. Zusammensetzung der für Land- und Forstwirthschaft wichtigsten Pflanzen und Pflanzentheile. Zesetzungsprozesse der Pflanzenbestandtheile und Pflanzen. — Thierchemie. Das Blut, der Chylus, die Nerven, die Knochen, die Knorpel, die Muskeln, der Speichel, der Magensaft und die Galle. Von den beim Lebensprozeß der Thiere erzeugten Ausscheidungen, als Harn, Excremente 2c., Milch, Honig, Wachs 2c. Von dem Athmungs- und Ernährungsprozesse.

b Agrikultur-Chemie. — Der Boden. Uebersicht der Quellen, aus welchen die Pflanzen die bildenden Elemente hernehmen. Wachsen der Pflanzen im Natur- und Kulturzustande. Die mechanische Bearbeitung des Bodens, die Brache, die Düngung, die Wechselwirthschaft.

c Chemische Grundlage der landwirthschaftlichen Gewerbe.

Die Bereitung des Weines, des Biers, des Branntweins, des Essigs. Die Fabrikation des Stärkmehls, des Brodes, des Zuckers, der fetten Oele und der Käse.

d Elemente der chemischen Analyse.

Allgemeine Grundsätze und Erfahrungen der chemischen Analyse. Operationen und

Reagentien. Analytischer Gang in der Untersuchung des Wassers, der Milch, der
erde 2c.

5) Mineralogie, wöchentlich 1 Stunde. Lehrer: Dr. Heinrich Weger.
Einleitung. Die Krystallsysteme. Allgemeine Eigenschaften der Mineralien. Beschr
der für die Landwirthschaft wichtigsten Mineralien.

6) Anatomie und Heilkunde der landwirthschaftlichen Hausthiere, wöchentl
Stunden. Lehrer: Verweser A. Firsching.
Das Nöthige aus der Anatomie des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines
Zahnbau und Zahnwechsel. Das Skelet. Die Verdauungswerkzeuge. Athmungs
Herz, Blutlauf, Gehirn und Rückenmark. Die häufigsten Krankheiten der Hausthier
Seuchen und Vorbeugungsmittel dagegen. Huf- und Klauenbeschlag.
Wesentlich nach Dr. Falke's Anatomie der Hausthiere.

7) Geometrie, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Dr. Kellermann.
Die Hauptsätze der ebenen Geometrie nach Dr. Rose's Lehrbuch der ebenen Ge
Eigenschaften der geometrischen Körper. Bestimmung der Oberfläche und des Kubik
derselben. Feldmessen. Nivelliren.

8) Deutsche Sprache, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.
Die Lehre vom deutschen Styl. — Anleitung zum Fertigen von Geschäftsaufsätzen.
liche Uebungen hierin. Uebungen im Fertigen von Aufsätzen über landwirthschaftliche
stände. Analysiren von Musterstylstücken.

9) Zeichnen, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J.
Landwirthschaftliches Geräthe- und Planzeichnen. Uebung im Tuschen u
loriren.

2) Die Ackerbauschule.

Die Ackerbauschule hat zum Zweck, junge Leute, vorzüglich Bauernsöhne, zu t
Feldbaumeistern, Verwaltern und Pächtern kleiner Güter, sowie zur bestmöglichsten Führu
von ihnen dereinst zu übernehmenden Güter auszubilden.

Erster Curs.

1) Religionsunterricht. a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden.
Pfarrer Feldkirchner.
Wie im ersten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
b) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Schmitt.
Wie im ersten Kurs der Kreis-Landwirthschaftsschule.

2) Theoretische Landwirthschaft, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Assistent Fick, bi
dann Assistent J. Them.
Einleitung. Bodenkunde. Bodenbearbeitung. Nach Dr. Fraas Schule des Landw

3) Praktische Landwirthschaft.
Wie beim dritten Curs der Landwirthschaftsschule

4) Arithmetik, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Assistent G. Huber.

Die 4 Species mit unbenannten und benannten Zahlen.
Lesen, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Uebungen im richtigen und fertigen Lesen.
Schönschreiben, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Uebung der Currentschrift.
Deutsche Sprache, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Orthographische Uebungen. Stylübungen.
Geographie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Kurze Uebersicht von Europa. Geographie von Bayern.
Gemeinnützige Kenntnisse, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J. Them.
Die Naturreiche. Kurze Beschreibung der bekanntesten Mineralien. Eintheilung und kurze Beschreibung der wichtigsten Thiere. Das Wichtigste über Ernährung, Vermehrung und äußere Gestalt der Pflanzen, sowie Kenntniß der nützlichsten und schädlichsten Pflanzen.
Zeichnen, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J. Them. Gemeinschaftlich mit dem ersten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.

Zweiter Curs.

Religionsunterricht. a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Pfarrer Feldkirchner.
Wie im ersten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
b) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Schmitt.
Wie im ersten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
Theoretische Landwirthschaft, wöchentlich 9 Stunden.
Düngerlehre und Pflanzenbau gemeinschaftlich mit dem zweiten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
Viehzucht, Lehrer: Assistent Fick.
Allgemeine Viehzucht. Spezielle Viehzucht und zwar Rindvieh-, Pferde-, Schaf- und Schweinezucht. Nach Dr. Fraas Schule des Landbaues.
Außerdem Mittheilung des Wichtigsten über Butter- und Käsebereitung, nach eigenen Heften.
Praktische Landwirthschaft.
Wie beim dritten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule. Außerdem wurden die Schüler der Ackerbauschule alle Wochentage der Sommermonate, nachdem sie früh von 7 — 8 Uhr populären theoretischen Unterricht in der gesammten Landwirthschaftslehre erhalten hatten, von 8 — 12 Uhr unter specieller Anleitung und Aufsicht des seit Juni 1859 aufgestellten Ackerbaulehrers in den praktischen landwirthschaftlichen Arbeiten auf Aeckern und Wiesen unterwiesen und geübt.
Chemie, wöchentlich 2 Stunden.
Gemeinschaftlich mit dem zweiten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
Deutsche Sprache, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Gottlieb Kellermann.
Gemeinschaftlich mit dem zweiten Curs der Kreis-Landwirthschaftsschule.
Arithmetik, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Assistent G. Huber.
Die 4 Species mit benannten Zahlen; die Lehre von den gemeinen und Decimalbrüchen;

Lösung von Rechnungsaufgaben aus dem Geschäftsleben mit besonderer Rücksicht auf
wirthschaft; Kopfrechnen.

7) Zeichnen, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Assistent Fick bis Juni, dann Assistent J.
Gemeinschaftlich mit dem zweiten Curs der Landwirthschaftsschule.

3) Vorbereitungsschule.

Schüler, welche sich zur Aufnahme in die Kreis-Landwirthschaftsschule wegen ungen
Vorkenntnisse nicht eignen, jedoch erkennen lassen, daß ihre Kenntnisse durch einen geregelten
unterricht vermehrt und befestigt werden können, haben in die Vorbereitungsschule einzutre

Die Schüler erhielten ihren Unterricht gemeinschaftlich mit den Schülern des ersten
der Ackerbau-Schule.

b) Gewerbliche Abtheilung.

1. Kreis-Gewerbsschule.

Die Kreis-Gewerbsschule hat den Zweck, den erforderlichen Unterricht denjenigen
Leuten zu gewähren, die bei dem Nachweis der nöthigen Vorkenntnisse sich entweder eine
gerlichen Beruf widmen, der zum rationellen Betrieb Kenntnisse in der Mathematik, den
wissenschaften, sowie Fertigkeit im Zeichnen und Modelliren voraussetzt, oder die sich für d
nischen Staatsdienst heranbilden wollen.

Der Unterricht umfaßt in drei Jahrescursen, von welchen der erstere (untere) in zw
rallelklassen A und B abgetheilt ist: die Religionslehre, die deutsche und französische Sprach
schichte, Geographie, ferner die Elementar-Mathematik, descriptive Geometrie, Experimental-
theoretische und praktische Chemie, Mechanik, Freihand- und Linearzeichnen, Modelliren in
und Wachs und vertheilt sich in die Curse auf folgende Weise:

Erster Curs.

Classe A und Classe B.

1) Religionsunterricht: a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden für jede
Lehrer: Pfarrer K. Rüdel.

Die christliche Glaubens- und Sittenlehre nach der Ordnung des lutherischen Ke
mus. Gelernt und erklärt: die drei ersten Hauptstücke mit den Beweisstellen und
den Liedern aus dem Gesangbuche. Biblische Geschichte des alten Testaments.

b) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden für jede Classe. Lehrer: Stadtkaplan He

Erklärung der zwölf Artikel des apostolischen Glaubensbekenntnisses. — Biblis
schichte des alten Bundes nach Christoph von Schmid.

2) Arithmetik, wöchentlich 6 Stunden für jede Classe. Lehrer: Leonhard Marx.

Allgemeine Zahlenlehre, Erklärung der Begriffe: Summe, Differenz, Produkt und
tient; Zeichen erster und zweiter Ordnung; Gebrauch der Klammer; die vier ersten
nungsarten mit ganzen, gebrochenen, unbenannten und benannten Zahlen; Decimal
Verhältnisse und Proportionen, Anwendung derselben auf einfache und zusamme
Regel de tri; Vergleichung der in und außerhalb Deutschland gebräuchlichsten Ma
Gewichte; Aufgaben aus der einfachen Zins-, Rabatt- und Gesellschaftsrechnung; K

hnen. — Anfangsgründe der Buchstabenrechnung. — Nach Dr. Hermann's Lehrbuch ir Arithmetik und Algebra.

aturgeschichte, wöchentlich 3 Stunden für jede Classe. Lehrer: Dr. Heinrich Weger.

Wintersemester: Zoologie: — Aufgabe und Nutzen der Naturgeschichte. Unterschied der ei Naturreiche. Wesentliche Kennzeichen der Thiere. Eintheilung des Thierreiches in eise, Classen und Ordnungen. Anatomisch-physiologische Erklärung des Bewegungs-, Em-ndungs-, Ernährungs- und Fortpflanzungssystems. Allgemeine und besondere Beschreibung : Säugethiere, Vögel, Reptilien und Fische, der Gliederthiere und Schleimthiere, mit beson-rer Berücksichtigung ihrer charakteristischen Unterscheidungsmerkmale, sowie ihres Nutzens d Schadens für den Menschen.

Sommersemester: Botanik: — Wesentliche Kennzeichen der Pflanzen, Uebersicht über Pflanzenkunde. 1. Allgemeine Botanik. Formen und Gestalten im Allgemeinen; dann sondere Organe und zwar: Elementarorgane (Zellen, Zellgewebe, Gefäße, Bau der Oberhaut), nährungsorgane (Wurzel, Stamm und Blätter mit ihren morphologischen und anatomi-sen Unterschieden), Vermehrungsorgane (Knospen, Zwiebeln, Knollen ꝛc.) und Fortpflan-zgsorgane (Blüthe und Frucht mit ihren Theilen, Kelch, Blumenkrone, Staubgefäße und Stem- ; Fruchthülle und Samen). Allgemeine Bedingungen des Pflanzenlebens: Wärme, atmosphä-rhe Luft, Wasser und Boden. 2. Specielle Botanik. Künstliches System von Linné. Kurze schreibung der Nutzpflanzen. Nach Leunis' analytischem Leitfaden.

ichnen, wöchentlich 8 Stunden. Lehrer der Classe A: Wolff und der Classe B: Mayer.

Freihandzeichnen. Systematische Uebungen im Zeichnen gerader und krummer Linien und wendung derselben zu Ornamenten. Nach Wolff's ersten Grundlagen des rationalen Zeich-nunterrichts. Zeichnen nach körperlichen Vorlagen.

eutsche Sprache, wöchentlich 5 Stunden für jede Classe. Lehrer: Verweser Dengler.

Deutsche Grammatik, Flexionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen. Die Lehre n einfachen und zusammengesetzten Satz, bis zum Adjectivsatz incl., nach Fr. Bauer's ammatik. Orthographische und Leseübungen. Memoriren von Gedichten.

eographie, wöchentlich 2 Stunden für jede Classe. Lehrer: Leonhard Marr.

Die Erde als Weltkörper, Anleitung zum Gebrauch der künstlichen Erdkugel, Betrachtung Erdoberfläche, die Hauptmeere mit ihren einzelnen Theilen; die bedeutendsten Gebirge d Flüsse aller fünf Erdtheile; Geographie von Europa, mit besonderer Berücksichtigung utschlands und des Königreichs Bayern; Andeutungen aus der Geschichte unsres Erdtheils rhaupt, sowie aus der der einzelnen Länder. Uebungen im Kartenzeichnen.

anzösische Sprache, wöchentlich 3 Stunden für jede Classe. Lehrer: Rosenschon.

Aussprache, Leseübungen; die deklinirbaren Redetheile, die Conjugation der Hülfszeitwör-t und der regelmäßigen Zeitwörter, mit Ausschluß derjenigen, die sich auf oir endigen. — ündliches und schriftliches Uebersetzen aus Dr. Ahn's praktischem Lehrgange von Nr. 1 Nr. 130. Memoriren von Vokabeln und Redensarten.

odelliren in Thon und Wachs, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Heller.

Zweiter Curs.

ligionsunterricht: a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Pfar-r Rüdel.

Die Lehre von den Heilsmitteln nach der Ordnung des lutherischen Katechismus. chengeschichte bis Ende des 13. Jahrhunderts.

b) Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Henning.
Die Lehre von den Gnadenmitteln. — Biblische Geschichte des neuen Bundes Christoph von Schmid.

2) Mathematik, wöchentlich 6 Stunden.

a) Algebra, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Lehramtscandidat Anton Faist.
Die Lehre von den vier Grundoperationen mit Buchstabengrößen. Begriff vor und entgegengesetzten Größen. Addition und Subtraktion mit Brüchen; einfache tionen durch Zerfällung in Factoren. Lehre von Verhältnissen und Proportionen ersten Sätze vom Potenziren und Radiciren; Ausziehen der zweiten und dritten rischen Wurzeln. Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. Beispie Zahlen und Buchstabengrößen aus Hoffmann's Aufgabensammlung.

b) Geometrie, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Leonhard Marx.
Geometrie der Ebene; der Punkt, die gerade Linie, Parallellinien und Winkel; gruenz, Aehnlichkeit, Bestimmung, Verwandlung und Theilung des Flächenraum radliniger Figuren; der Kreis; Betrachtung einiger regelmäßiger Vielecke; Aufgaben, über Construktion der Figuren aus gegebenen Stücken, als auch zur Uebung im chen geometrischer Oerter. Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhalts der ei Körper. Nach Dr. Rose's Lehrbuch der Geometrie.

3) Physik, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Dr. C. Stölzel.
Allgemeine Eigenschaften der Körper. Bewegung und Gleichgewicht fester, flüssig luftförmiger Körper. Schall. Wärme. Licht. Magnetismus. Electricität. Nach Hellm Naturlehre mit Erläuterung durch zahlreiche Experimente.

4) Chemie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Allgemeiner Theil der Chemie: Einfache und zusammengesetzte Körper; Atome; T tion, Sublimation, Lösung, Krystallisation; chemische Verwandtschaft, stöchiometrische Aequivalentzahlen; Säuren, Basen und Salze. — Specieller Theil: die Metalloide u Verbindungen unter einander. Nach Gottlieb's Lehrbuch der reinen und technischen Che Erläuterung durch zahlreiche Experimente und Vorzeigung der betreffenden chemischen parate.

5) Technologie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Derselbe.
Heizungs- und Beleuchtungsmaterialien. Heerd-, Flammen-, und Schachtöfen. neratoren. Gebläse: Blasebalg, Ventilatoren, Cylindergebläse. Kerzen. Lampen. Gas tung. Verkohlung und Vercoakung in Meilern und Oefen. Kienruß. Theer. H Fabrikation und Raffination des Schwefels. Englische und Nordhäuser Schwefelsäure petersäure. Bleichen: Rasen- und Chlorbleiche. Fabrikation des Phosphors und der hölzer. — Der Vortrag wurde durch zahlreiche Experimente und Vorzeigungen von M Modellen und Zeichnungen aus der technologischen Sammlung erläutert.

6) Zeichnen, wöchentlich 7 Stunden. Lehrer: Wolff.
Freihandzeichnen. Ornamentenzeichnen nach selbst gefertigten Wandtafeln. Linearz Systematische Uebungen für die Handhabung der Zirkel und Lineale durch Constru

ometrischer Figuren; Curven und Zusammensetzungen derselben. Maßstäbe und ihre Anendung. Projektionen von Linien, Flächen und Körpern.

eutsche Sprache, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Verweser Dengler.

Ausführliche Behandlung der Lehre vom zusammengesetzten Satze, nach Bauer's deutscher rammatik. Anleitung zur Fertigung von Geschäfts- und anderen Aufsätzen, verbunden mit aktischen Uebungen. Vorlesen von Musterstücken deutscher Prosa. Memoriren von Gedichten.

eschichte, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Flegler.

Nach Dr. Ghillany's Lehrbuch: Grundriß der Weltgeschichte für technische Lehranstaln, Nürnberg 1850, wurde die Geschichte der alten Welt mit vorzüglicher Rücksicht auf e Zeiten des römischen Kaiserreiches, und die Geschichte des Mittelalters bis zur Gründung s fränkischen Reiches durchgenommen, und dabei die Entwickelung des Handels und allmeinen Verkehrs besonders hervorgehoben.

eographie, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Derselbe.

Die außereuropäischen Erdtheile wurden behandelt, mit größerer Ausführlichkeit die amekanischen Staaten, wegen ihrer vielfältigen Beziehungen zu Europa; Afrika und Asien dagen in gedrängtem Ueberblicke. Zur Verdeutlichung und Wiederholung des Gelernten urden von den Schülern Karten gezeichnet.

ranzösische Sprache: Lehrer: Rosenschon.

In 2 Abtheilungen, jede 2 Stunden wöchentlich; die untere Abtheilung seit Ostern Stunden.

Wiederholung der regelmäßigen Zeitwörter; — die zurückzielenden Zeitwörter; — die regelmäßigen Zeitwörter vollständig. — Mündliches und schriftliches Uebersetzen von Nr. 0 bis 155 aus der ersten Abtheilung und sämmtliche Aufgaben der zweiten Abtheilung n Ahn's praktischem Lehrgange. Ergänzungen und Aufgaben dazu nach Heften des Lehs. — Mehrere Erzählungen übersetzt und analysirt.

odelliren in Thon und Wachs, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Heller.

Dritter Curs.

eligionsunterricht. a) Protestantischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: arrer Rüdel.

Die Artikel des christlichen Glaubens nach Luther's Katechismus ausführlich erklärt. Die 21 Lehrartikel der Augsburgischen Confession erläutert.

Katholischer Confession, wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Stadtkaplan Henning.

Religionsgeschichte und Pflichtenlehre.

athematik, wöchentlich 6 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Rose.

Algebra. Potenzen, Wurzeln, Logarithmen; arithmetische und geometrische Reihen; Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten; diophantische Aufgaben; Gleichungen des zweiten Grades mit einer und zwei Unbekannten. Nach Dr. v. Hermann's Lehrbuch d. A. u. A.

Geometrie. Anwendung der Algebra auf die Lösung geometrischer Probleme, namentlich auf die Bestimmung der regelmäßigen Vielecke und auf die Berechnung der Fläche und der Peripherie des Kreises. Nach eigenem Lehrbuche.

Trigonometrie, ebene. Kreisfunktionen. Entwicklung der brauchbarsten trigonome-

trischen Formeln. Berechnung der ebenen Dreiecke aus drei Bestimmungsstücken. Be-
nung der regelmäßigen Vielecke. Kreisrechnungen. Anwendung der Trigonometr
Lösung geometrischer Aufgaben.

d) Stereometrie. Lehrer: Lehramts-Candidat Anton Faist.

Lage gerader Linien gegen Ebenen und der Ebenen gegen Ebenen. Von dem Pr
überhaupt; Gleichheit der Prismen und Pyramiden. Die 3 runden Körper. Messu
Körper. Berechnungsaufgaben aus Hoffmann's Sammlung stereometrischer Aufg

3) Darstellende Geometrie, wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Professor Klingenfe.

Graphische Bestimmung von Punkten, Geraden und Ebenen. Mittel, die gegen
Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zu erkennen. Aufgaben über Punkte, Gerad
Ebenen. Uebergang von einem Projektionssystem zu einem andern. Aufgaben, in
Entfernungen oder Winkel gegeben oder gesucht sind. — Darstellung von Körpern. A
suchung der Risse (Projektionen) eines Körpers. Aufsuchung der Schnitte von Körpe
Ebenen, Geraden und Körpern.

4) Mechanik, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Derselbe.

Bewegung freier Körper; freier Fall. Bestimmung der Arbeit von Kräften. Prin
lebendigen Kräfte. Stoß. Reibung. Mittelpunkt paralleler Kräfte. Schwerpunkt. Le
der Gegenpaare. Pendel, Fliehkraft. — Mittel zur Umwandlung einer Bewegung i
andere. Die Werkzeuge und Maschinen zur Bearbeitung der Metalle. — Exkursion
k. Eisenbahnwerkstätte.

5) Chemie, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Dr. C. Stölzel.

Kurze Widerholung der Metalloide. Die Metalle mit besonderer Berücksichtigung
technischen Gewinnung und Verarbeitung. — Nach Gottlieb's Lehrbuch der reine
technischen Chemie erläutert durch zahlreiche Experimente und Vorzeigung der betre
Gegenstände aus der chemischen und technologischen Sammlung. —

6) Mineralogie, wöchentlich 1 Stunde. Lehrer: Derselbe.

Die Krystallsysteme. Einfache Krystallkörper. Combinations- und hemiedrische K
formen. Zwillingskrystalle. Messung der Krystalle durch Anlege- und Reflexionsgon
Allgemeine Eigenschaften der Mineralien: Optische Eigenschaften, Härte, Bruch, u. s.
Charakteristrung und Vorzeigung der wichtigsten Mineralspecies in Verbindung m
chemischen Vortrage. —

7) Chemisches Laboratorium. Täglich mit Ausnahme des Sonnabends geöffnet. D
Dr. C. Stölzel. Assistent: R. Hagen. In demselben wurden die Versuche und A
rate für den chemischen, physikalischen und technologischen Unterricht vorbereitet
große Reihe von Präparaten für die chemische Sammlung angefertigt und zahlreiche
suchungen im Auftrage hoher Behörden und der Gewerbtreibenden hiesiger Stadt aus

8) Zeichnen, wöchentlich 8 Stunden. Lehrer: Wolff.

Freihandzeichnen. Größere Ornamente in Umrissen mit der Feder gezeichnet.
zeichnen: Architektur nach Mauch. Situationszeichnen nach Lehman, Pfeifer und
scher. Maschinenzeichnen nach Modellen.

9) Deutsche Sprache, 4 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Flegler.

Es wurden eine Reihe größerer Aufsätze gefertigt, dabei die Vorschriften der Sty
Anwendung gebracht, und die Regeln der Grammatik in das Gedächtniß zurückgerufen

erdem wurden einige größere Werke der deutschen Literatur gelesen und erklärt, und daran Bemerkungen über die Geschichte der deutschen Literatur geknüpft.

eschichte, 2 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Flegler.

Nach Ghillany's Lehrbuch: Grundriß der Weltgeschichte für technische Lehranstalten urde die Geschichte des Mittelalters, sowie die Geschichte der neueren Zeit im Ueberblicke s zum westphälischen Frieden behandelt und dabei der Faden der deutschen Geschichte zu rrunde gelegt. Auch hier wurden die Thatsachen erläutert, welche den allgemeinen Gang s Handels und der Industrie verdeutlichen.

anzösische Sprache, wöchentlich 3 Stunden. Lehrer: Rosenschon.

Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre und Syntaxis mit besonderem Nachdruck f Participien. — Gebrauch der Zeit- und Redeformen; Rektion des Zeitwortes. — Schriftche Uebersetzung kleiner deutscher Aufsätze. — Mündliches und schriftliches Uebersetzen und nalysiren aus Dr. Ahn's französischem Lesebuch. — Gelesen und mündlich übersetzt: „Le mte Hermann, par M. Alexandre Dumas". — Redensarten und Gallicismen memorirt. — iktirübungen. —

2. Die Elementar-Zeichnungsschule.

n dieser Anstalt wird Unterricht im Zeichnen und Modelliren denjenigen Knaben gegeben, die deutsche Schule besuchen und sich künftig einem Gewerbe widmen, wo sie dann in die erker-Schule eintreten.

ie Elementar-Zeichnungsschule besteht aus folgenden zwei Cursen:

I. Curs. Lehrer Rosée, wöchentlich 8 Stunden in 2 Abtheilungen.

ementarunterricht im Freihandzeichnen: gerade Linien, Winkel und Flächen mittelst Vor-; symmetrische Körper und Bogenlinien nach Wolff's rat. Zeichnenunterricht. Zeichnen r Ornamente nach Weiß und Herrmann; dergleichen größere nach Cramer und Weit- Leichte Uebungen im Schraffiren mit Bleistift nach verschiedenen Originalen.

II. Curs. Lehrer: Rosenschon, wöchentlich 6 Stunden.

sammengesetzte Ornamente, antike Vasen, Gefäße und Möbeln nach Vorlagen von Weit- und Wolff, vorzüglich in Umrissen.

3. Die Sonntags-Handwerkerschule.

dieser Anstalt erhalten Lehrlinge und Gesellen aus dem Gewerbstande Unterricht im n, Modelliren, Bossiren, Graviren ꝛc.; dann in der Arithmetik, Geometrie, Physik und

er Zeichnungsunterricht wurde auf folgende Weise ertheilt:

Curs in 4 Parallelklassen A, B, C und D, deren jede in 3 Abtheilungen und jede Abtheilung Sonntags 2 Stunden Unterricht erhält. Lehrer der Klasse A: Grünewald; der Klasse B: Kellner; der Klasse C: Maar; der Klasse D: Eberlein.

Curs in 3 Abtheilungen; jede Abtheilung Sonntags 2 Stunden. Lehrer: Rosée.

Freihandzeichnen nach Wolff's rat. Zeichnenunterricht. Zeichnen von Ornamenten, Vasen ꝛc. in Umrissen mit Bezugnahme auf die betreffenden Gewerbe, nach verschiedenen Originalen; schattirte Ornamente nach Gärtner, Lochner und Mauch. Figürliches

Zeichnen nach Julien. Construktion geometrischer Figuren zur Uebung in Handh
des Zirkels und Lineals. Tuschen und Coloriren. Zeichnen nach dem Basrelief.

III. Curs in 4 Abtheilungen; jede derselben Sonntags 4 Stunden.

1. Abtheilung. Enthält vorzüglich Lehrlinge und Gesellen der verschiedenen Bauge
Lehrer: Rosenschon.

Architektonisches Zeichnen: Geometrische Figuren, Maßstäbe und ihre Anwe
Construktion der architektonischen Glieder und Zusammensetzung derselben nach
fessor C. Heideloff's Säulenordnung in Umrissen und zum Theil getuscht.
nen nach Normann's und Mauch's griechischer Architektur; dann auch nach
Klenze's und Schinkel's architektonischen Werken für Maurer und Zimm
und Mitterer's Zimmerkunst. Architektonische Details und Façaden in verschi
Maßstäben nach Joh. Unger's Sammlung von Privatgebäuden.

2. Abtheilung. Enthält ausschließlich Lehrlinge und Gesellen des Schreinerhandw
Lehrer: Ziegler.

3. Abtheilung. Enthält ausschließlich Lehrlinge und Gesellen des Drechslerhandw
Lehrer: Möbius.

4. Abtheilung. Enthält Lehrlinge und Gesellen verschiedener Gewerbe.
Lehrer: Professor Mayer.

In diesen letzten drei Abtheilungen wird beim Zeichnungsunterricht speciell auf d
treffende Gewerbe Rücksicht genommen.

2) Den Unterricht im Bossiren und Modelliren in Thon und Wachs, Graviren, Hol
den rc. ertheilte Lehrer Heller, Sonntags in 4 Stunden.

3) Arithmetik in 3 Abtheilungen, jeden Sonntag 2 Stunden. Lehrer: J. G. Keller
jun., Verweser Dengler und Assistent Faist.

Erklärung und Einübung der in der Arithmetik vorkommenden Zeichen und Form
vier Rechnungsarten mit unbenannten und benannten Zahlen; die Lehre von den ge
und Decimalbrüchen; Verhältnisse und Proportionen und deren Anwendung; Redu
von Längenmaßen; Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln; Kopfrechnen.

4) Geometrie. Lehrer: Leonhard Marx. Sonntags 2 Stunden.

Praktische Anwendung der wichtigsten Lehrsätze; Uebungen im Construiren geome
Figuren, Berechnung des Flächenraumes derselben, sowie der Oberfläche und des
inhaltes der einfachen Körper.

5) Physik, mechanischer Theil. Sonntags 2 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Weiß.

Bewegung fester Körper. Bestimmung der mechanischen Arbeit mit Rücksicht auf d
bung. Gleichgewicht an einfachen Maschinen. — Dampflehre und Optik.

6) Chemie. Sonntags 2 Stunden. Lehrer: Assistent Hagen.

Begriff der Chemie. Betrachtung der chemischen Elemente und deren Verbindung,
sofern sie für die Gewerbe von Wichtigkeit sind. Es wurden bei dem Unterricht hau
lich die in Nürnberg ausgeübten Gewerbe berücksichtigt.

C. Schüler-Verzeichniß.

Abstufung und Bezeichnung der Fortgangsnoten: Vorzüglich: von 1,00 bis 0,81.
Sehr gut: „ 0,80 „ 0,61.
Gut: „ 0,60 „ 0,41.
Mittelmäßig: „ 0,40 „ 0,21.
Gering: „ 0,20 „ 0,00.

1. Kreis-Landwirthschaftsschule.

Erster Curs.

Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern.									Allgemeiner Fortgangsplatz.
					Agronomie und Agrikultur.	Zoologie.	Botanik.	Arithmetik.	Deutsche Sprache.	Geographie.	Zeichnen.	Schönschreiben.	Praktische Landwirthschaft.	
Johann . .	15¾	prot.	Nürnberg	Kammfabrikant †	0,60	0,42	0,42	0,20	0,36	0,34	0,45	0,42	0,60	18
n, Albr. .	15½	„	Lichtenhof	Gastwirth u. Oeconom †	0,50	0,48	0,52	0,60	0,64	0,62	0,30	0,58	0,50	13
jütz, Alex.	15¼	„	Coburg	herzogl. Leibarzt	0,48	0,56	0,61	0,65	0,54	0,62	0,55	0,50	0,56	10
, August.	15	„	„	hzgl. Geheim-Secretair	0,48	0,56	0,61	0,65	0,52	0,60	0,60	0,58	0,56	11
, Andreas	15¼	„	Lauf	Spezereihändler und Oeconom	0,62	0,52	0,55	0,75	0,64	0,40	0,52	0,44	0,50	6
, Friedr.	16	„	Pleinfeld	Gastwirth u. Oeconom	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
n, Friedr.	15¾	„	Schwarzenbach in Oberfranken	Schullehrer	0,56	0,50	0,56	0,60	0,66	0,50	0,30	0,55	0,50	9
n, Georg	15	kath.	Hofheim in Unterfranken	Bierbrauereibesitzer	0,38	0,50	0,36	0,38	0,28	0,40	0,20	0,32	0,55	19
Heinrich.	13¼	prot.	Nürnberg	Bäcker †	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
k, Arnold	17¼	kath.	Bodenwöhr	kgl. Revierförster	0,50	0,36	0,40	0,56	0,44	0,42	0,40	0,48	0,55	15
, Friedr.	14¼	prot.	Würzburg	kgl. Rentbeamte †	—	—	—	—	—	—	—		—	—
Friedrich	16¾	„	Westheim	k. Pfarrer †	0,70	0,60	0,67	0,70	0,68	0,47	0,55	0,72	0,65	2
er, Ludw.	17	„	Pappenheim	Post-Expeditor	0,68	0,60	0,66	0,50	0,68	0,67	0,30	0,54	0,55	7
Johann .	13¾	„	Langenaltheim	Oeconom †	0,35	0,48	0,36	0,10	0,46	0,10	0,35	0,42	0,50	20
s, Karl .	18¼	„	Schönau in der Pfalz	k. Revierförster	0,65	0,60	0,54	0,50	0,44	0,60	0,40	0,32	0,60	13
enstein, F.	13¼	„	Schwarzenstein in Oberfranken	Rittergutsbesitzer	0,38	0,36	0,40	0,10	0,10	0,18	0,25	0,45	0,55	22
, Friedr.	14¾	„	Oberndorf in Unterfranken	Hammerwerksbesitzer	0,26	0,36	0,27	0,10	0,10	0,10	0,30	0,32	0,55	23
, Albert	17	„	Gunzenhausen	k. Landrichter	0,60	0,60	0,61	0,75	0,50	0,56	0,50	0,65	0,60	5
r, Konr.	15¾	„	Fürth	Kaufmann	0,61	0,48	0,58	0,50	0,62	0,38	0,52	0,57	0,55	12
Franz .	14¾	kath.	Nürnberg	Kunstmaler	0,34	0,30	0,36	0,16	0,22	0,26	0,15	0,40	0,55	21
Stephan	13¾	prot.	„	Blumenfabrikant	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
midt, A.	17	„	Regensburg	kgl. Postspecialkassier	0,58	0,56	0,61	0,65	0,64	0,58	0,38	0,38	0,60	8
Johann	14½	„	Lauf	Maurermeister	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
er, Herm.	16¾	„	Hördt in d. Pfalz	kgl. Revierförster	0,65	0,70	0,66	0,65	0,66	0,60	0,85	0,70	0,66	3
is, Ferd.	16	„	Aschaffenburg	kgl. Stadtpfarrer	0,72	0,48	0,65	0,70	0,50	0,56	0,40	0,48	0,60	4
Julius . .	15	„	Nürnberg	Leihhaus-Officiant †	0,54	0,50	0,50	0,20	0,46	0,30	0,25	0,52	0,50	17
Ernst . .	17	„	Bayreuth	kgl. Prof. an der Kreis-Ldwsch.- u. Gewbsch. zu Bayreuth	0,70	0,72	0,68	0,80	0,70	0,70	0,80	0,68	0,70	1
. Emil . .	15½	„	Eibach	kgl. Pfarrer †	0,54	0,45	0,50	0,20	0,58	0,38	0,30	0,45	0,60	16

* ist im Laufe des Jahres ausgetreten.
** konnten wegen Krankheit nicht locirt werden.
*** konnten wegen erst kürzlich erfolgten Eintrittes nicht locirt werden.

Preisträger: 1. Herzog, Ernst. 2. Merz, Friedrich. 3. Schröder, Hermann.

Zweiter Curs.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern. Pflanzenbau.	Düngerlehre.	Physik.	Chemie.	Arithmetik.	Geometrie.	Deutsche Sprache.
***1.	Ammon, Sigmund	18½	prot.	Nürnberg	Brauereibesitzer	—	—	—	—	—	—	—
2.	Backofen, Heinrich.	17	"	"	Kaufmann	0,55	0,50	0,52	0,54	0,60	0,43	0,36
** 3.	Bauwerker, Karl..	15½	kath.	Neumarkt	Bezirks-Thierarzt	—	—	—	—	—	—	—
4.	Brückner, Heinrich.	17	prot.	Sonneberg	Landfuhrmann und Oeconom	0,67	0,65	0,54	0,55	0,60	0,43	0,55
5.	v. Ditfurth, Berth.	21½	"	Theres (Unterfr.)	k. Kammerherr und Rittergutsbesitzer	0,55	0,56	0,56	0,58	0,40	0,30	0,52
6.	Eickemeyer, Julius	16	kath.	Würzburg	k. Bau-Inspektor †	0,60	0,64	0,58	0,60	0,50	0,52	0,63
7.	Haußer, Julius ...	15¼	prot.	Nürnberg	Drahtfabrikant	0,58	0,52	0,46	0,48	0,60	0,19	0,55
8.	Herbst, Georg.....	16¼	"	Rothenburg	Gutsbesitzer	0,65	0,62	0,68	0,70	0,66	0,45	0,58
9.	Jaudt, Karl	18	kath.	Marktheidenfeld	k. Gerichtsarzt	0,52	0,59	0,56	0,60	0,40	0,40	0,36
10.	Kirchdörfer, Karl..	15¼	prot.	Weißenburg	Braumeister	0,56	0,59	0,48	0,50	0,56	0,25	0,56
*11.	Pabst, Wilhelm ...	17½	"	Kleinumstadt	Oeconomiepächter	—	—	—	—	—	—	—
12.	Recknagel, Julius	15½	"	Remlingen	Apotheker †	0,66	0,68	0,62	0,64	0,66	0,35	0,67
13.	Reinwald, Eduard.	17	"	Langenzenn	Kaufmann	0,63	0,66	0,50	0,48	0,58	0,25	0,47
14.	Schäfer, Friedrich.	18¼	"	Hilpoltstein	k. Pfarrer	0,62	0,68	0,62	0,70	0,75	0,60	0,56
15.	Schilffarth, Karl..	17½	"	Windsbach	prakt. Arzt	0,65	0,65	0,50	0,52	0,55	0,30	0,30
16.	Schott, Hermann .	15½	"	Schwabach	k. Pfarrer	0,60	0,62	0,68	0,70	0,75	0,42	0,65
17.	Splitgerber, Wilh.	16	"	Zimmern	gräfl. Revierförster	0,58	0,48	0,40	0,46	0,48	0,25	0,35
18.	Stahl, Ludwig	15¼	"	München	k. Klassifikationsgeometer	0,45	0,50	0,42	0,45	0,50	0,35	0,45
19.	Treuheit, Konrad .	16¼	"	Immeldorf	Schullehrer	0,62	0,60	0,50	0,53	0,50	0,30	0,45
20.	Weidner, Emil....	17½	"	Gerasmühle	Mühl- und Oeconomiebesitzer †	0,57	0,57	0,42	0,50	0,65	0,30	0,64
*21.	Wittmann, Eduard	15¾	"	München	Gutsbesitzer in Neustadt a. D.	—	—	—	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.
** konnte wegen Krankheit nicht locirt werden.
*** konnte wegen erst kürzlich erfolgten Eintrittes nicht locirt werden.

Preisträger: 1. Schäfer, Friedrich. 2. Schott, Hermann.

Dritter Curs.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Landwirthsch. Betriebslehre.	Viehzucht.	Chemie.	Mineralogie.	Technologie.	Thieranatomie u. Thierheilkunde.	Geometrie.	Deutsche Sprache.
1	Berthold, Christoph	18	prot.	Erlangen	Müllermeister	0,60	0,68	0,55	0,54	0,56	0,62	0,55	0,45
2	Böhmländer, Heinr.	17	"	Nürnberg	Maler	0,72	0,72	0,78	0,76	0,75	0,70	0,75	0,80
3	Dünkelmeier, Ludw.	22	"	"	Chirurg	0,65	0,71	0,72	0,70	0,70	0,76	0,62	0,65
*4	Fischer, Albert....	18¼	"	Coburg	herzogl. Finanzrath	—	—	—	—	—	—	—	—

r Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern. Landwirthsch. Betriebslehre.	Viehzucht.	Chemie.	Mineralogie.	Technologie.	Thier-Anatomie u. Thierheilkunde.	Geometrie.	Deutsche Sprache.	Zeichnen.	Praktische Landwirthschaft.	Allgemeiner Fortgangsplatz.
iller, Otto	$16\frac{1}{2}$	prot.	Weißenburg	Gastwirth	0,65	0,75	0,70	0,68	0,68	0,66	0,60	0,70	0,85	0,80	6
hael	$17\frac{1}{4}$	kath.	Goßmannsdorf (Unterfr.)	Mühlarbeiter	0,52	0,75	0,70	0,68	0,67	0,68	0,32	0,56	0,60	0,80	12
Guido ...	$17\frac{1}{4}$	„	Rothenburg a. T.	Essigfabrikant	0,45	0,60	0,50	0,52	0,50	0,59	0,24	0,50	0,50	0,80	16
rad.....	$18\frac{1}{4}$	prot.	Altdorf	Kaufmann	0,57	0,76	0,70	0,68	0,66	0,70	0,75	0,70	0,60	0,85	5
. Philipp	$16\frac{1}{2}$	kath.	Königshofen	Landgerichtsdiener †	0,50	0,65	0,54	0,50	0,50	0,56	0,52	0,66	0,58	0,70	13
Leonhard	$16\frac{1}{4}$	prot.	Nürnberg	Silberpolirer	0,68	0,69	0,75	0,70	0,70	0,62	0,75	0,80	0,53	0,75	4
er, Ad. .	$16\frac{3}{4}$	„	Rohrbrunn (Unterfr.)	Oeconom	0,60	0,65	0,70	0,64	0,66	0,56	0,50	0,68	0,65	0,75	8
Wilhelm	$17\frac{1}{4}$	kath.	Ellingen	Forstwart	0,55	0,60	0,52	0,54	0,50	0,55	0,29	0,48	0,50	0,75	15
ermann .	17	prot.	Rentweinsdorf (Unterfr.)	Schullehrer	0,60	0,68	0,70	0,66	0,65	0,60	0,38	0,65	0,52	0,75	9
Konrad..	$18\frac{3}{4}$	„	Königshof	Oeconom	0,50	0,70	0,50	0,50	0,50	0,62	0,32	0,46	0,48	0,86	14
edrich ...	18	„	Nürnberg	Antiquar †	0,60	0,70	0,60	0,58	0,55	0,65	0,50	0,50	0,42	0,80	10
ichael ...	$24\frac{1}{4}$	kath.	Hoheim (Unterfr.)	Oeconomie-Verwalter	0,72	0,76	0,72	0,70	0,70	0,68	0,75	0,76	0,55	0,96	2
Ludwig .	$18\frac{3}{4}$	prot.	Hüttenhausen	k. Pfarrer	0,72	0,75	0,72	0,69	0,70	0,68	0,75	0,80	0,63	0,88	3
ttlieb ...	$17\frac{3}{4}$	„	Nürnberg	Gasthofbesitzer	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
tant.															
Eduard.*	23	kath.	Lauingen	Thierarzt	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.
Preisträger: 1. Böhmländer, Heinrich. 2. Weber, Michael.

Ackerbau-Schule.

Erster Curs.

d Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern. Theoretische Landwirthschaft.	Gemeinnützige Kenntnisse.	Rechnen.	Lesen.	Deutsche Sprach-Uebungen.	Geographie.	Zeichnen.	Schönschreiben.	Praktische Landwirthschaft.	Allgemeiner Fortgangsplatz.
ohann ...	$16\frac{1}{2}$	prot.	Atzelberg	Herrschaftsförster u. Oeconom	0,45	0,45	0,52	0,52	0,65	0,25	0,40	0,64	0,55	2
nton	$17\frac{1}{2}$	„	Heinersreuth (in der Oberpf.)	k. Forstmeister	0,13	0,15	0,25	0,36	0,25	0,15	0,18	0,38	0,40	5
udolph ..	$18\frac{3}{4}$	kath.	Kissingen	Stadtvorstand	0,48	0,55	0,45	0,40	0,38	0,25	0,65	0,42	0,60	3
Jakob ...	$18\frac{1}{4}$	prot.	Albessen (Pfalz)	Oeconom	0,68	0,75	0,70	0,65	0,80	0,75	0,85	0,68	0,65	1
bert.....	$15\frac{3}{4}$	kath.	Hirschbrunn	fürstl. Oberförster	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
seph.....	$17\frac{1}{4}$	„	Griesdorf (Oberbayern)	Bierbrauereibesitzer u. Oeconom	0,42	0,42	0,48	0,44	0,45	0,40	0,35	0,40	0,45	4

* konnte wegen Krankheit nicht locirt werden.
Preisträger: Nabinger, Jakob.

Zweiter Curs.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den ei[…] Fächern: Pflanzenbau.	Düngerlehre.	Viehzucht.	Chemie.	Arithmetik.	Deutsche Sprache.
1.	Abele, Wilhelm ...	$20^1/_4$	kath.	Döffernik i. Niederbayern	Glasfabrikbesitzer	0,65	0,56	0,70	0,62	0,54	0,45
2.	Andre, Johannes..	$18^1/_2$	prot.	Nürnberg	Kaufmann †	0,60	0,40	0,58	0,50	0,48	0,54
3.	Baldauf, Rudolph .	16	„	Dünkelsbühl	Rentbeamter †	0,55	0,50	0,50	0,54	0,52	0,60
4.	Beerschneider, Andr.	$19^1/_4$	kath.	Ballertshofen i. d. Oberpfalz	Oeconom	0,52	0,50	0,45	0,52	0,46	0,33
5.	Dergler, Konrad ..	19	prot.	Schwabach	Waffenschmied †	0,56	0,42	0,70	0,48	0,45	0,65
*6.	Eberhard, Adam ..	$17^3/_4$	„	Großgerau in Churhessen	Oeconomiepächter	—	—	—	—	—	—
7.	Eckstein, Jacob....	17	„	Lichtenhof	Gastw. u. Oeconom†	0,57	0,45	0,40	0,42	0,15	0,50
8.	v. Hafenbrädl, Ignaz	$17^1/_4$	kath.	Reeberg in Niederbayern	Gutsbesitzer	0,62	0,61	0,70	0,62	0,50	0,50
9.	Rabl, Ludwig	$17^3/_4$	„	Brennberg i. Niederbay.	Gutsbesitzer	0,60	0,54	0,60	0,50	0,47	0,50
10.	Ritter, Christoph ..	$16^3/_4$	„	Hexenacker in der Oberpf.	Oeconomieverwalt.	0,61	0,60	0,70	0,56	0,48	0,45
11.	Schmiedigen, Gust.	$18^1/_4$	prot.	Hilpoltstein	k. Advok. u. Gutsbes.	0,30	0,28	0,24	0,40	0,25	0,20
12.	Weber, Hermann .	$16^3/_4$	„	Friesenhausen in Oberfranken	k. Pfarrer.	0,60	0,54	0,58	0,62	0,54	0,65

* konnte wegen Krankheit nicht locirt werden.

Preisträger: Weber, Hermann.

Vorbereitungsklasse.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelne[…]: Theoretische Landwirthschaft.	Gemeinnützige Kenntnisse.	Rechnen.	Lesen.	Deutsche Sprache.	Geographie.	Zeichnen.
1.	Basel, Peter		kath.	Nittenau	k. Landrichter	0,40	0,40	0,35	0,40	0,45	0,36	0,1[illegible]
2.	Boeck, Eugen	13	prot.	Nürnberg	Drahtfabrikant	0,37	0,20	0.35	0,54	0,45	0,28	0,1[illegible]
3.	Deinhardt, Wilhelm	13	„	„	Kramkäufel	0,25	0,40	0,45	0,56	0,64	0,25	0,3[illegible]
*4.	Gambel, Johann ..	14	„	Gibitzenhof	Bäckermeister	—	—	—	—	—	—	—
5.	Gambel, Martin ..		„	„	„	0,34	0,34	0,40	0,40	0,50	0,48	0,1[illegible]
6.	Gebhardt, Ernst ...	$15^1/_4$	„	Thurnau	Apotheker	0,48	0,48	0,30	0,25	0,22	0,30	0,4[illegible]
7.	v. Häusler, Karl..	$14^1/_4$	kath.	Straßmaier in Oberbayern	k. Revierförster	0,36	0,36	0,45	0,50	0,50	0,25	0,4[illegible]
8.	v. Linck, Karl.....	$15^1/_2$	„	Bodenwöhr	k. Revierförster	0,41	0,41	0,50	0,60	0,64	0,40	0,7[illegible]
9.	Pfeiffer, Johann ..	15	prot.	Baiersdorf	Gastwirth u. Oeconom †	0,60	0,45	0,55	0,60	0,48	0,25	0,2[illegible]
10.	Rumpf, Johann ..	$14^3/_4$	kath.	Eichstädt	Brauerei- u. Oeconomiebesitzer	0,60	0,50	0,52	0,64	0,68	0,56	0,5[illegible]
11.	Schiesl, Karl	$14^1/_4$	„	Murnau i. Oberbay.	Brauerei- u. Oeconomiebesitzer	0,48	0,65	0,45	0,62	0,62	0,38	0,2[illegible]
**12.	Weidenkeller, Jakob		prot.	Kempten	Gerbermeister	—	—	—	—	—	—	—

* ist im Laufe des Jahres ausgetreten.

** besucht die lateinische Schule in Nürnberg.

Preisträger: Rumpf, Johann.

Praktischer Curs.

…en der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	
…Friedrich	$16^3/_4$	prot.	Nürnberg	Friseur.	Anmerkung: In diesem Curse wird kein theoretischer Unterricht mehr ertheilt.
… Johann	21	„	Doerflas in Oberfranken	Hutmann.	
… Ferdinand	$17^3/_4$	„	Triesdorf	k. Aufschläger.	
…r, Johann	$16^3/_4$	„	Nürnberg	Fabrikaufseher.	

2. Kreis-Gewerbsschule.

Erster Curs. Classe A.

…n der Schüler.	Alter	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten.						Allgemeiner Fortgangsplatz.
					Arithmetik und Geometrie.	Naturgeschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.	Französische Sprache.	Zeichnen.	
…Adolph	$12^1/_4$	prot.	Rennweg	Fabrikant	0,32	0,50	0,24	0,48	0,40	0,20	28
…. Adam	14	„	Nürnberg	Schuhmacher †	—	—	—	—	—	—	—
…Georg Leonhard.	$12^1/_2$	„	„	Schreinermeister †	0,40	0,45	0,40	0,50	0,30	0,48	26
…lfinger, H. C. A.	$13^3/_4$	„	„	Schuhmachermeister	—	—	—	—	—	—	—
…Ludwig Wilhelm	$13^1/_4$	„	„	Friseur	0,72	0,50	0,75	0,56	0,44	0,28	13
… Paulus	13	„	Doos bei Nürnberg	Fabrikant	0,42	0,45	0,60	0,50	0,36	0,48	25
…er, Fr. Wolfg.	14	„	Nürnberg	Lithograph	—	—	—	—	—	—	—
…Melchior.......	$14^1/_2$	kath.	Neumarkt	Maurermeister	0,70	0,60	0,75	0,58	0,45	0,52	12
…ann, Joh. Konr.	15	prot.	Nürnberg	Rauchwaarenhändler	—	—	—	—	—	—	—
…nann, Chr. H. K.	$13^1/_4$	„	„	Kaufmann	0,50	0,60	0,66	0,57	0,66	0,40	19
… Joh. Leonh. ..	14	„	„	Briefträger	0,25	0,40	0,32	0,45	0,25	0,52	32
…er, Jakob	$12^1/_2$	„	„	Hafnermeister	0,60	0,46	0,75	0,57	0,46	0,60	15
…n, J. Traug. Th.	$12^3/_4$	„	„	Schuhmacher	0,26	0,45	0,38	0,48	0,20	0,50	31
…ldolph	16	kath.	Scheßlitz	Landgerichts-Assessor †	—	—	—	—	—	—	—
…n, Joh. Karl..	14	prot.	Nürnberg	Sattlermeister	—	—	—	—	—	—	—
…Karl Konrad...	$16^1/_2$	„	„	Pfragner	0,50	0,58	0,64	0,55	0,51	0,58	20
…Andreas	$13^1/_4$	„	„	Spielwaarenmacher	0,30	0,42	0,18	0,50	0,30	0,40	29
… alentin	$13^1/_4$	„	Wöhrd	Quecksilber-Abzieher	0,54	0,50	0,53	0,55	0,56	0,56	18
…Adam Wilhelm	$13^1/_2$	„	Nürnberg	Gastwirth	0,70	0,72	0,82	0,68	0,64	0,80	3
…Nikolaus	13	„	Wöhrd	Zimmermeister	0,56	0,52	0,48	0,53	0,64	0,48	17
…Nikolaus	$12^3/_4$	„	Nürnberg	Portefeuille-Fabrikant	0,60	0,52	0,60	0,60	0,78	0,60	14
…e Arnold	$13^1/_4$	„	Rothrist i. d. Schweiz	Färbermeister	0,48	0,52	0,65	0,52	0,35	0,48	22
…, Gustav	$13^1/_4$	„	Nürnberg	Stallmeister	0,25	0,50	0,37	0,54	0,32	0,30	30
…, Georg Wilhelm.	13	kath.	„	Kupferstecher †	0,75	0,64	0,85	0,70	0,57	0,60	2
…r Gg. Christ. Dav.	$13^3/_4$	prot.	Röthenbach bei St. Wolfgang	Fabrikbesitzer	0,45	0,44	0,58	0,56	0,50	0,52	23

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs=N			
						Arithmetik und Geometrie.	Naturgeschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.
26.	Meyer, Friedr. Wilh. .	14³/₄	prot.	Nürnberg	Holzhändler	0,72	0,66	0,77	0,65
27.	Müller, Heinrich	15¹/₄	"	Tirschenreuth	Fabrikbesitzer	0,72	0,62	0,72	0,59
*28.	Nestler, Heinrich	16¹/₂	"	Nürnberg	Rechnungsführer	—	—	—	—
29.	Perl, Joh. Paul	22¹/₄	"	"	Malzfabrikant	0,68	0,80	0,80	0,70
30.	Pfeiffer, Georg Peter..	13³/₄	"	"	Großpfragner	0,75	0,60	0,72	0,62
31.	Pfirsch, Christ. Gg. Rud.	12³/₄	"	Wöhrd	Gastwirth	0,43	0,52	0,25	0,56
32.	Pflaumer, Fr. W. Osk.	16	"	Weißenburg	Goldarbeiter	0,75	0,58	0,61	0,57
33.	Pickel, Joh. Matth. Rob.	14¹/₄	"	Nürnberg	Schneider	0,76	0,66	0,81	0,60
34.	Pretscher, Karl Paulus	14	"	"	Optiker	0,34	0,52	0,31	0,54
*35.	Rauchenberger, Fr. Xav.	15¹/₂	kath.	Regensburg	Controleur bei der Staats=Schuldentilgungs=Special=Kasse	—	—	—	—
36.	Rudel, Johann Kaspar	14	prot.	Nürnberg	Schneidermeister	0,75	0,70	0,79	0,65
*37.	Ruckert, Fr. Karl Konr.	13¹/₄	"	"	prakt. Arzt	—	—	—	—
*38.	Schärtel, Friedr. Wilh.	15¹/₄	"	Wachstein	Schullehrer	—	—	—	—
*39.	Schnürer, Wilh. Herm.	14	"	Erlangen	Kaufmann	—	—	—	—
*40.	Sichermann, Friedrich .	13¹/₂	"	Kieselberg bei Nürnberg	Dosenfabrikant	—	—	—	—
41.	Städtler, Andreas.....	12³/₄	"	Nürnberg	Drechslermeister	0,50	0,46	0,66	0,57
42.	Wild, Johann	14	"	"	Privatier	0,73	0,72	0,86	0,68
43.	Zahn, Oskar	13³/₄	"	Eschenau	prakt. Arzt	0,66	0,64	0,66	0,65
44.	Ziegler, Joh. Wilh. ...	13³/₄	"	Nürnberg	Lackirer	0,55	0,56	0,66	0,57
	Hospitanten.								
45.	Eberhardt, August.....	13	"	München	Inspektor	—	—	—	—
46.	Obermann, Gg. Mich. .	13¹/₄	"	Wendelstein	Maurermeister	—	—	—	—
47.	Pretscher, Johann	16³/₄	"	Nürnberg	Optiker	—	—	—	—
48.	Quinat, Gg. Karl Wilh.	14¹/₄	"	Unterfichtenmühle	Glasschleifbesitzer	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.

Preisträger: 1. Wild, Johann. 2. Marx, Georg Wilhelm. 3. a. Köbler, Adam Wilhelm. 3. b. Rudel, J

Erster Curs. Classe B.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs=N			
						Arithmetik und Geometrie.	Naturgeschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.
1.	Adam, Hermann	13³/₄	prot.	Nürnberg	Fabrikbesitzer	0,62	0,66	0,81	0,6
*2.	Ammon, Christian Friedr.	14¹/₄	"	"	Zinngießer	—	—	—	—
*3.	v. Aufseß, Friedrich	16	"	Aufseß	Rittergutsbesitzer	—	—	—	—
4.	Ballheimer, Georg Ernst.	19¹/₂	"	Weiltingen	Schuhmacher	0,62	0,60	0,57	0,5
*5.	Bär, Johann Jakob	14³/₄	"	Nürnberg	Privatier †	—	—	—	—
6.	Beer, Emanuel.........	14¹/₄	"	Weiden	Spenglermeister	0,56	0,60	0,66	0,5

…men der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten.						Allgemeiner Fortgangsplatz.
					Arithmetik und Geometrie.	Naturgeschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.	Französische Sprache.	Zeichnen.	
…Johann Leonh. ..	12¾	prot.	Nürnberg	Kräuterhändler	0,25	0,50	0,32	0,50	0,30	0,34	29
…Johann David…	13	"	Marktbreit	Pfragner	0,42	0,54	0,45	0.48	0,45	0,46	23
…ler, Joh. Gottl. ..	12½	"	Nürnberg	Verwalter	0,75	0,54	0,45	0,56	0,54	0,69	5
…euer, Joh. Ferdin..	14	"	"	Farbenfabrikant	—	—	—	—	—	—	—
…Karl…………	13¾	kath.	"	Locomotiv-Führer †	0,60	0,62	0,62	0,62	0,48	0,70	8
…e, Friedrich…….	14¼	prot.	Gunzenhausen	Seifensieder	0,28	0,45	0,42	0,48	0,32	0,41	28
…Johann Thomas .	15½	"	Rocksdorf	Gastwirth	0,40	0,58	0,58	0,52	0,42	0,37	22
…Wilhelm……..	13	"	Rom	Fabrikbesitzer	0,46	0,68	0,61	0,62	0,56	0,41	17
…F. W. H. J. ….	14	"	Gunzenhausen	Apotheker	0,78	0,85	0,86	0,70	0,82	0,70	1
…ein, Anton Franz .	14½	"	Nürnberg	Büttner	—	—	—	—	—	—	—
…, Johann…….	13¾	kath.	"	Steinmetz	0,32	0,44	0,38	0,48	0,45	0,50	27
…Wilhelm……..	13	prot.	"	Hopfenhändler	0,72	0,62	0,76	0,66	0,70	0,45	4
…nn, Gottfried ….	16	"	"	k. Post-Official	—	—	—	—	—	—	—
…Friedr. Wilh. …	13	"	"	Polizei-Gefangenwärter	0,30	0,56	0,50	0,50	0,31	0,50	26
…Johann……….	15¼	"	Götteldorf	Müllermeister	—	—	—	—	—	—	—
…nann, Joh. Alb…	13¼	"	Wöhrd	Werkführer	0,52	0,54	0,72	0,58	0,72	0,38	13
…, Joh. Christ….	13¾	"	Nürnberg	Kammmacher	0,62	0,75	0,60	0,56	0,40	0,60	9
…Robert……….	13	"	"	Kaufmann	0,76	0,75	0,72	0,66	0,78	0,44	3
…Karl Gottlieb…	13¾	kath.	Nabburg	Wegmeister u. Brückenbau-Ingenieur	0,74	0,68	0,75	0,70	0,75	0,80	2
…lhafen, Karl Fr. .	14¼	prot.	Nürnberg	Gutsbesitzer	0,40	0,56	0,57	0,57	0,38	0,58	20
…agen, Christoph…	13¼	"	"	Werkführer	—	—	—	—	—	—	—
…n, Karl Heinrich .	15¾	kath.	Enkring	pens. Revierförster	—	—	—	—	—	—	—
…Friedrich………	12¾	prot.	Neuburg a. D.	Archivar	0,44	0,54	0,66	0,55	0,58	0,54	19
…thaler, Gg. Leonh.	12½	"	Nürnberg	Schuhmacher	0,32	0,52	0,51	0,52	0,44	0,75	25
…ich, Karl Pankrat.	12¾	"	"	Maurermeister	0,45	0,52	0,45	0,44	0,30	0,62	21
…er, Ludw. Karl..	13½	kath.	München	Eisenbahn-Official	0,25	0,48	0,24	0,45	0,21	0,52	30
…gel, Wilhelm….	13¾	prot.	Nürnberg	Nadler	—	—	—	—	—	—	—
…Joh. Wilhelm ..	14	"	Weißenburg	Wirthschaftsbesitzer	—	—	—	—	—	—	—
…Matthias…….	13¾	"	Nürnberg	Zimmermeister	0,70	0,64	0,58	0,57	0,62	0,68	6
…d, Christ. Ernst..	15	"	"	Portefeuilleur	—	—	—	—	—	—	—
…Johann Konrad	13¼	"	"	Kirchner	—	—	—	—	—	—	—
…Andreas…….	23½	kath.	Forchheim	Schullehrer	—	—	—	—	—	—	—
…Joseph……..	15¾	"	Neumarkt	Zimmermeister	0,51	0,60	0,61	0,56	0,49	0,64	15
…riedr. Erasmus..	13¾	prot.	Nürnberg	Schneidermeister	0,50	0,62	0,78	0,58	0,68	0,56	12
…th, Joh. Abraham	13½	"	"	Posamentier	0,52	0,60	0,45	0,58	0,36	0,68	16
…Johann…….	12¼	"	"	Verwalter †	0,50	0,60	0,52	0,56	0,45	0,38	18
…, Joseph……..	13	kath.	Oberau	Auditoriats-Aktuar	0,36	0,50	0,58	0,55	0,39	0,32	24
…ann, Franz…..	12¾	prot.	Nürnberg	Kaufmann	0,48	0,64	0,63	0,60	0,44	0,75	14
…spitanten.											
…dwig Karl Oskar	14	"	Kalchreuth	Schullehrer	—	—	—	—	—	—	—
…erger, Heinrich..	13¾	"	Wendelstein	Maurermeister	—	—	—	—	—	—	—
…Mathias ……	16¼	"	Nürnberg	Werkmeister	—	—	—	—	—	—	—
…Friedr. August ..	14	"	Lehengütingen	Müllermeister	—	—	—	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.

…Haas, Friedr. Wilh. Heinr. Jul. 2. Mottes, Karl Gottlieb. 3. Lorsch, Robert. 4. Herbst, Wilhelm.

Zweiter Curs.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten. Algebra.	Geometrie.	Chemie.	Physik.	Gewerbskunde.	Geschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.
1.	Barth, Karl	14¼	prot.	Nürnberg	Buchbinder	0,69	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,58
2.	Bauer, Julius	17½	"	"	Mechanikus	0,56	0,60	0,30	0,30	0,30	0,20	0,15	0,50
3.	Bauschinger, W. Ch.	14¼	"	"	Kammmacher	0,45	0,45	0,20	0,25	0,20	0,40	0,45	0,51
4.	Behl, Joh. Karl ..	14	"	"	Drechslermeister	0,74	0,50	0,50	0,55	0,50	0,65	0,60	0,60
*5.	Braß, Karl	15¼	"	Hof	Kaufmann	—	—	—	—	—	—	—	—
6.	Briegleb, Aug. Hugo	14	"	Nürnberg	Fabrikbesitzer	0,64	0,40	0,40	0,40	0,40	0,25	0,30	0,55
7.	Buckel, Baptist	17¼	"	Neumarkt	Hausmeister	0,67	0,36	0,50	0,50	0,50	0,40	0,45	0,53
8.	Bühl, Heinrich Gg.	15	"	Nürnberg	Polizei-Soldat	0,66	0,52	0,50	0,55	0,50	0,30	0,30	0,53
9.	Eisen, Karl	16	"	Schwabach	k. Sectionspalier	0,76	0,67	0,55	0,60	0,55	0,45	0,50	0,62
*10.	Erhard, Stephan ..	15¼	"	Nürnberg	Maurermeister	—	—	—	—	—	—	—	—
11.	Farnbacher, Bernh.	15	"	"	Bierbrauer	0,80	0,56	0,40	0,50	0,40	0,55	0,50	0,62
12.	Feldner, Eduard ..	15	"	Pappenheim	Müllermeister	0,69	0,52	0,50	0,55	0,50	0,40	0,45	0,52
13.	Felsenstein, Ch. Jul.	15	"	Eunreuth	k. Pfarrer	0,74	0,54	0,50	0,55	0,50	0,35	0,30	0,53
14.	Fikenscher, August .	16¼	"	Schnaittenbach	k. Landrichter	0,62	0,48	0,50	0,52	0,50	0,45	0,50	0,56
*15.	Frank, Felix	14	"	Nürnberg	Schullehrer	—	—	—	—	—	—	—	—
16.	Geyer, Wilhelm ...	16¼	"	"	Commissionär	0,70	0,57	0,55	0,58	0,55	0,40	0,45	0,59
17.	Goll, Lucian	14¼	"	"	Maurermeister	0,73	0,47	0,60	0,60	0,60	0,50	0,50	0,60
18.	Hamminger, Gg. H.	15¾	kath.	Birkelgut	Oeconom	0,68	0,34	0,40	0,35	0,40	0,35	0,35	0,54
*19.	Hausleiter, Joh. L.	14¼	prot.	Nürnberg	Hafnermeister	—	—	—	—	—	—	—	—
*20.	Holz, Heinrich	16¼	"	Altdorf	Oeconom	—	—	—	—	—	—	—	—
21.	Kilian, Otto	13	"	Nürnberg	Mechaniker	0,77	0,77	0,80	0,80	0,80	0,60	0,60	0,56
22.	Kohn, Emil	13¾	isr.	Mkt. Erlbach	Banquier	0,49	0,32	0,15	0,20	0,15	0,20	0,15	0,52
*23.	Köhler, Hermann .	14½	prot.	Nürnberg	Kaufmann	—	—	—	—	—	—	—	—
24.	Krämer, G. G. Fr.	15½	"	Uffenheim	Privatier	0,58	0,34	0,55	0,50	0,55	0,60	0,55	0,52
25.	Kugler, Georg	15¼	"	Nürnberg	Portefeuille-Fabrikant	0,73	0,68	0,70	0,70	0,70	0,60	0,55	0,62
26.	Lotter, Konrad	13	"	"	Optikus	0,75	0,56	0,60	0,62	0,60	0,45	0,50	0,57
27.	Merz, Hermann ..	15¾	"	"	Buchhändler	0,64	0,40	0,30	0,35	0,30	0,20	0,20	0,48
28.	Molzberger, Karl .	15¼	"	Postbauer	Privatier	0,56	0,44	0,50	0,55	0,50	0,25	0,25	0,48
29.	Müller, August ...	15¾	"	Hohenbirkach	k. Pfarrer	0,70	0,50	0,58	0,60	0,58	0,45	0,50	0,58
30.	Neubauer, Fr. Gg.	16½	kath.	Landau	k. Divisions-Kommando-Sekretair	0,50	0,38	0,30	0,40	0,30	0,30	0,25	0,52
31.	v. Oelhafen, Georg	16	prot.	Nürnberg	Gutsbesitzer	0,68	0,34	0,50	0,52	0,50	0,50	0,40	0,60
32.	Probst, Christian ..	15½	"	Dinkelsbühl	Stadtschreiber	0,80	0,74	0,80	0,80	0,80	0,65	0,60	0,65
*33.	Reichel, Theodor ..	16½	kath.	Mischelbach	Fürstl. Wrede'scher Revierförster	—	—	—	—	—	—	—	—
34.	Reisinger, Jakob ..	15	"	Aschaffenburg	Eisenbahn-Betriebs-Ingenieur	0,42	0,35	0,30	0,32	0,30	0,30	0,35	0,48
*35.	Rorich, Karl Franz	16	"	Nürnberg	Kunstmaler	—	—	—	—	—	—	—	—
*36.	Schuh, Karl	16¼	prot.	"	Kaufmann	—	—	—	—	—	—	—	—
37.	v. Schwarz, Gottl.	15¾	"	"	Rittergutsbesitzer	0,70	0,40	0,55	0,52	0,55	0,50	0,45	0,50
38.	Spitta, Herm. Karl	15	"	"	Kaufmann	0,73	0,50	0,50	0,55	0,50	0,75	0,70	0,55
39.	v. Thiereck, Adolph	14¾	kath.	Burghausen	k. Major	0,69	0,52	0,65	0,65	0,65	0,60	0,60	0,60
40.	Treuheit, J. Jos. A.	13¾	prot.	Nürnberg	Ultramarin-Arbeiter	0,42	0,38	0,38	0,40	0,38	0,40	0,35	0,54
41.	Vogtmann, A. G. J.	15½	"	"	k. Eisenbahn-Expeditor	0,62	0,40	0,55	0,52	0,55	0,45	0,50	0,60
42.	Wegler, Kaspar ...	16¼	"	"	k. Wechselnotar	0,64	0,48	0,65	0,65	0,65	0,60	0,60	0,65
43.	Weigel, Gustav ...	15	"	Stuttgart	Kaufmann	0,61	0,40	0,35	0,45	0,35	0,50	0,45	0,57
44.	Werder, Jakob ...	15½	ref.	München	Fabrik-Director	0,52	0,45	0,20	0,20	0,20	0,20	0,25	0,52

der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten: Algebra.	Geometrie.	Chemie.	Physik.	Gewerbskunde.	Geschichte.	Geographie.	Deutsche Sprache.	Französische Sprache.	Zeichnen.	Allgemeiner Fortgangsplatz.
pitanten.															
, Eduard ..	16	prot.	Nürnberg	Kaufmann	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Karl	16¼	"	"	prakt. Arzt	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Georg	17¾	"	"	Großpfragner	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Stephan..	15¼	"	"	Maurermeister	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
. Georg ...	15¼	"	"	Drechslermeister	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
holz, Eugen	20	"	Nördlingen	Kanzleirath	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.

Preisträger: 1. Probst, Christian. 2. Kilian, Otto. 3. Kugler, Georg. 4. Eisen, Karl.

Dritter Curs.

der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten: Algebra.	Geometrie.	Trigonometrie.	Darstellende Geometrie.	Mechanik.	Chemie.	Geschichte.	Deutsche Sprache.	Französische Sprache.	Zeichnen.	Allgemeiner Fortgangsplatz.
Moritz.....	16½	prot.	Haundorf	Schullehrer	0,80	0,87	0,75	0,75	0,70	0,65	0,65	0,70	0,70	0,80	2
r, Friedr. .	16¼	"	Fürth	Kaufmann	0,50	0,59	0,50	0,50	0,55	0,55	0,40	0,50	0,42	0,60	22
Joh. Leonh.	18½	"	Uffenheim	Oeconom	0,75	0,70	0,70	0,75	0,70	0,40	0,60	0,60	0,56	0,62	7
skar	16¼	"	Kehl a. Rhein	Kaufmann	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
, Joh. Mart.	16½	"	Nürnberg	Schneider	0,65	0,58	0,60	0,60	0,50	0,55	0,60	0,70	0,46	0,80	12
eit, Georg Wilh.	16¼	"	"	Färbermeister	0,75	0,64	0,70	0,60	0,70	0,60	0,45	0,55	0,50	0,50	10
ermann ..	16½	"	"	k. Pfarrer	0,80	0,87	0,65	0,75	0,70	0,68	0,50	0,60	0,52	0,56	4
oh. Jakob .	17	"	Sündersbühl	Schneidermeister	0,75	0,72	0,65	0,65	0,55	0,68	0,48	0,50	0,36	0,62	9
rnst	16	isr.	Mkt. Erlbach	Banquier	0,60	0,70	0,55	0,70	0,60	0,50	0,75	0,75	0,76	0,40	8
lder, Ludw.	14	prot.	Burgfarrnbach	Verwalter	0,80	0,70	0,65	0,75	0,70	0,80	0,70	0,65	0,48	0,50	3
Johann ..	16	"	Nürnberg	Bierbrauerei-Besitzer †	0,70	0,69	0,65	0,50	0,45	0,50	0,40	0,50	0,60	0,60	19
Wilhelm	16¾	"	Petersburg	Privatier	0,60	0,70	0,50	0,70	0,65	0,50	0,38	0,55	0,38	0,64	18
Anton ...	15¾	"	Nürnberg	k. Professor	0,65	0,67	0,55	0,70	0,60	0,65	0,40	0,55	0,32	0,52	14
arl	19¾	kath.	Michelbacher-Hütte	Hüttenbesitzer	0,70	0,87	0,60	0,65	0,60	0,65	0,60	0,65	0,53	0,56	6
er, Gottfr.	15¾	isr.	Baiersdorf	Pelzwaarenhändler	0,55	0,69	0,50	0,50	0,55	0,40	0,40	0,55	0,62	0,42	23
Georg ...	16¼	prot.	Gräfenberg	Kupferstecher	0,70	0,68	0,60	0,60	0,60	0,55	0,35	0,50	0,42	0,66	16
n, H. Gg.	19¼	"	Münchsteinach	k. Revierförster	0,60	0,70	0,60	0,75	0,60	0,55	0,55	0,55	0,52	0,70	13
, Ludw. J.	20¼	"	"	k. Revierförster	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Baptist ...	15¼	kath.	Kronach	Maurermeister	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Friedr. ..	17	prot.	Wachstein	Schullehrer	0,60	0,75	0,50	0,70	0,50	0,58	0,55	0,60	0,44	0,68	15
zen, Ad. .	20¼	"	Hilpoltstein	Advokat	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Alter.	Confession.	Geburtsort.	Stand der Eltern.	Fortgangs-Noten.							
						Algebra.	Geometrie.	Trigonometrie.	Darstellende Geometrie.	Mechanik.	Chemie.	Geschichte.	Deutsche Sprache.
22.	Schorr, Heinrich . .	17	prot.	Hof	Kassier	0,78	0,88	0,75	0,75	0,70	0,80	0,65	0,70
23.	Schultheiß, Alb. Fr.	15	„	Nürnberg	Redacteur	0,45	0,51	0,45	0,50	0,55	0,55	0,45	0,55
24.	Schuster, Theodor .	18½	„	„	Kaufmann	0,55	0,69	0,55	0,60	0,65	0,55	0,35	0,50
25.	Ulrich, Friedr.	18¼	„	„	Steinmetz †	0,55	0,61	0,55	0,60	0,50	0,58	0,35	0,55
* 26.	Wagner, Karl	19¼	„	Petersburg	Privatier	—	—	—	—	—	—	—	—
27.	v. Welser, Karl . . .	17¼	„	Ansbach	k. Bezirksgerichts-Direct.	0,80	0,88	0,75	0,75	0,60	0,50	0,55	0,60
28.	Wild, Georg Ludw.	15¼	„	Nürnberg	Großpfragner	0,70	0,70	0,60	0,75	0,60	0,60	0,45	0,50
29.	Wildt, Hans	15¼	„	„	Gasthofbesitzer	0,65	0,75	0,60	0,65	0 65	0,50	0,45	0,50
	Hospitanten.												
30.	Motschenbacher, Fr.	22½	„	Wendelstein	prakt. Arzt	—	—	—	—	—	—	—	—
31.	Serz, Steph. Sigm.	15¾	„	Nürnberg	Kunstanstalts-Besitzer †	—	—	—	—	—	—	—	—
32.	Stahl, Johann	16½	„	„	Wagnermeister †	—	—	—	—	—	—	—	—

* sind im Laufe des Jahres ausgetreten.

** konnte wegen Krankheit nicht locirt werden.

Preisträger: 1. Schorr, Heinrich. 2. Vögel, Moritz. 3. Längenfelder, Ludwig.

D. Statistische und historische Nachrichten.

ie Anstalt hatte bei dem Beginne des Schuljahres einen beklagenswerthen Verlust erlitten; ramts=Verweser für theoretische Landwirthschaft und Botanik an der Landwirthschafts= Friedrich Wüth, erkrankte, auf einer Ferienreise begriffen, in München und wurde Oktober 1858 durch den Tod hinweggerafft. Durch hohe Entschließung der kgl. Regierung ttelfranken vom 4. November 1858 wurde die verwaiste Lehrstelle der Landwirthschaft und dem Assistenten Firsching gnädigst übertragen.

eine Majestät der König haben, in Berücksichtigung eines unter Zustimmung des mmelten Landraths von Mittelfranken gestellten Antrags, die Aufstellung eines eigenen lehrers an der landwirthschaftlichen Erziehungsanstalt zu Lichtenhof allergnädigst zu ge= n geruht, und wurde durch hohe kgl. Regierungs=Entschließung vom 11. Juli d. J. diese is zur definitiven Besetzung dem Assistenten Fick zur Verwesung übertragen und zugleich diese Verwendung sich erledigende Assistenten=Stelle dem bisherigen Oekonomie=Prakti= Johann Them in widerruflicher Eigenschaft verliehen.

ie Funktion eines Assistenten für das chemische Laboratorium und physikalische Kabinet an gewerbschule wurde in widerruflicher Weise dem Kandidaten Richard Hagen übertragen, isherige Assistent Herzogenrath freiwillig seine Stelle niedergelegt hatte.

der Sonntags=Handwerkerschule wurde es nothwendig, eine dritte Parallel=Abtheilung Unterricht in der Arithmetik zu errichten, da wegen Ueberfüllung der beiden andern Ab= n der Unterricht kaum mehr gedeihlich fortgeführt werden konnte; durch hohe kgl. Re= =Entschließung vom 9. Dezember 1858 wurde dem Assistenten der Mathematik, Anton ie Ertheilung des Unterrichtes in dieser dritten Abtheilung zuerkannt.

it dem Beginne dieses Schuljahres wurden die vier neuen Zeichnungs=Säle von Seite tmagistrats Nürnberg dem kgl. Rektorate zur Benützung übergeben und von der Sonn= dwerkerschule bezogen. Dadurch ist nunmehr die Schule in den Stand gesetzt, den In= Nürnbergs einen geordneten und entsprechenden Unterricht im Zeichnen gewähren zu

Sammlungen und Lehrapparate, sowohl der landwirthschaftlichen als gewerblichen Ab= der Anstalt, sind durch entsprechende verfügbare Mittel, Dank der Municifenz der höchsten auch in diesem Jahre ergänzt und bereichert worden.

r Regiments=Arzt Dr. von Grauvogl überließ als Geschenk eine geordnete und reiche ng von Petrefacten dem Naturalien=Kabinete der Schule, für welche schöne Gabe dem= rmit der wärmste Dank ausgesprochen wird.

Zu gleichem Danke fühlt man sich gegen Herrn Dr. Schallern verpflichtet, welche[r]
Schule eine ähnliche Sammlung zum Geschenk gemacht hat.

In den Wintermonaten wurden im Lokale unserer Schule eine Reihe von Vorträgen a[us]
dem Gebiete der Physik von Herrn Professor Dr. Stölzel gehalten, welche sich auch, wie i[n]
Vorjahren, einer sehr lebhaften Theilnahme von Seite der Gewerbtreibenden zu erfreuen ha[tten].

Was endlich die Frequenz der Gesammt-Anstalt der Kreislandwirthschafts- und Gew[erb]-
schule betrifft, so entziffert sich dieselbe in folgender Weise:

a) Landwirthschaftliche Abtheilung.

Kreis-Landwirthschaftsschule.

Anzahl der Schüler im I. Curs 28
" " " " II. " 21
" " " " III. " 18
6[7]

2. Ackerbauschule.

Anzahl der Schüler im I. und II. Curs 18

3. Vorbereitungsschule.

Anzahl der Schüler im I. Curs 12

4. Praktischer Curs.

Anzahl der Schüler 4
3[4]

b) Gewerbliche Abtheilung.

1. Kreis-Gewerbsschule.

Anzahl der Schüler im I. Curs A 44
" " Hospitanten 4
" " Schüler im I. Curs B 44
" " Hospitanten 4
" " Schüler im II. Curs 44
" " Hospitanten 6
" " Schüler im III. Curs 29
" " Hospitanten 3
78

2. Elementar-Zeichnungsschule.

Anzahl der Schüler des Lehrers Rosée 127
" " " " Rosenschon 128
5[5]

3. Die Sonntags-Handwerkerschule.

Anzahl der Schüler des Lehrers Eberlein 160
" " " " Grünewald 237
" " " " Kellner 168
" " " " Maar 228
" " " " Prof. Mayer 148

Seite . . . . . . 3[4]

	Uebertrag		534
Anzahl der Schüler des Lehrers	Möbius	196	
" " " " "	Rosée	125	
" " " " "	Rosenschon	162	
" " " " "	Ziegler	217	
			1641
	Anzahl der Schüler und Hospitanten		2175

lußer dem Zeichnungsunterricht, den jeder Schüler in der Sonntags-Handwerkerschule er-hielten noch Unterricht:

in der Arithmetik durch den Lehrer	Dengler	82
" " " " " "	Kellermann	71
" " " " " "	Faist	83
" " Geometrie " " "	Marr	49
" " Physik " " "	Prof. Weiß	35
" " Chemie " " "	Hagen	20
" " Gewerbsplastik " "	Heller	90

ɜeine Majestät der König haben inhaltlich Allerhöchsten Rescripts des kgl. Staats-iums des Handels und der öffentlichen Arbeiten vom 5. Juli l. J. zur Leitung der Ab-ıl- und Schlußprüfung an der hiesigen Kreisgewerbsschule und an der landwirthschaftlichen ɛrziehungs-Anstalt zu Lichtenhof, sowie zu den betreffenden Visitationen dieser Unterrichts-ın den Universitätsprofessor und Akademiker Herrn Dr. Philipp Jolly in München als cial-Prüfungs-Commissär allergnädigst zu ernennen geruht.

ıie Prüfungen werden am 28. Juli beginnen und an den folgenden Tagen fortgesetzt

ıer Anfang des nächsten Schuljahres wird hiemit auf Montag den 17. Oktober d. J. t.

Nürnberg, den 26. Juli 1859.

gl. Rectorat der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule.

Dr. Rose.

II.

Die polytechnische Schule.

Schuleinrichtung.

A. Vorstand und Lehrpersonale.

Rektor: J. M. Romig.

Lehrpersonale:

r Christian Böhrer, für Baukunde und architektonisches Zeichnen.
Stadtkaplan F. Henning, für den katholischen Religionsunterricht.
G. Irmisch, für praktische Mechanik und Maschinenkunde.
F. A. Klingenfeld, für darstellende Geometrie und Maschinenzeichnen.
Chr. Albr. Lenz, Erzgießer, für Formen und Gießen.
Th. Leykauf, für theoretische und analytische Chemie.
tor Romig, für analytische Geometrie und Mechanik.
r Dr. Rose, Rektor der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule, für reine Mathematik (ebene und sphärische Trigonometrie, höhere Gleichungen) und Vermessungskunde.
Pfarrer K. Rüdel, für den protestantischen Religionsunterricht.
Dr. A. Weiß, für Physik und höhere Mathematik (Theorie der Funktionen und Differential- und Integralrechnung).
Assistent bei dem Unterricht in der Chemie: Herr G. Kittel.
Assistent bei dem Unterricht in der Physik: Herr H. Köpping.

B. Unterrichtsgegenstände.

Religionsunterricht.
die protestantischen Schüler des ersten Curses:
Das vorgeschriebene Lehrbuch „Grundlinien zum Religionsunterricht an den obern Classen ηrter Schulen von Dr. G. Thomasius“ wurde erklärt und dabei Erläuterungen aus Kirchengeschichte eingeflochten.
die katholischen Schüler des ersten Curses:
Im Wintersemester: Die Lehre von den Gnadenmitteln.

Im Sommersemester: Uebersichtliche Darstellung des zweiten Zeitraums der Kirch[…]schichte, von Bonifacius bis zur abendländischen Kirchenspaltung — vom VIII. bis […] Jahrhundert.

II. Der wissenschaftlich-technische Unterricht an dieser Schule war über die drei Curse […] folgt, vertheilt:

Erster Curs.

1) Mathematik. Wöchentlich 16 Stunden.

a) Trigonometrie. 3 Stunden wöchentlich. Lehrer: Professor Dr. Rose.

Betrachtung der trigonometrischen Funktionen für sich; Vergleichung derselben u[…] einander; Berechnung derselben; ebene Trigonometrie im engern Sinne; Polygonom[…] Cyclometrie. Analytische Entwicklung der sphärisch-trigonometrischen Formeln; Auflö[…] des sphärischen Dreiecks. Einiges aus der sphärischen Astronomie.

b) Analytische Geometrie. 4 Stunden wöchentlich. Lehrer: Professor Romig.

α) In der Ebene. Bestimmung der Lage eines Punktes, einer Geraden, eines K[…] auf der Ebene bezüglich zweier rechtwinkliger oder schiefwinkliger Axen. Lehrsätze[…] Aufgaben über gerade Linien, deren Durchschnitte und Winkel ꝛc. ꝛc. Die Gleich[…] der drei Curven des zweiten Grades. Geometrische Oerter. Transformation de[…] ordinaten. Polarcoordinaten. Diskussion der allgemeinen Gleichung des zweiten […] des mit zwei Veränderlichen. Tangenten, Normalen, Asymptoten, konjugirte Durch[…] und Axen. Die wichtigsten transcendenten Curven.

β) Im Raume. Linearprojection eines Systems von Geraden. Relationen aus den […]jektionen auf verschiedene Axen. Projektionen ebener Flächen. Die ebene und […] Linie im Raume. Aufgaben über Ebenen und gerade Linien bezüglich schiefwi[…] und rechtwinkliger Axen. Transformation der Coordinaten. Euler'sche Formeln. […]larcoordinaten. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades mit 3 Veränder[…] Vereinfachung derselben. Die fünf Flächen des zweiten Grades und ihre A[…] Aufgaben zur Uebung.

c) Lehre von den Funktionen und Reihen. Wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: […]fessor Dr. Weiß.

Einleitung in die höhere Mathematik. Kombinationslehre. Reihenlehre. Differenz[…] Interpolation derselben. Entwicklung von Ausdrücken, namentlich der einfachen, in […]liche Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen einer darin enthaltenen Größe fortge[…]

d) Theorie der Gleichungen. Wöchentlich 1 Stunde. Lehrer: Professor Dr. Ro[…]

Rechnung mit imaginären Ausdrücken; allgemeine Auflösung der Gleichungen d[…] ersten Grade; die reciproken Gleichungen; allgemeine Eigenschaften der höhern Gl[…]gen. Auflösung numerischer Gleichungen von jedem Grad.

e) Darstellende Geometrie, Wöchentlich 6 Stunden. Lehrer: Professor Klinge[…] (Nach eigenem Lehrbuch.)

Cursorische Repetition der Aufgaben über Punkte, Gerade und Ebenen. Ueb[…] von einem Tafelsystem zu einem anderen. Allgemeine Regeln zur Darstellung von[…]ven. Construction der Linien zweiter Ordnung, der Cycloiden und der Schraube[…]

sowie der Tangenten und Normalen dieser Curven. — Eintheilung der krummen Flächen. Graphische Bestimmung derselben. Tangenten und Tangentialebenen an krummen Flächen. Schnitte von Flächen; Tangenten an diesen Schnitten. Abwickelung entwickelbarer Flächen. — Schattenconstruction. — Perspective.

hysik. Wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Weiß.

Einleitung. Allgemeine Eigenschaften der Körper. — Elementare Entwicklung der statischen und dynamischen Hauptsätze und Anwendung derselben zur Erklärung verschiedener Apparate der Physik und der Technik. Einfache Maschinen, Wage, Theilmaschine, Pendel, Fallmaschine ꝛc. Barometer, Pumpen, Gasometer ꝛc. — Wärmelehre. — Magnetismus und Galvanismus.

eichnen. Wöchentlich 8 Stunden. Lehrer: Professor Christ. Böhrer.

) Die griechischen Säulenordnungen aus dem Detail zusammengesetzt.

) Verzeichnen von Haupt-, Gurt- und Sockelgesimsen, von Thüren und Fenstergruppirungen, als Anwendung der griechischen Säulenordnungen in der neuern Architektur, nach Schinkel, Klenze und Gärtner; dann Construction der altdeutschen Gesimse, Maaßwerke ꝛc.

) Anwendung der Schattenconstruction und Uebung im Tuschen als Anschluß ad b.

) Ornamentenzeichnen, 1) nach Vorlagen, 2) nach Gypsmodellen.

) Situationszeichnen.

Zweiter Curs.

athematik. Wöchentlich 4 Stunden.

Differential- und Integralrechnung. Lehrer: Professor Dr. Weiß.

usführliche Lehre der Differentialrechnung, sowie der Elemente des Integralcalculs.

echanik. Wöchentlich 6 Stunden. Lehrer: Professor Romig.

) Statik des materiellen Punktes. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Gleichgewicht der Kräfte an einem Punkte, und zwar, wo es erforderlich, mit Berücksichtigung der Reibung. Beispiele und Uebungen.

) Statik fester Systeme. α) Einleitende Sätze. Gegenpaare. Zusammensetzung und Zerlegung derselben. Kräfte von parallelen und nicht parallelen Richtungen am festen System. Resultante derselben, oder Zurückführung auf eine Kraft und ein Gegenpaar. β) Gleichgewicht am freien und unfreien System, mit und ohne Reibung. Beispiele und Uebungen. γ) Schwerpunkt und analytische Bestimmung desselben. δ) Anwendung der statischen Lehren auf das Gleichgewicht an einfachen und zusammengesetzten Maschinen mit Berücksichtigung der Widerstände.

) Dynamik des materiellen Punktes. α) Freie geradlinige Bewegung. β) Freie krummlinige Bewegung. γ) Bewegung auf vorgeschriebenem Wege; statischer und dynamischer Druck. — Viele Beispiele, Uebungen und Anwendungen.

hysik. Wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Weiß.

Optik.

hemie. Wöchentlich 8 Stunden. Lehrer: Professor Leykauf.

) Wärme, Electricität und Affinität in gegenseitiger Beziehung. Gewichte; specif. Gewicht,

Aequivalente und specifische Wärme. Krystallisation, Amorphie, Allotropie, Isomor[...] und Wärmeerscheinungen; Reihung der Elemente.

b) Eigenschaften der Elemente. Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenstoff, Stickstoff, sowie[...] Verbindungen. Atmosphärische Luft, Wasser, Kohlensäure, Ammoniak und Verwe[...] produkte in ihrer Bedeutung für's Allgemeine. Brennmaterialien. Trockne Destil[...] Verbrennungsprozeß. Verbrennungsapparate für gegebenes Brennmaterial und g[...] Zweck. Beleuchtung. Metallurgische Processe. Metalle und deren Verbindunge[...] besonderem Bezug auf die Technik.

c) Chemie der organischen Körper.

Bildungsstätten der organischen Körper. Organisation. Zelle. Gefäße, Fas[...] darauf sich gründende Eintheilung der organischen Körper nach Familien; Betra[...] derselben als homologe Reihen. Kohlenhydrate, Proteinkörper 2c. Die einzelnen [...] dieser Familien in theoretischer und technischer Beziehung.

Entwicklung und Nährung des Lebens im Dunkeln, im Lichte. Gährungen un[...] auf sich stützende technologische Processe. Nahrungsmittel im Allgemeinen und A[...] deprodukte.

Die Vorträge wurden durch Vorzeigen von Natur- und Industrie-Produkten, [...] durch chemische Experimente näher zu erläutern gesucht.

5) Zeichnen. Wöchentlich 12 Stunden.

α) Architektonisches Zeichnen. Wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Professor Ch[...] Böhrer.

a) Entwerfen und Verzeichnen von Façaden classischer Baustyle, verbunden mit den [...] trägen: Die Entwicklung und Grundzüge dieser Bauweisen, sowie ihre Motivir[...] der Gegenwart; dann über die Hauptformen der Gebäudeansichten.

b) Constructionszeichnen in Verbindung mit dem Vortrage der Constructionslehre.

β) Maschinenzeichnen. Wöchentlich 8 Stunden. Lehrer: Professor Klingenfel[...]

Vorträge über die Eigenschaften und die Art der Bearbeitung der zum Maschi[...] verwendbaren Materialien; elementare Mechanik nebst der Theorie der Festigkeiten [...] die Bewegungsmechanismen. — Construction der einzelnen Maschinentheile, als: S[...] ben, Wellen, Achsen und Zapfen; Kuppelungen, Lager, Rollen, Zahnräder, Sch[...] ohne Ende, Hebel, Kurbel, Balancier 2c. theils nach Redtenbacher, theils nach Mo[...] Reuleaux. — Excursionen in Fabriken.

6) Baukunde. Wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Prof. Christ. Böhrer.

α) Baumaterialienlehre.

a) Natürliches und künstliches Steinmaterial.

b) Verbindungsmittel der Bausteine, dann Anfertigung verschiedener in der Baukun[...] bräuchlicher Kitte, sowie über Erzeugung und Beseitigung der an Gebäuden vo[...] menden Mauersalze.

c) Vom Bauholze; Nadel- und Laubhölzer, Faschinen, Rohr, Moos, Stroh und [...]

d) Von der Entstehung und Vertilgung des Hausschwamms.

e) Von den Metallen.

f) Vom Fensterglas.

g) Von den Farbmaterialien und ihren Bindemitteln. Excursionen in Steinbrüche, Kalk- und Ziegelbrennereien.

Constructionslehre.

Steinconstruction.

a) Von dem Baugrunde;
b) Absteckung des Baugrundes;
c) Grundgraben und Ausschalen des Baugrundes;
d) Die Construction der Mauerverbände;
e) Die verschiedenen Mauern und deren Construction;
f) Von den Gewölben, ihre Entstehung und Entwickelung;
g) Von den Bogenlinien überhaupt;
h) Construction der Mauerbögen, sowie die der verschiedenen Gewölbe, als: Tonnen-, Kappen-, Kreuz-, Stern-, Kloster-, Kuppel-, böhmischen-, Spiegel-, Mulden- und Topf-Gewölbe;
i) Von den Feuerungsanlagen;
k) Der Treppenbau in Stein;
l) Die Construction der Ziegel-, Schiefer-, Lehm- und Steinpappe-Dächer.

rmessungskunde. Wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Prof. Dr. Rose.

Beschaffenheit, Zweck und Gebrauch der verschiedenen Meßinstrumente: Prüfung und Be- tigung derselben. Vertikal- und Horizontalstellung gerader Linien und Ebenen. Absteckung Messung gerader Linien; Winkelmessungen. Aufnahme der Dreiecke und Messung unzu- glicher Geraden. Betrachtung des Einflusses, den die unvermeidlichen Fehler in der ssung der gegebenen Stücke eines Dreiecks auf die aus demselben durch Zeichnung oder hnung hergeleiteten übrigen Stücke desselben ausüben. Aufnahme der Vielecke. Trigo- netrische Höhenmessungen; Nivelliren.

Uebungen im Freien im Messen und Nivelliren, woran auch die Eleven des dritten Cur- Antheil nahmen.

Dritter Curs.

thematik. Wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Professor Dr. Weiß.

Differential- und Integralcalcul mit dem zweiten Cursus gemeinschaftlich.

chanik. Wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Professor Romig.

Nachträgliches aus der Statik und Dynamik des materiellen Punktes. Theorie der An- ungen. Dynamik fester und veränderlicher Systeme. Hydrostatik. Hydrodynamik.

schinenkunde. Wöchentlich 4 Stunden. Lehrer: Prof. Irmisch.

Die Dampfmaschinen, betrachtet in ihren einzelnen Theilen, deren Funktionen und Con- tion. Die Dampferzeugungsapparate. Die vertikalen und horizontalen Wasserräder. nöthige Technische über die Zwecke der verschiedenartigen Formen der in den behandelten chinen rc. vorkommenden einzelnen Theile unter Angabe der neueren Constructionsweisen deren Verhältnisse.

4) **Chemische Analyse.** Wöchentlich 9 Stunden. Lehrer: Professor **Leykauf.**

a) Vortrag über chemische Analyse. Gang der Analyse zur Auffindung der Grupp[e]
der einzelnen Glieder. Kalien, Erden, Metalloxyde, Säuren, indifferente Körper.

b) Uebungen der Schüler in qualitativer Analyse. Bestimmung der Körper in ei[n]
Verbindungen.

Analyse der Verbindungen höherer Ordnung, der Gemenge von mehreren [a]
Schwefelmetallen, Chlorverbindungen ꝛc. Bestimmung der organischen Säuren, [B]
und deren Verbindungen mit anorganischen Körpern.

5) **Baukunde.** Wöchentlich 2 Stunden. Lehrer: Professor Christ. **Böhrer.**

Constructionslehre.

1. **Holzconstruction.**
   a) Die sämmtlichen Holzverbindungen.
   b) Construction der Balkenlager.
   c) Construction der verschiedenen Dachstühle mit ihren Schiftungen.
   d) Häng- und Sprengwerke.
   e) Der Treppenbau in Holz.
2. **Eisenconstruction.**
   a) Die Verbindungen des Schmied- und Gußeisens.
   b) Construction eiserner Balkendecken; Vaur'sches und Thuasn'sches System, soi[e]
   Systeme von Fox und Barrett.
   c) Von den eisernen Dachstühlen.
   d) Der Treppenbau in Eisen.
   e) Blechbedachung.
3. **Der innere Ausbau.**
   a) **Haupteigenschaften und Grundsätze**
      α) der innern Einrichtung der Gebäude im Allgemeinen,
      β) der einzelnen Theile eines Wohngebäudes.
   b) **Praktische Ausführung.**
      α) Die verschiedenen Fußböden nnd Decken,
      β) Construction der Thüren, Fenster, Vorläden und Täfelwerke,
      γ) die Kamin-, Ofen-, Luft-, Dampf- und Wasser-Heizung.

6) **Zeichnen.** Wöchentlich 14 Stunden.

a) **Architektonisches Zeichnen.** Wöchentlich 6 Stunden. Lehrer: Professor Cr
Böhrer.

α) Entwerfen und Verzeichnen von Façaden classischer Baustyle, wie im zweiten [
β) Ausarbeitung von Entwürfen nach gegebenen Programmen, in Grund- und A[
dann Längen- und Querdurchschnitten, mit Rücksichtnahme auf den erklärten [

b) **Maschinenzeichnen.** Wöchentlich 8 Stunden. Lehrer: Professor **Klingen**[

Zeichnen ganzer Maschinen nach von den Schülern selbst gemachten Aufnah[
den hiesigen k. Eisenbahnwerkstätten. — Excursionen in Fabriken.

Praktischer Curs in der mechanischen Werkstätte.

)ie Uebungen in der Werkstätte wurden von 9 früheren Zöglingen fortgesetzt. Den größten der Uebungszeit für die 13 neu Eingetretenen nahmen die Elementarübungen im Feilen, ı, Bohren in Anspruch. Neu angefertigt wurden im Laufe des Schuljahres 4 Modelle, die erung und Fortpflanzung der Bewegung betreffend; dann vielerlei verschiedene Werkzeuge, aus Bedürfniß, theils als Feil- und Drehübungen. Die Arbeitszeichnungen wurden von chülern nach vorgegebenen Croquis geliefert. Je nach Befähigung führten die Zöglinge die :n theils selbständig, theils unter Mitwirkung des Lehrers aus; gute, dem Zweck vollständig chende Herstellung war hiebei stets Hauptbedingung.

Praktischer Curs in der Gießerei.

)ie Schüler erhielten Unterricht im Formen in Sand, Gießen und Ciseliren, wobei dieselben iefs und Ornamente anfertigten, auch kleine Statuen mit Keilstücken in Sand formten, und ciselirten.

Verzeichniß der Schüler der polytechnischen Schule.

Abstufung der Fortgangsnoten: Erste Note: Von 1,00 bis 0,75 .... vorzüglich.
Zweite „ „ 0,74 „ 0,50 .... gut.
Dritte „ „ 0,49 „ 0,25 .... mittelmäßig.
Vierte „ „ 0,24 „ 0,00 .... gering.

Erster Curs.

Fortlaufende Nr.	Namen der Schüler.	Geburtsort.	Alter.	Confession.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten a[…] zelnen Fäch[…]			
						Trigonometrie.	Analytische Geometrie.	Analysis des Endlichen.	Theorie der Gleichungen.
1.	Braß, Jul. Friedr.	Hof	$17^5/_6$	prot.	Buchhalter	—	—	—	—
2.	Brock, Friedrich....	Roth	$18^3/_4$	„	Pfarrer	0,46	0,31	0,48	0,46
3.	Bühlmeier, Leonhard	Weidenbach	18	„	Eskadronsschmied †	0,56	0,36	0,48	0,50
4.	Dürr, Georg	Eltmann	$16^1/_4$	kath.	Zimmermeister	0,61	0,68	0,48	0,56
5.	Elgaß, Oskar......	Rheinzabern	$18^1/_4$	„	Kantonsarzt	0,61	0,54	0,59	0,54
6.	Ernst, Julius......	Frankfurt a. M.	$17^1/_{12}$	„	Oberpostamts-Sekretär	—	—	—	—
7.	Friedrich, Johann ..	Diespeck	$18^7/_{12}$	prot.	Schneidermeister	0,78	0,46	0,55	0,74
8.	Fröber, Joh. Karl .	Unterthalau	$17^2/_3$	„	Landwirth	—	—	—	—
9.	Funk, Leonhard	St. Georgen	$18^5/_6$	„	Werkführer	0,56	0,40	0,55	0,53
10.	Glaser, Karl Andr..	Kirchheimbolanden	18	„	prakt. Arzt †	0,55	0,53	0,51	0,54
11.	Haindl, Karl August	München	$17^7/_{12}$	kath.	Gutsbesitzer †	—	—	—	—
12.	Heppner, Lorenz ...	Nürnberg	$21^1/_4$	prot.	Kassier	—	—	—	—
13.	Hilgard, Victor	Speier	$18^5/_{12}$	„	Gutsbesitzer	0,46	0,46	0,54	0,40
14.	Hofmann, J. Leonh.	Fürth	17	„	Schlossermeister	0,60	0,46	0,56	0,55
15.	Kappelmeier, Georg	Regensburg	$16^3/_4$	„	Sattlermeister	0,55	0,70	0,62	0,50
16.	Kirchner, Konrad ..	Bamberg	$19^1/_6$	kath.	prakt. Arzt †	0,63	0,62	0,49	0,51
17.	Kleinlein, Joh. Paul	Burgfarnbach	$16^{11}/_{12}$	prot.	Bäckermeister †	0,63	0,56	0,63	0,56
18.	Klingel, Philipp ...	Kleinbockenheim	$21^5/_{12}$	„	Ackersmann	0,53	0,53	0,53	0,50
19.	Kolb, Johann	Bayreuth	$17^3/_4$	„	Webermeister	—	—	—	—
20.	Langhans, H. W. ..	Rennweg bei Nürnberg	$15^1/_4$	„	Flaschnermeister †	0,71	0,75	0,66	0,63
21.	Lehner, Johann....	Lenkermühle	$21^5/_6$	„	Müllermeister	0,51	0,43	0,52	0,49
22.	Leibig, Ludwig.....	Sulzbach	$18^1/_3$	„	Gürtlermeister	0,46	0,48	0,55	0,46
23.	Löscher, Matthäus..	Erlangen	$16^3/_4$	„	Bäckermeister	0,53	0,27	0,48	0,49
24.	Meiser, Friedrich...	München	18	kath.	Bezirksgeometer	0,51	0,52	0,49	0,46
25.	Müller, Georg.....	Nürnberg	18	prot.	Färbermeister	—	—	—	—
26.	Nusser, Joh. Gottlob	Schwabach	18	„	Fabrikarbeiter	0,85	0,67	0,59	0,86
27.	Pemsel, Paul......	Erlangen	$19^1/_3$	„	Metzgermeister	0,59	0,55	0,59	0,55
28.	Pflaumer, Karl Aug.	Weißenburg	$17^1/_2$	„	Tuchfabrikant	0,65	0,50	0,55	0,55
29.	Rehm, Emil.......	Neustadt a. d. Aisch	$16^1/_2$	„	k. Appellations-Gerichts-rath	0,60	0,37	0,42	0,56
30.	Sattler, Ernst	Schweinfurt	$18^7/_{12}$	„	Fabrikant	—	—	—	—
31.	Serini, Otto	Zweibrücken	$19^2/_3$	„	k. Appellations-Gerichts-rath	0,61	0,56	0,52	0,56
32.	Seyler, Emanuel ..	Kadolzburg	$18^1/_4$	„	Pfarrer	—	—	—	—
33.	Schleicher, G. W...	Nürnberg	$16^1/_6$	„	Kaufmann	0,80	0,52	0,57	0,81
34.	von Sperl, Aug. Fr.	Lichtenwald	$16^1/_6$	„	Hammergutsbesitzer	—	—	—	—
35.	Straub, Karl......	Nürnberg	$17^2/_3$	kath.	k. Major	0,61	0,65	0,55	0,55
36.	Wagner, Fr. Gottfr.	„	$17^1/_6$	prot.	Bankspeerer	0,65	0,41	0,54	0,56
37.	Wendler, Gg. Konr.	Kainsbach	$18^1/_3$	„	Schullehrer	0,50	0,58	0,52	0,48
38.	Wolf, Hugo	Ziegelhütte	$21^{11}/_{12}$	„	k. Revierförster	—	—	—	—
39.	Wüstendörfer, Joh. Christ. Mich......	Fürth	$15^3/_4$	„	Schreinermeister	0,51	0,46	0,50	0,48

Die Eleven: Braß, Ernst, Fröber, Haindl, Kolb, Müller, Sattler, Seyler, v. Sperl und Wol[f]
des Schuljahres ausgetreten.

Zweiter Curs.

…er Schüler.	Geburtsort.	Alter.	Confession.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern.							
					Differential- u. Integralrechn.	Chemie.	Physik.	Mechanik.	Vermessungskunde.	Baukunde.	Architecton. Zeichnen.	Maschinenzeichnen.
…einrich …	Kleinschwarzenbach	20	prot.	Landwirth	0,60	0,53	0,71	0,55	0,52	0,63	0,68	0,59
…der, Joh. G.	Nürnberg	$19^1/_6$	„	Porzellanmaler	—	—	—	—	—	—	—	—
…rl Gustav .	Hof	$19^1/_2$	„	Buchhalter	—	—	—	—	—	—	—	—
Wilhelm .	Nürnberg	$17^1/_2$	„	k. Eisenbahn-Expeditor	0,53	0,40	0,66	0,47	0,57	0,63	0,67	0,66
…Karl …..	Bamberg	18	kath.	Schuhmachermeister	0,51	0,59	0,60	0,49	0,65	0,58	0,68	0,56
…iller, Otto	Kempten	$17^1/_2$	„	Schlossermeister	0,50	0,56	0,60	0,42	0,59	0,53	0,49	0,60
…h. Christian	Nürnberg	$19^1/_6$	prot.	Tischlermeister	—	—	—	—	—	—	—	—
… Johann ..	Ansbach	$20^{11}/_{12}$	„	Hausbesitzer	—	—	—	—	—	—	—	—
…r, Wilhelm	Nürnberg	$19^1/_6$	„	Kaufmann	0,48	0,63	0,59	0,47	0,56	0,61	0,66	0,68
…oh. Chr. Gg.	Bernstein	$17^1/_4$	„	Landwirth	0,69	0,54	0,74	0,64	0,65	0,73	0,67	0,70
…, Ludwig .	Aschaffenburg	$19^1/_{12}$	„	Gasthofbesitzer	—	—	—	—	—	—	—	—
…, Karl …	Hof	$18^5/_{12}$	„	Posamentier	—	—	—	—	—	—	—	—
…hristian …	„	$18^7/_{12}$	„	Tischler	0,58	0,59	0,64	0,45	0,56	0,63	0,76	0,64
Theodor .	Leitheim	$20^5/_6$	„	k. Kämmerer	0,52	0,52	0,65	0,45	0,56	0,57	0,47	0,61
…kob ……	Bierbach	$18^{11}/_{12}$	„	Maurermeister	0,65	0,51	0,70	0,49	0,65	0,68	0,71	0,69
…Joh. Thom.	Nürnberg	$20^1/_2$	„	k. Notar	0,58	0,64	0,64	0,49	0,51	0,64	0,73	0,56
…ilhelm …	Wiesentfels	$18^1/_2$	„	Revierförster	0,55	0,52	0,62	0,51	0,59	0,69	0,70	0,60

…Böhmländer, Braß, Hahn, Neumeyer und Scheubner sind im Laufe des Schuljahres ausgetreten.
…war den größten Theil des zweiten Semesters hindurch krank und konnte deßhalb keine Noten über den Jahresfortgang erhalten.

Dritter Curs.

…er Schüler.	Geburtsort.	Alter.	Confession.	Stand der Eltern.	Fortgangsnoten aus den einzelnen Fächern.						
					Differential- u. Integralrechn.	Chemie.	Mechanik.	Maschinenkunde.	Baukunde.	Architecton. Zeichnen.	Maschinen-Zeichnen.
…riedrich …	Vohenstrauß	$20^5/_{12}$	prot.	Wagnermeister	0,60	0,61	0,66	0,59	0,71	0,72	0,59
…arl Wilh. .	Fürth	$19^2/_3$	„	Kaufmann †	—	—	—	—	—	—	—
…l ……..	Weißenburg	20	„	Bierbrauer	—	—	—	—	—	—	—
… Rudolph	Gunzenhausen	$21^5/_{12}$	„	Gerichtsarzt	0,61	0,56	0,61	0,61	0,65	0,63	0,49
…er, Ant. W.	Fürth	19	„	Drechslermeister	0,56	0,53	0,60	0,58	0,69	0,52	0,55
…Phil. Chr.	„	17	„	Kaufmann	0,73	0,65	0,71	0,69	0,58	0,69	0,78
…Christian .	Nürnberg	$19^{11}/_{12}$	„	Schneidermeister	0,67	0,61	0,70	0,68	0,54	0,72	0,74
…Gg. Heinr.	Dutzendteich	$19^1/_6$	„	Schlossermeister	0,64	0,65	0,69	0,66	0,66	0,68	—

Die Eleven Faber und Held sind im Monate Juni ausgetreten.

Hospitanten für verschiedene Lehrfächer.

Fortlaufende Nr.	Namen der Hospitanten.	Geburtsort.	Alter.	Confession.	Stand der
1.	Bauer, August	Wirsberg	$23\frac{7}{12}$	prot.	Cantor.
2.	Brock, Johann	Nürnberg	17	"	Eisenbahnkassier.
3.	Ernst, Julius	Aschaffenburg	$17\frac{11}{12}$	kath.	Postsekretair.
4.	Funk, Wilhelm	St. Georgen bei Bayreuth	$20\frac{5}{12}$	prot.	Werkführer.
5.	Ganzmann, Eugen	Bayreuth	$20\frac{1}{12}$	"	Rechnungs-Commä
6.	Geiger, Johann	Nürnberg	$16\frac{1}{4}$	"	Rothgießermeister.
7.	Geißler, Johann Tobias	"	$14\frac{1}{2}$	"	Rothgießermeister
8.	Haller, Ferdinand	"	$19\frac{1}{4}$	"	Rentenverwalter.
9.	Hammer, Johann Christoph	"	$17\frac{5}{6}$	"	Handelsgerichtsdie
10.	Heinl, Georg Florian	Neualbenreuth	$20\frac{1}{6}$	kath.	Gastwirth
11.	Hollreiser, Leonhard	Nürnberg	$20\frac{1}{3}$	"	Güterlader.
12.	Hutzelmayer, Christian	"	$17\frac{1}{6}$	prot.	Rothschmiedmeiste
13.	Ißmayer, Johann Georg	"	$21\frac{11}{12}$	"	Flaschnermeister.
14.	Klingenstein, Bertram	"	$18\frac{3}{4}$	"	Ziegeleibesitzer.
15.	Lehmann, Johann Peter	"	$18\frac{1}{12}$	"	Rentenverwalter.
16.	Leibig, Ludwig	Sulzbach	$18\frac{1}{3}$	"	Gürtlermeister.
17.	Leuchs, Georg	Nürnberg	$20\frac{1}{12}$	"	Kaufmann.
18.	Mayer, Bernhard	"	$18\frac{1}{4}$	kath.	Salzamtskontrole
19.	Nützel, Christoph Heinrich	Culmbach	$20\frac{1}{6}$	prot.	Stadtschreiber.
20.	Schaptag, Karl Stephan	Nürnberg	$19\frac{1}{2}$	"	Zimmermeister.
21.	Scheubner, Karl	Hof	$18\frac{5}{12}$	"	Posamentier.
22.	v. Sperl, August Friedrich	Lichtenwald	$16\frac{1}{6}$	"	Hammergutsbesitz.
23.	Stadelmann, Johann Sebastian	Nürnberg	$17\frac{1}{12}$	"	Rothgießermeister
24.	Taucher, Konrad	"	$14\frac{1}{4}$	"	Gürtlermeister.
25.	Wangemann, Ludwig	Bayreuth	$18\frac{3}{4}$	"	Schieferdeckermei
26.	Wild, Ludwig	Nürnberg	$15\frac{1}{3}$	"	Privatier.

Verzeichniß der Schüler und Hospitanten,
welche in der mechanischen Werkstätte arbeiteten:

Dritter Curs.
1. Faber. 2. Held. 3. Rheingruber. 4. Rießner. 5. Schlosser. 6. Thorsen.

Zweiter Curs.
7. Braß, Gustav. 8. Drechsler. 9. Haggenmüller. 10. Lobenhoffer. 11. Ulrich. 12. Wegler.

Erster Curs.
. Braß, Julius. 14. Elgaß. 15. Funk. 16. Heppner. 17. Hofmann. 18. Pflaumer. 19. Straub.

Hospitanten.
20. Hollreiser. 21. Lehmann. 22. Wild.

Davon sind im Laufe des Jahres ausgetreten:

Braß, Gust. Braß, Jul. Faber. Held. Heppner. Lehmann. Wegler.

Verzeichniß der Schüler und Hospitanten,
welche den Unterricht im Formen und Gießen besuchten.

1. Ernst, Julius. 2. Geiger, Johann. 3. Geißler, Johann Tobias. 4. Hammer, Johann Christian. 5. Hutzelmeier, Christian. 6. Klingenstein, Bertram. 7. Leibig, Ludwig. 8. v. Sperl, August. 9. Stadelmann, Johann Sebastian. 10. Taucher, Konrad.

Historische und statistische Nachrichten.

Die Inscription der Zöglinge und Hospitanten an der k. polytechnischen Schule fand bestehenden allerhöchsten Verordnung gemäß, am 2. November 1858 statt.

Das Ergebniß dieser Inscription war:

I. Curs	39 Eleven.
II. „	17 „
III. „	8 „
Zusammen	64 Eleven.
Hiezu Hospitanten	26
Gesammtzahl der Inscribirten	90

Die Zahl der Eleven ist um 3, die der Hospitanten um 7 kleiner, als im vorigen Schulj

Nach der Inscription, den erforderlichen Eintritts- und Nachprüfungen und der Be machung der Disciplinar-Statuten begann der Unterricht in allen vorschriftsmäßigen Lehrz und wurde ohne nennenswerthe Unterbrechung bis zum Schlusse des Schuljahrs fortgesetzt.

Wichtigere Ereignisse oder überhaupt bemerkenswerthe Vorfälle sind in den Annal Schule für dieses Jahr nicht aufzuzeichnen.

Zur Vornahme und Leitung der diesjährigen Schluß- und Absolutorialprüfungen polytechnischen Schule dahier ist inhaltlich höchster Entschließung des k. Staatsministeriu Handels und der öffentlichen Arbeiten vom 5. Juli l. J. von Sr. Majestät dem Köni k. Universitäts-Professor, Akademiker &c., Herr Dr. Philipp Jolly in München, als Prü und Inspektions-Commissär ernannt worden.

Die Inscriptionen für das nächstfolgende Studienjahr finden am 2. November d. J Spätere Anmeldungen bleiben unberücksichtigt.

Nürnberg, den 1. August 1859.

J. M. Romig, Rektor.

DE FÖRSTA GRUNDERNA

TILL

DEN HÖGRE ANALYSEN,

ELLER

FFERENTIAL- OCH INTEGRALRÄKNING.

FÖR PRAKTISKA MEKANIKENS OCH NATURLÄRANS STUDIUM

MÖJLIGAST POPULÄRT BEARBETAD

AF

JULIUS WEISBACH,

PROF. VID K:GL. SACHS. BERGSAKAD. I FREIBERG.

ÖFVERSÄTTNING FRÅN TYSKAN

AF

A. H. FOCK.

STOCKHOLM,

ALB. BONNIERS FÖRLAG.

1852

STOCKHOLM,
TRYCKT HOS ISAAC MARCUS, 1852.

Författarens förord.

tta lilla arbete är visserligen i främsta rummet afsedt för lä- e af Författarens Ingenieur- och Machin-mekanik, men den torde sutom blifva af särdeles nytta för dem, hvilka studera Naturlä- och Mekaniken i allmänhet, samt, utan att äga tillräckligt attande förkunskap i den högre Mathematiken, likväl önska, att pare intränga på de nämnde vetenskapernas områden. Det in- åller en sammandragen och möjligast lättfattlig framställning af erential- och Integralräkningen eller den såkallade Infinitesimal- kylen. Författaren tillhör icke dem, hvilka obetingadt gilla clides' bekanta uttryck: »Det finnes ingen särskildt väg för kon- jar till Geometrien»; han är åtminstone af den mening, att till metriens och Mathematikens område i allmänhet föra flera vä- . Hvilken nytta skulle icke denna vetenskap redan hafva fram- ngat, om man i allmänhet och alltid hade sökt, att jemte en t vetenskaplig äfven åstadkomma en populär väg till densam- ! Säkerligen skulle man derigenom icke allenast hafva gagnat turläran och Techniken, utan äfven betydligt underhjelpt den männa bildningen, och det oaktadt icke tillfogat Mathematiken, som vetenskap, någon skada, utan tvärtom tillfört densamma ingen skicklig lärjunge! I andra vetenskaper har man i detta nseende gått före Mathematiken, och hvem kan förneka den nska betydliga nytta, som populära arbeten i naturvetenskaperna dan åstadkommit? Visserligen företer en populär framställning Mathematiken, då man derunder icke förstår blott ett samman- ag af reglor och formler, oberoende af utveckling och bevis, betydli- svårigheter; men resultatet är äfven så mycket mer tillfreds- ällande. Den säkerhet och färdighet, som för Mathematikens an-

vändning är så nödig, kan visserligen icke förvärfvas genom blott sammanställning af formler och reglor, men väl är det ligt genom studerandet af en populär skrift, som mer speciella än det allmänna till ögonsigte. Dessa åsigter äro re tatet af mångsidig och mångårig erfarenhet, förvärfvad undervisnings meddelande och genom umgänge med praktiker.

Julius Weisbach.

De första grunderna till den högre Analysen.

Art. 1. Det beroende, hvaruti en storhet y står till en
n x, uttryckes genom en mathematisk formel, t. ex. $y = 3x^2$
$y = ax^m$ o. s. v. I allmänhet skrifver man $y = f(x)$
$z = \varphi(y)$, o. s. v. och säger, att y är en *funktion* af x,
som z en *funktion* af y. Tecknen f, φ o. s. v. betyda i
inhet endast, att y är beroende af x, och z af y; de be-
ma alldeles icke det sätt, hvarpå dessa storheter bero af
andra, och angifva således icke de algebraiska operationer,
m hvilka y kan erhållas af x eller z af y.

Funktionen $y = f(x)$ är en obestämd eqvation; det finnes
ligen många värden på x och y, hvilka satisfiera densam-
men uppgifver man likväl den ena (x), så blifver den an-
(y) bestämd genom funktionen; och förändrar man den ena,
ndergår likaledes den andra en förändring. Man säger der-
att de obestämda storheterna x och y äro *variabla* eller
nderliga; hvaremot de gifna, eller de, hvilka man anser så-
gifna, de således, som föreskrifva operationerna, förmedelst
a y erhållas af x, sägas vara *konstanta* eller *oföränderliga.*
le föränderliga storheterna säges den, som godtyckligt anta-
vara *oberoende variabel,* och den deremot, hvilken genom
estämd räkne-operation erhålles af den förra, säges vara *be-*
de variabel. I $y = ax^m$ äro a och m de konstanta, x den
oende och y den beroende variabla.

Det sätt, hvarpå en storhet z beror af tvenne andra x och
ttryckes med $z = f(x, y)$. I detta fall är z en funktion
och y gemensamt, och här förekomma således tvenne obe-
de variabla.

Art. 2. Hvarje genom en funktion eller formel $y = f(x)$
yckt relation mellan tvenne storheter y och x kan framstäl-

las förmedelst en plan kurva eller kroklinie APQ (fig. 1
de olika värdena på den oberoende variabla motsvara kro
abscissor AM, AN o. s. v. samt värdena på de beroen

Fig. 1.

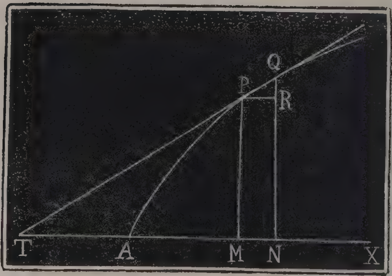
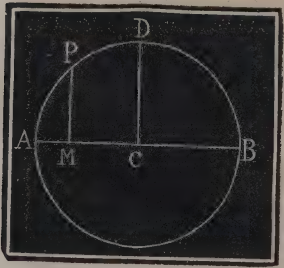


Fig. 2.

riabla, ordinaterna MP, NQ o. s. v. Kurvans *koordinat*
scissor och ordinater) föreställa sålunda funktionens båda va
Denna graphiska eller åskådliga framställning af en fu
eller densammas hänförande till en kroklinie, förenar flera
lar. Den lemnar oss för det första en öfverblick af sam
mellan tvenne variabla storheter, den gör oss för det
samma tjenst som en tabell, eller angifver relation mell
funktions tvenne motsvariga värden, den förskaffar os
det tredje kännedom om funktionernas flesta egenskaper oc
hållanden. Den med radien (
$CB = r$ uppritade cirkeln
(fig. 3), hvilken motsvarar funk
$y = \sqrt{2rx - x^2}$, gifver oss icke
nast en öfverblick af de olika v
som denna funktion kan antaga
gör oss äfven bekanta med
egendomligheter hos densamma,
dan cirkelns egenskaper äfven
sin betydelse i funktionen, såso
framdeles skola närmare finna.

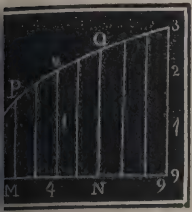
Fig. 3.



Art. 3. Naturlagarne kunna i allmänhet uttryckas f
delst funktioner mellan två eller flera storheter, och lämp
derföre äfven ofta för graphisk framställning. Vid fritt
lufttomt rum, är t. ex. den mot fallhöjden x svarande h
heten $y = \sqrt{2gx}$; men denna formel öfverensstämmer äfven
parabelns eqvation $y = \sqrt{px}$, då man sätter den sednares
rameter (p) lika med tyngdkraftens dubbla acceleration,

r kan äfven lagen för kroppars fria fall graphiskt framställ-
ned en parabel APQ (fig. 4), med parametern $p=2g$. Denna kroklinies abscissor $AM, AN\ldots$ föreställa naturligtvis fallhöjderna, och de motsvarande ordinaterna $MP, NQ\ldots$ de af de förra beroende hastigheterna.

Fig. 4.



Är a en viss luftvolym under en expansion af 1 atmosfer, så är enl. Mariottiska lagen under en expansion af x atmosferer samma luftmassas volym $y=\frac{a}{x}$.

$x=1$ är $y=a$, för $x=2$ är $y=\frac{a}{2}$, för $x=4$, $y=\frac{a}{4}$,
$x=10$ » $y=\frac{a}{10}$, » $x=100$ » $y=\frac{a}{100}$, » $x=\infty$, $y=0$;
ser således, att volymen blifver allt mindre och mindre, ju
: expansion är, och att, om Mariottiska lagen vore gällan-
r alla expansioner, skulle en oändligt stor expansion mot-
en oändligt liten volym.

lare blifver för $x=\frac{1}{2}$, $y=2a$, för $x=\frac{1}{4}$ blifver $y=4a$
» $x=\frac{1}{10}$, $y=10$, » $x=0$ » $y=\infty$;
indre expansion samma luftmassa har, desto större volym
:r den således, och om expansion är oändligt liten, så blif-
en motsvarande volymen oändligt stor.

Den kroklinie, hvilken graphiskt framställer denna lag, är
ad i fig. 5; abscissorna $AM, AN\ldots$ föreställa expansionerna, ordinaterna $MP, NQ\ldots$ de motsvarande volymerna. Man ser huru denna kroklinie småningom närmar sig koordinataxlarne AX och AY, utan att någonsin träffa dem.

Fig. 5.

Den relation, som äger rum mellan mättad vattenångas expansion y och dess temperatur x kan åtminstone inom vissa gränsor uttryckas genom formeln

$$y=\left(\frac{a+x}{b}\right)^m \text{ atmosferer;}$$

farenheten har gifvit vid handen, att inom vissa gränsor
$=75$, $b=175$ och $m=6$. Om vi i enlighet härmed

sätta $y = \left(\frac{75+x}{175}\right)^6$, och antaga denna formel för obeg[...]
riktig, så erhålla vi:

$$\text{för } x = 100^0,\ y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = 1 \text{ atmosfer,}$$

$$» \ x = 50^0,\ y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133 \ »$$

$$» \ x = 0^0,\ y = \left(\frac{75}{175}\right)^6 = 0{,}006 \ »$$

$$» \ x = -75^0,\ y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000 \ »$$

$$\text{vidare för } x = 120^0,\ y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914 \ »$$

$$» \ x = 150^0,\ y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517 \ »$$

$$» \ x = 200^0,\ y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058 \ »$$

Fig. 6.

Fig. 6 visar den mots[...] kurvan; denna samma[...] med abscissaxeln i pun[...] på ett afstånd $AO =$ [...] från *origo*, eller koordina[...] nes begynnelsepunkt, oc[...] ordinataxeln i punkten S [...] afstånd $AS = 0{,}006$ frå[...] ma origo. Man ser vidar[...] hvarje abscissa AM, s[...] < 100, motsvaras af e[...] nat MP, som är $<$ [...] huru hvarje ordinat NQ [...] motsvaras af en absciss[...] är > 100; derjemte s[...] icke allenast, att y i oän[...] tillväxer med x, utan äf[...] sjelfva kurvan blir allt m[...] mer stupande, ju större [...]

Art. 4. Om man gifver den oberoende variabla i e[...] tion, eller abscissan $AM = x$ (fig. 1 och 2, sid. 6) till de[...] svarande kroklinien, en oändligt liten tillväxt, hvars storle[...] vi allt framgent beteckna med dx, så förändras på samm[...] den motsvarande beroende variabla eller ordinaten $MP =$ [...] $NQ = y^1$, samt tillväxer alltså med den oändligt lilla [...] teten $RQ = NQ - MQ$, hvilken betecknas med dy. T[...] terne dx och dy af x och y kallar man de variablas ele[...]

naternas *differentialer* eller *elementer;* och det är till en bör-
vår hufvuduppgift, att finna differentialerna för de allmännast
rommande funktioner, eller rättare, förhållanderne mellan de
ivariga elementerna af deras variabla x och y. Insätter man
aktion $y = f(x)$, hvarest x föreställer abscissan AM och y
naten MP,

i stället för x, $x + dx = AM + MN = AN$, så erhåller man
i stället för y, $y + dy = MP + RQ = NQ$, således

$$y + dy = f(x + dx),$$

subtraherar man härifrån det första värdet på y, så återstår
ientet eller differentialen af den variabla y, d. v. s. $dy =$
$x) = f(x + dx) - f(x)$.

Detta är den allmännaste regeln för bestämmandet af en
tions differential, och genom hvars tillämpning på särskilda
tioner åter andra mer eller mindre allmänna reglor kunna
edas.

Är t. ex. $y = x^2$, har man

$$dy = (x + dx)^2 - x^2, \text{ eller, emedan}$$

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2,$$

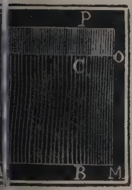
$$dy = 2xdx + dx^2 = (2x + dx)\,dx;$$

emedan dx är en oändligt liten qvantitet i jemförelse med
och alltså $2x$ genom tillägg af dx ej undergår någon märk-
örändring, så kan man försumma dx vid sidan af $2x$, hvar-
om

$$dy = d(x^2) = 2xdx.$$

Expressionen $y = x^2$ motsvarar ytinnehållet af en qvadrat $ABCD$ (fig. 7), hvars sida $AB = AD$ är $= x$; och det synes äfven af figuren, att genom sidornas tillväxt med stycket $BM = DN = dx$, ökas ytinnehållet med tvenne rektanglar BO och DP, tillsammans $= 2x.dx$, samt med en qvadrat $OP = (dx)^2$; och om således dx är oändligt liten, hvarigenom $(dx)^2$ kan bortkastas, blir qvadratens hela tillväxt $dy = 2x.dx$.

Fig. 7.



Art. 5. Den räta linien PQ (fig. 1 och 2, sid. 6), som ge-
går tvenne oändligt nära hvarandra liggande punkter P och Q
n kroklinie, kallas denna sednares tangent, samt angifver
iniens riktning emellan de ifrågavarande punkterna. Tan-
ns egen riktning bestämmes af vinkeln $PTM = \alpha$, under
en den träffar abscissaxeln AX. För en konkav kurva,
n APQ (fig. 1), ligger tangenten utom kroklinien och ab-
xeln, för en konvex, såsom APQ (fig. 2), befinner den sig
mot emellan nämnde axel och kurvan.

I den oändligt lilla rätvinkliga triangeln PQR (fig. 2), med katheterne $PR = dx$ och $RQ = dy$, är vinkeln lika med *tangentvinkeln* $PTM = \alpha$, och emedan

$$\text{tang. } QPR = \frac{QR}{PR},$$

så har man äfven

$$\text{tang. } \alpha = \frac{dy}{dx},$$

och sålunda angifver *förhållandet mellan båda elementen* *och* dx *den trigonometriska tangenten för tangentvinkeln.*

För parabeln t. ex., hvars eqvation är $y^2 = px$, har om $y^2 = px$ sättes $= z$, $dz = (y + dy)^2 - y^2 = y^2 +$ $+ dy^2 - y^2 = 2ydy + dy^2$, eller, då dy^2 kan försumma sidan af $2ydy$,

$$dz = 2ydy, \text{ och likaledes}$$
$$dz = p(x + dx) - px = pdx.$$

Till följe häraf är $2ydy = pdx$, och således för par tangentvinkel:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}.$$

Tangent kallar man i allmänhet den bestämda de af tangeringslinien, som ligger emellan tangeringspunkten skärningspunkten T med abscissaxeln; samt *subtangent* pro nen TM af tangenten på abscissaxeln. Då är

$$\text{subtang. } TM = PM \text{ cotang. } PTM$$
$$= y \text{ cotang. } \alpha = y\frac{dx}{dy};$$

så att t. ex. för parabeln är subtang. $= y\dfrac{2x}{y} = 2x$. I fall är således subtangenten lika med dubbla abscissan; o är tillfölje häraf lätt, att angifva läget af tangenten till punkt P på parabeln.

Art. 6. För en funktion $y = a + mf(x)$ har man

$$dy = [a + mf(x + dx)] - [a + mf(x)]$$
$$= a - a + mf(x + dx) - mf(x)$$
$$= m[f(x + dx) - f(x)]$$
$$\text{således } d[a + mf(x)] = m\,df(x).$$

T. ex. $d(5 + 3x^2) = 3[(x + dx)^2 - x^2] = 3 . 2x$ $6x\,dx$. Likaledes är $d(4 - \frac{1}{2}x^3) = -\frac{1}{2}d(x^3) = -$ $+ dx)^3 - x^3] = -\frac{1}{2}(x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 - x$ $-\frac{1}{2}.3x^2dx = -\frac{3}{2}x^2dx.$

Vi kunna med anledning häraf uppställa följande regel: *De konstanta termerna* $(a, 5)$ *i en funktion försvin differentieringen, och de konstanta faktorerna* $(m, 3)$ *förblifv under oförändrade.*

Riktigheten af denna regel kan äfven graphiskt ådagaläggas.
kroklinien APQ (fig. 8), hvars koordinater i ett fall äro
$l = x$ och $MP = y = f(x)$, och i ett annat fall äro
$M^1 = x$ och $M^1P = a + y = a + f(x)$, är $PR = dx$
$RQ = dy = df(x)$ och äfven $= d(a + y) = d[a + f(x)]$;
för kroklinierna AP^1Q^1 och APQ (fig. 9), hvilkas mot-

Fig. 8.

Fig. 9.

riga ordinater MP^1 och MP äfvensom NQ^1 och NQ stå i
visst förhållande till hvarandra, är äfven förhållandet mellan
ferentialerna $Q^1R^1 = NQ^1 - MP^1$ och $QR = NQ - MP$
ndigt detsamma; är således $MP^1 = m \,.\, MP = m(fx)$, så
äfven $R^1Q^1 = m \,.\, RQ$, d. v. s. $d \,.\, [mf(x)] = m \,.\, df(x)$.

Är $y = f(x) + \varphi(x)$, så har man

$$dy = f(x + dx) + \varphi(x + dx) - f(x) - \varphi(x)$$
$$= f(x + dx) - f(x) + \varphi(x + dx) - \varphi(x)$$

v. s. $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$.

Således är *differentialen af flera funktioners summa lika med* *mman af de särskilda funktionernas differentialer.*

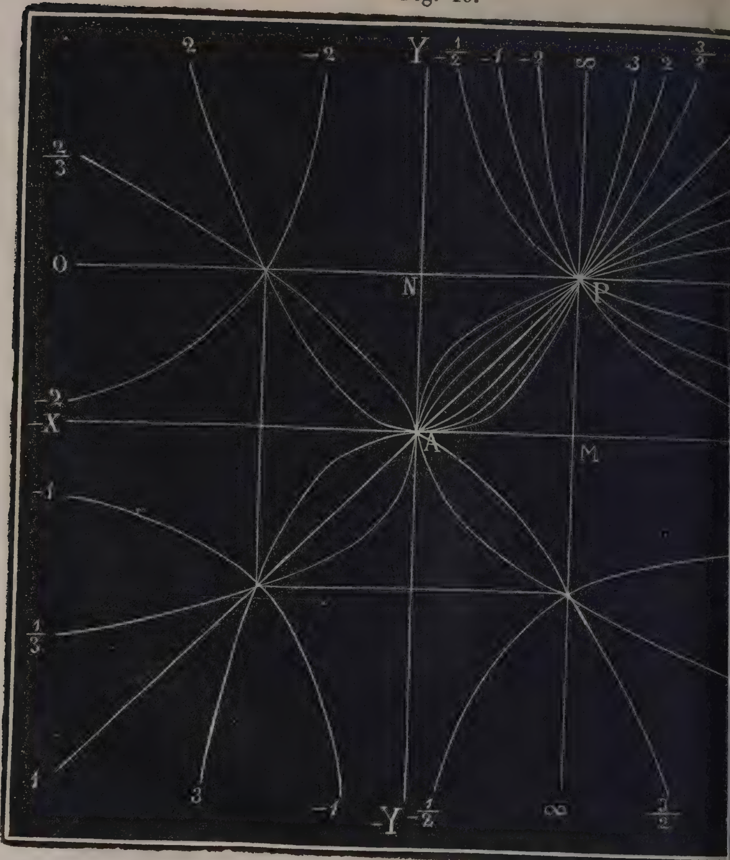
T. ex. $d(2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3) = 2dx + 6xdx - \frac{3}{2}x^2dx$
$= (2 + 6x - \frac{3}{2}x^2)dx.$

Om riktigheten af denna regel kan man äfven öfvertyga
genom betraktandet af en kroklinie APQ (fig. 9). Är
$P = f(x)$ och $PP^1 = \varphi(x)$, så har man $MP^1 = y =$
$x) + \varphi(x)$ och $dy = R^1Q^1 = R^1S + SQ^1 = RQ + SQ^1$
$df(x) + d\varphi(x)$, då neml. P^1S är dragen parallel med PQ
h derför R^1S är $= RQ$, samt $QS = PP^1$.

Art. 7. Funktionen $y = x^n$ är den vigtigaste inom hela
alysen, emedan man nästan vid alla undersökningar träffar på
nsamma. Om man gifver exponenten n alla möjliga värden,
sitiva och negativa, hela och brutna o. s. v., så gifver äfven
imnde funktion de mest olikartade kroklinier, såsom af fig. 10
kådliggöres. Här är A koordinataxlarnes begynnelsepunkt eller
igo, $X\overline{X}$ är absciss- och $Y\overline{Y}$ ordinataxeln. Sätter man i $y = x^n$

$x = 1$, blifver äfven $y = 1$, och gör man derför k
naterna AM och MP hvardera $= 1$, eller konstruerar
dorna $AM = AN$ en qvadrat, så blifver vinkelspetsen

Fig. 10.



punkt, hvarigenom alla de ifrågavarande kroklinierne måste
hvilket värde exponenten n ock må hafva. Tager man $n =$
och således $y = x$, erhåller man den från båda axlarne X
och $Y\overline{Y}$ lika mycket afvikande räta linien $1\,A\,1$. För värd
på n, som äro > 1 uppkomma konvexa, och för $n < 1$ ko
kava kroklinier; de förra löpa först under och sedan, från
öfver räta linien $1\,A\,1$; för de sednare är förhållandet omvän
För $n = 0$ är $y = x^0 = 1$, och för $n = \infty$ är $y = x^{\infty}$

alltså omvändt $x = y^0 = 1$; den första af dessa båda
tioner motsvarar räta linien OPO, och den andra räta linien
∞. Man ser, huru de kroklinier, hvilka motsvara positiva
en på n, först löpa under räta linien OPO, men efter att
a genomgått punkt P, öfver samma linie; och huru de, hvil-
närröra af negativa värden på n, löpa först öfver, men utan-
punkten P under linien OPO. För de förra kurverna är
$x = 0$ äfven $y = 0$ och för $x = \infty$ äfven $y = \infty$; för
ednare deremot för $x = 0$, $y = \infty$ och för $x = \infty$, $y = 0$.
er det således de förra allt mer och mer aflägsna sig från
rdinataxlarne $X\overline{X}$ och $Y\overline{Y}$, ju längre man följer dem, så
na sig deremot de sednare allt mer och mer å ena sidan
ln $X\overline{X}$ och å den andra axeln $Y\overline{Y}$, utan att likväl någon-
träffa dem.

Funktionerna $y = x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{-\frac{1}{2}}$ o. s. v. eller

$$y = \sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ o. s. v.}$$

'a för hvarje positivt värde på x tvenne likastora värden på
hvaraf det ena positivt och det andra negativt; men för ett
ativt värde på x blifver y imaginär; derför ligga äfven de
tsvarande kurverna endast i första och andra bland de utaf
arne $X\overline{X}$ och $Y\overline{Y}$ begränsade qvadranterna. Funktionerna

$$y = x^{-1}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{5}{3}} \text{ o. s. v. eller}$$
$$y = \frac{1}{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^5} \text{ o. s. v.}$$

'a för hvarje negativt värde på x äfven ett negativt värde
y, hvarför de motsvarande kurverna förekomma, utom i den
sta qvadranten XAY, äfven i den tredje $\overline{X}A\overline{Y}$. Funktio-
'na

$$y = x^2, x^{-2}, x^{\frac{2}{3}} \text{ o. s. v. eller}$$
$$y = x^2, \frac{1}{x^2}, \sqrt[3]{x^2} \text{ o. s. v.}$$

va äfven för negativa värden på x positiva på y, och derföre
ga de motsvarande kurverna ständigt öfver abscissaxeln $X\overline{X}$,
er i första och fjerde qvadranterna.

Art. 8. Om vi uti funktionen $y = x^n$ gifva x en liten
växt dx, erhålla vi $y^1 = (x + dx)^n$, och således differentia-
ı eller elementet $dy = y^1 - y = (x + dx)^n - x^n$.

Men enligt binomialformeln:

$$(a + x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

är äfven

$$(x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,dx^2 + \ldots$$

således erhålla vi

$$dy = d(x^n) = nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,dx^2 + \ldots$$

$$= (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}\,dx + \ldots)\,dx;$$

eller, då $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2}dx$ försvinner, i anseende dertill att d
oändligt liten i jemförelse med nx^{n-1},

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx.$$

T. ex. $d(x^5) = 5x^4dx$; $d(\sqrt{x^3}) = d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
$d\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4\,.d(x^{-2}) = -8x^{-3}\,dx$; $d\sqrt{2rx-x^2} = d$

$$= d(u^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \tfrac{1}{2}\,\frac{d(2rx-x^2)}{u^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{2rdx-2xd}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{(r-x)dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Ur den vigtiga formeln $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ kunna nu
ledas tangentvinklarne till de motsvarande och i fig. 10 afb
de kroklinierna; man har neml. tang. $\alpha = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

Sålunda t. ex. för den såkallade *Neilska* parabeln, h
eqvation är $y = \sqrt[2]{\frac{x^3}{a}}$, är

$$\text{tang. } \alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{d(x^{\frac{3}{2}})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,.\,\tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Art. 9. Om man i elementernas förhållande $\frac{dy}{dx}$, eller
meln för tangentvinkelns tangent, gifver x successivt olika
den, erhåller man derigenom de särskildta motsvarande
gen, som tangenten intager. Sätter man $x = 0$, erhålles
genten för tangentvinkeln i den punkt, der kroklinien skär o
nataxeln; insättes $x = \infty$, erhålles samma tangent för en oä
ligt aflägsen punkt af kurvan. Vigtigast äro de punkter,
hvilka en kroklinies tangent är parallel med den ena eller
dra af koordinataxlarne, emedan en af koordinaterna för en
lik punkt har sitt *största* eller *minsta* värde, eller som det he
är ett *maximum* eller *minimum*. Vilkoret för parallelism m
abscissaxeln är $\alpha = 0$, således äfven tang. $\alpha = 0$; och för
rallelism med ordinataxeln $\alpha = 90^0$, således tang. $\alpha =$
Häraf följer den regeln, att *man finner de värden af abscis*
eller den oberoende variabla x, hvilka motsvara maximi- e

ivärden på ordinaten eller den beroende variabla y, om sätter differentialförhållandet $\frac{dy}{dx} = 0$ eller $= \infty$, och upp- den deraf erhållna eqvationen i afseende å x.

För eqvationen $y = 6x - \frac{9}{2}x^2 + x^3$, hvilken motsvarar n APQ (fig. 11), är t. ex.

$$= 6 - 9x + 3x^2 = 3(2 - 3x + x^2) = 3(1-x)(2-x);$$

enom att sätta $\frac{dy}{dx} = 0$, erhålles således $1 - x = 0$ och

Fig. 11.

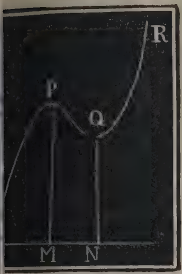


Fig. 12.

$= 0$, d. v. s. $x = 1$ och $x = 2$. Genom dessa vär- insättande i formeln

$$y = 6x - \frac{9}{2}x^2 + x^3$$

es maximivärdet af y, $MP = 6 - \frac{9}{2} + 1 = \frac{5}{2}$, och minimi- $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

För kurvan OPQ (fig. 12), hvars eqvation är $y = a$ $-b)^{\frac{2}{3}}$, har man $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-b)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}}$, och, t finna minimivärdet MP af y, sätter man nu $\frac{dy}{dx} = \infty$, s. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}} = \infty$, eller $\sqrt[3]{x-b} = 0$, hvaraf $x = b$. Det rande minimivärdet af y är följaktligen $= a$; sätter man ot $x = 0$, erhålles $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, och sätter man x , blir likaledes $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, således är i båda fallen på y större än det som motsvarar $x = b$.

Art. 10. Likasom vid en från begynnelsepunkten A uppåt kurva y tillväxer samtidigt med x, och derföre dy är , vid en nedåt gående deremot y aftager, då x ökas, och dy får ett negativt värde, samt slutligen på de ställen, t kurvan är parallel med koordinataxeln AX, dy är likaså tillväxa de mot lika abscisselementer $dx = MN =$

$NO = PS = QT \ldots.$ motsvarande ordinatelementerne
$SQ = PS$ tang. QPS, eller $dy = dx$ tang. α_1
$TR = QT$ tang. RQT, eller $dy = dx$ tang. α_2 ..
och således äfven tangentvinklarne α_1. $\alpha_2 \ldots.$ vid en k

Fig. 13.

Fig. 14.

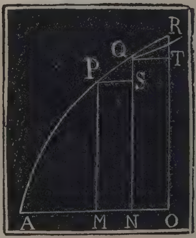


Fig. 15.

kurva APR (fig. 13), och aftaga vid en konkav APR (fi
I första fallet är följaktligen

$$d\,.\,\text{tang.}\ \alpha = d\left(\frac{dy}{dx}\right)\ \text{positiv,}$$

och i det sednare d . tang. $\alpha = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ negativ; och m
slutligen för en *inflexionspunkt* Q, (fig. 15), d. v. s. fi
ställe Q af kurvan, hvarest den öfvergår från konvex till k
kav eller tvärtom, äfven $QS = RT$. och derföre

$$d\,.\,\text{tang.}\ \alpha = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

En allmän regel är derföre, att *i de punkter, för*
differentialen till tangentvinkelns tangent är positiv, är k
konvex; i de, för hvilka nämnde differential är negativ, är k
van konkav, och är differentialen 0, *så har man att göra m*
inflexionspunkt.

I sammanhang härmed kan man äfven lätt inse, a
ställe, i hvilket kurvan är parallel med abscissaxeln, för h
således tang. α är $= 0$, motsvarar antingen ett *minimum, a*
mum eller en *inflexionspunkt*, allt efter som kurvan är k
konkav eller intetdera, allt eftersom således d . tang. α är
tiv, negativ eller noll.

Hvaremot det ställe, i hvilket kurvan är parallel m
dinataxeln, och för hvilket således tang. α är ∞, motsvarar
gen ett *minimum, maximum* eller en *inflexionspunkt*, allt efte
kurvan är konkav, konvex eller dels konkav dels konvex, alle
som således d . tang. α framför och efter detta ställe är n
» » » » » » p
eller har ett annat tecken framför än efter detsamma.

Fig. 16 visar en kurva med en inflexionspunkt Q af det
ı slaget, och fig. 17 en med en dylik punkt Q, af det sednare
t. Man ser, att den motsvarande ordinaten NQ är hvarken
naximum eller ett minimum, ty i intetdera fallet äro de när-
sande ordinaterna MP och OR båda större eller båda min-
än NQ.

ig. 16.

Fig. 17.

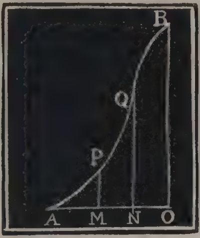
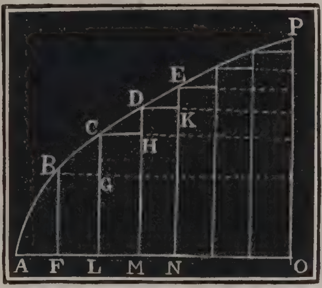


Fig. 18.



Art. 11. Abscissan $AO = x$ (fig. 18), motsvarande ordi-
t $OP = y$, kan anses sammansatt af ett oändligt antal olika
elementer $dy = FB, GC, HD, KE \ldots$, hvilka motsvara
insemellan fullkomligt lika elementerna $dx = AF = FL$
$M = MN \ldots$ Kände man derföre $dy = \varphi(x)\,dx$, skulle
kunna erhålla y genom summering af alla de värden på
som skulle uppkomma, då man i $\varphi(x)dx$ i stället för x
ssivt insätter dx, $2dx$, $3dx$, $4dx \ldots$ ända till $ndx = x$.
a summering antyder man med det såkallade *integraltecknet* $\int$,
et sättes framför det allmänna uttrycket på de elementer,
skola summeras. Man skrifver således, i stället för

$$= [\varphi(dx) + \varphi(2)dx + \varphi(3)dx + \ldots \varphi(x)]dx \text{ blott}$$

$$= \int \varphi(x)dx.$$

I detta fall säges y vara *integralen* af $\varphi(x)dx$, likasom
dx är differentialen af y.

Stundom kan man bestämma integralen $\int \varphi(x)dx$ genom
g summering af serien $\varphi(dx)$, $\varphi(2)dx$, $\varphi(3)dx$ o. s. v.;
är det mycket enklare, att vid bestämmandet af en inte-
använda någon bland de i det följande utvecklade reglorna
en såkallade *integralräkningen*.

För differentialen $dy = mxdx$ har man t. ex. integralen

$$y = \int mxdx = mdx(dx + 2dx + 3dx + \ldots + x)$$

$$= \left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{x}{dx}\right) mdx^2$$

då $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \frac{x}{dx}$ bilda en vanlig arithmetisk serie, hvars
term är $= 1$, sista term $= \frac{x}{dx}$ och termernas antal likaledes

$$\int mx dx = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{x}{dx}\right)\frac{x}{dx}\,mdx^2,$$

eller enklare, då 1 kan försummas vid sidan af det jemfö… vis oändligt stora talet $\frac{x}{dx}$,

$$\int mx dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 mdx^2 = \tfrac{1}{2}mx^2.$$

Art. 12. Ur formeln $d[a+mf(x)] = mdf(x)$ … omvändt, att $\int mdf(x) = a+mf(x) = a+m\int df(x)$

eller, om $df(x)$ sättes $= \varphi(x)dx$,

$$\int m\varphi(x)dx = a+m\int\varphi(x)dx,$$

och häraf synes, att *den konstanta faktorn* m vid integre… likasom vid differentiering, *förblifver oförändrad*, och att en … ligen förhanden varande *konstant term* a *icke kan bestämma*… nom blott integrering; att således denna sednare operation e… gifver en ännu *obestämd* integral. För att bestämma den … stanta termen, måste två motsvariga värden af x och y… $\int\varphi(x)dx$ vara bekanta. Är för $x = c$, $y = k$, och har … funnit $y = \int\varphi(x)dx = a+f(x)$, så måste äfven k var… $a+f(c)$, och genom subtraktion erhålles derföre $y-k=$… $-f(c)$; således är i detta fall

$$y = \int\varphi(x)dx = k+f(x)-f(c);$$

och till följe häraf är konstanten $a = k-f(c)$.

Om man t. ex. känner, att den obestämda integralen

$$y = \int x dx = \frac{x^2}{2}+a, \text{ för } x = 1 \text{ gifver } y = 3,$$

så har man den sökta konstanten $a = 3-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, och så… integralen

$$y = \int x dx = a+\frac{x^2}{2} = \frac{5+x^2}{2}.$$

Äfven konstantens bestämmande lemnar integralen obest… emedan man ännu kan insätta hvilket värde som helst på … oberoende variabla x; men vill man på integralen hafva … fullkomligt bestämdt värde k_1, som motsvarar ett bestämdt v… c_1 på x, så är nödvändigt, att i den fundna integralen in… detta sednare, att således sätta $k_1 = k+f(c_1)-f(c)$.

Sålunda gifver t. ex. $y = \int x dx = \frac{5+x^2}{2}$, för $x =$… $y = 15$. Oftast känner man det värde på x, för hvilket … $= 0$; i detta fall har man således $k = 0$, och alltså leder … obestämda integralen $\int\varphi(x)dx = f(x)$ till den bestämda… $= f(c_1)-f(c)$, hvilken således finnes, om man i uttry… $f(x)$ på den obestämda integralen i stället för x insätte… båda gifna gränsvärdena c_1 och c, och subtraherar de båda… hållna resultaten från hvarandra. För att antyda detta förfa… de, skrifver man i st. f. $\int\varphi(x)dx$, $\int_c^{c_1}\varphi(x)dx$. Om såll…

$\int\varphi(x)dx$ är $= \frac{x^2}{2}$, blifver $\int_c^{c_1}\varphi(x)dx = \frac{c_1^2-c^2}{2}$.

Af differentialformeln $d[f(x)+\varphi(x)] = df(x)+d\varphi(x)$ man sig omvändt till integralformeln $\int[df(x)+d\varphi(x)]$ $(x)+\varphi(x)$, eller, om man sätter $df(x) = \psi(x)dx$ och $v) = \chi(x)dx$,

$$\int[\psi(x)dx+\chi(x)dx] = \int\psi(x)dx+\int\chi(x)dx.$$

Således är *integralen till summan af flera differentialier lika summan af de särskilta differentialernas integraler.*

T. ex. $\int(3+5x)dx = \int 3dx+\int 5xdx = 3x+\frac{5}{2}x^2$.

Art. 13. Af den vigtiga differentialformeln (Art. 8)

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

man sig omvändt till en motsvarande vigtig integralfor- Här är neml. $\int nx^{n-1}dx = x^n$, eller $n\int x^{n-1}dx = x^n$, $\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n}$; sätter man således $n-1 = m$, hvaraf $m+1$, erhålles följande vigtiga *integral;*

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

n ensam säkert i användningen förekommer lika ofta, som friga tillsammans.

Denna form på integralen häntyder äfven derpå, att den arar det i Art. 7 afhandlade och i fig. 10 afbildade system klinier.

Till följe häraf är t. ex. $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = \frac{5}{4}x^4$; samt

$$\int\sqrt[3]{x^4}\,dx = \int x^{\frac{4}{3}}\,dx = \tfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} = \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{x^7};$$

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x};$$

$$-6x^2+5x^4)dx = \int 4dx - \int 6x^2dx + \int 5x^4dx$$

$$= 4\int dx - 6\int x^2dx + 5\int x^4dx = 4x-2x^3+x^5;$$ samt

nan sätter $3x-2 = u$, således $3dx = du$, eller $dx = \frac{du}{3}$

$$\int\sqrt{3x-2}\,.\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{3} = \tfrac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{9}\sqrt{u^3}$$

$$= \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3};$$

slutligen, om $2x^2-1$ sättes $= u$, således $4xdx = du$, $xdx = \frac{du}{4}$,

$$\frac{5xdx}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int\frac{5du}{4\sqrt[3]{u}} = \tfrac{5}{4}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du = \tfrac{5}{4}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \tfrac{15}{8}\sqrt[3]{u^2}$$

$$= \tfrac{15}{8}\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Genom gränsvärdens införande i beräkning förvandlas ge- dessa obestämda integraler i bestämda, t. ex.

$$\int_1^2 5x^3dx = \tfrac{5}{4}(2^4-1^4) = \tfrac{5}{4}(16-1) = 18\tfrac{3}{4},$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1,$$

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2}\,.\,dx = \tfrac{2}{9}(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = \tfrac{2}{9}(64-1) =$$

Vore t. ex. $\int(4-6x^2+5x^4)dx = 7$ för $x = 0$, så man i allmänhet: $\int(4-6x^2+5x^4)dx = 7 + 4x - 2x^3$

Art. 14. Om man i den binomiska serien:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

tager n oändligen stort, hvarigenom talen $1, 2, 3\ldots\ldots$ försvin sidan deraf, blifver

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n^2}{1\,.\,2}x^2 + \frac{n^3}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots\ldots$$

Sätter man vidare $x = dx$ och $n = \frac{x}{dx}$, så erhåller ma

$$(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = 1 + \frac{x}{dx}dx + \frac{1}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{dx}\right)^3 dx$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots,$$

antages slutligen $x = 1$, erhålles

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \ldots\ldots = 2{,}71828\ldots\ldots,$$

ett tal, hvilket ständigt betecknas med bokstafven e, samt *bas för de naturliga eller hyperboliska logarithmerna.*

Då således $(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = \left[(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\right]^x$ är $= e^x$, man för den så kallade exponentialfunktion e^x serien:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

Sättes $a = e^{\frac{1}{m}}$, så är $\frac{1}{m} = Log.\ nat.\ a$, d. v. s. den *liga* eller *hyperboliska logarithmen* till a, och derför

$$a^x = (e^{\frac{1}{m}})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3$$

Sättes $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, så har man omvändt

$x = \text{Log.}_a\, y$ [1]) och $\frac{x}{m} = \text{Log. } nat.\ y$, hvaraf

$\text{Log.}_a\, y = m\ \text{Log. } nat.\ y$, likasom omvändt

$\text{Log. nat. } y$ eller $\text{Log.}_e\, y = \frac{1}{m}\,\text{Log.}_a\, y.$

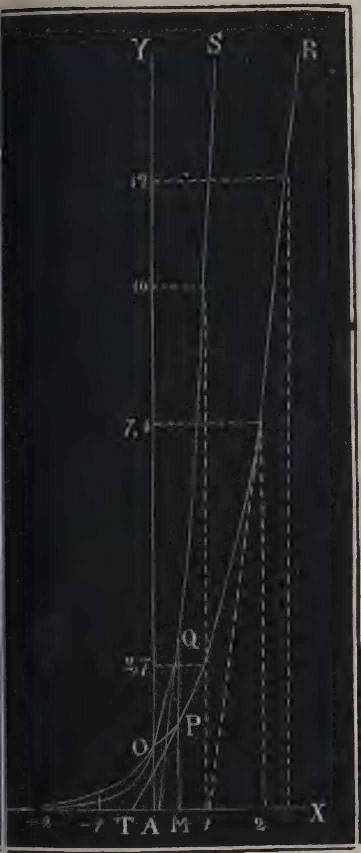
---

[1]) Med Log._a menas logarithmen i det system, hvars bas är

Talet m kallas *modul* för det system af logarithmer, som
rundadt på basen a. Med tillhjelp af modulen kunna således
aturliga logarithmerna förvandlas till hvilket annat slag som
, och omvändt dessa sednare åter förvandlas till de förra.
de *Briggiska* eller *vanliga* logarithmerna är basen $a = 10$,
les $\frac{1}{m} =$ Log. *nat.* $10 = 2{,}30258\ldots.$, och omvändt modulen
$= \frac{1}{\text{Log. } nat. \ 10} = 0{,}43429\ldots.$

Således är Log. $y = 0{,}43429$ Log. *nat.* y, och
Log. *nat.* $y = 2{,}30258$ Log. y.

Fig. 19.



Art. 15. Lägena af de kroklinier, hvilka motsvara exponential-funktionen $y = e^x$ eller $y = 10^x$, åskådliggöras af fig. 19. För $x = 0$ är i båda fallen $y = e^0 = a^0 = 1$, derför gå äfven båda kurverna PR och QS genom samma punkt O på ordinataxeln. För $x = 1$, är $y = e^x = 2{,}718\ldots.$, och $y = 10^x = 10$; för $x = 2$, är $y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389$, och $y = 10^x = 10^2 = 100$ o. s. v.; på abscissaxelns positiva sida stiga alltså båda kurver na, men den sednare betydligt hastigare. Deremot är för $x = -1$,

$$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots.}$$

$= 0{,}368$ och
$10^x = 10^{-1} = 0{,}1$;
vidare för $x = -2$,

$$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135$$

och $10^x = 10^{-2} = 0{,}01$; slutligen för $x = -\infty$, blifver i båda eqvationer-

$-\infty = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0$. Båda kurverna närma sig således

allt mer och mer abscissaxeln på dennes negativa sida, och under den sednare mer än den förra; likväl äger ett ve sammanträffande med abscissaxeln aldrig rum.

Då af $y = e^x$ erhålles $x =$ Log. *nat.* y och likaså af $y = a^x$ erhålles $x = \text{Log.}_a\, y$,

så utgöra dessa kurver äfven en skala för de naturliga oc de Briggiska logarithmerna; abscissorna äro neml. ordinat logarithmer; så är t. ex. $AM =$ Log. *nat.* $MP =$ Log. o. s. v.

Art. 16. Differentialen till exponentialfunktionen $y =$ erhålles genom användning af den allmännaste differential regeln:

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x . a^{dx} - a^x = a^x\,(a^{dx} - 1)$$

men då exponentialserien gifver

$$a^x = 1 + \frac{x}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

$$a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{m}\right)^2 + \ldots\ldots$$

och det sednare värdet a^{dx} kan sättas $= 1 + \frac{dx}{m}$, så erhåller

$$dy = a^x\left(1 + \frac{dx}{m} - 1\right) \text{ eller}$$

$$d(a^x) = \frac{a^x dx}{m} = \text{Log. } nat.\ a\ .\ a^x dx \quad \ldots\ldots\ldots$$

och då a sättes $= e$ samt $m = 1$

$$d(e^x) = e^x dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exponentialkurvans tangentvinkel α bestämmes följakt genom den enkla formeln:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{a^x dx}{m dx} = \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y\,.\,\text{Log. nat. } a.$$

För kurvan QS (fig. 19) är följaktligen subtang. $=$ y cotang. $\alpha = m$ (art. 5); den är således konstant, och kurvan PR är den ständigt $= 1$.

Ur differentialformeln (1) $d(a^x) = \frac{a^x dx}{m}$, erhålles

$$dx = m\,\frac{d(a^x)}{a^x}, \text{ eller, om } y \text{ insättes i st. f. } x,$$

$$dy = m\,\frac{d(a^y)}{a^y};$$

men nu är för $x = a^y$, $y = \text{Log.}_a\, x$, och således

$$d(\text{Log.}_a\ x) = m\,\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x \text{ Log. nat. } a}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

äfvensom $d\,(\text{Log. } nat.\ x) = \frac{dx}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Förmedelst dessa fyra formler kunna lätt följande exempel
nas:

$$e^{3x+1}) = e^{3x+1} \; . \; d\,(3x+1) = 3e^{3x+1}dx$$

$$\text{g. } nat. \sqrt{x}) = \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}}.dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{2x},$$

äfven $d\,(\tfrac{1}{2}\text{ Log. } nat.\ x) = \tfrac{1}{2}\, d\,(\text{Log. nat. } x) = \tfrac{1}{2}\frac{dx}{x}.$

$$\text{g. nat. } \left(\frac{2+x}{x^2}\right) = d\,[\text{Log. nat. } (2+x) - \text{Log. nat. } x^2]$$

$$= d \text{ Log. nat. } (2+x) - d \text{ Log. nat. } (x^2)$$

$$= \frac{dx}{2+x} - 2\,\frac{dx}{x} = -\frac{(4+x)dx}{x(2+x)}.$$

Art. 17. Genom omvändning af differentialformlerna i förra
erhåller man andra vigtiga integralformler. Således

$(a^x) = \frac{a^x dx}{m}$, följer $\int \frac{a^x dx}{m} = a^x$, d. v. s.

$$\int a^x dx = m\,a^x = a^x : \text{Log. } nat.\ a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{I})$$

eraf $\int e^x dx = e^x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{I}^*)$.

Vidare af $d\,(\text{Log.}_a\, x) = \frac{mdx}{x}$, följer $\int \frac{mdx}{x} = \text{Log.}_a\, x$, d. v. s.

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} \,.\, \text{Log.}_a\ x = \text{Log. } nat.\ x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{II})$$

etta synes äfven af formeln $d(\text{Log. } nat.\ x) = \frac{dx}{x}.$

Härefter kunna följande exempel lätt uträknas:

$$^{-1}dx = \tfrac{1}{5}\int e^{5x-1}\, d(5x-1) = \tfrac{1}{5}\, e^{5x-1}.$$

$$= \tfrac{3}{7}\int \frac{d(7x+2)}{7x+2} = \tfrac{3}{7} \text{ Log. } nat.\ (7x+2).$$

$$\left.\frac{+1}{-1}\right) dx = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int x dx + \int dx + 2\int \frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2 \text{ Log. } nat.\ (x-1).$$

Den första integralformeln $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ (pag. 19) lem-
n här erhållna $\int \frac{dx}{x}$ obestämd; ty om i den förra insättes
-1, blifver $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0}$ + en konstant $= \infty +$
nten; men sättes $x = 1 + u$, således $dx = du$, erhålla vi

$$\frac{du}{+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du, \text{ och alltså}$$

$$\int \frac{du}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots.)\, du$$

$$\int du - \int udu + \int u^2 du - \int u^3 du + \ldots..$$

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots.$$

Således är äfven Log. *nat.* $(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$

$$\text{Log. } nat.\ x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Med tillhjelp af denna serie kan man beräkna logimerna för tal, som ej betydligt skilja sig från 1; men ä fråga om större tal, går man till väga på följande sätt:

Tages u negativ, erhålles ur näst den sista serien:

$$\text{Log. } nat.\ (1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \ldots$$

och genom båda seriernas subtraktion

$$\text{Log. } nat.\ (1+u) - \text{Log. } nat.\ (1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right)$$

$$\text{Log. } nat.\ \left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right),$$ eller, om $\frac{1+u}{1-u}$ sättes $= x$, alltså $u = \frac{x-1}{x+1}$,

$$\text{Log. } nat.\ x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right] \ldots$$

Denna serie kan användas till bestämmandet af logimerna äfven för tal, som äro betydligt större än 1, e $\frac{x-1}{x+1}$ alltid är ett egentligt bråk.

Äfven är Log. nat. $(x+y)$ — Log. *nat.* x = Log. $\left(\frac{x+y}{x}\right)$ = Log. *nat.* $\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \ldots.$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 \ldots\right]$$

och deraf

$$\text{Log. } nat.\ (x+y) = \text{Log. nat. } x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \ldots\right]$$

Denna formel kan användas, för att från ett tals logaräkna sig till logarithmen för ett annat, något större tal.

Ex. Log. nat. $2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \ldots\right]$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{243} + \ldots\right)$$

$$= 2\left\{\begin{matrix} 0{,}33333 \\ 0{,}01234 \\ 0{,}00082 \\ 0{,}00007 \end{matrix}\right\} = 2 \,.\, 0{,}34656 = 0{,}693$$

noggrannare $= 0{,}69314718$

nat. $8 = \text{Log. nat. } 2^3 = 3$ Log. nat. 2, är således $= 2{,}0794415$,
lutligen, enligt sista formeln

$$\text{Log. nat. } 10 = \text{Log. nat. } (8+2)$$
$$= \text{Log. nat. } 8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

(Jemför art. 14.)

Art. 18. Af praktisk vigt äro äfven de *trigonometriska* *irkulära funktionerna*, hvarför vi ytterligare måste lära känna deras differentialier och integraler.

Funktionen $y = \sin. x$, gifver för $x = 0$, $y = 0$:

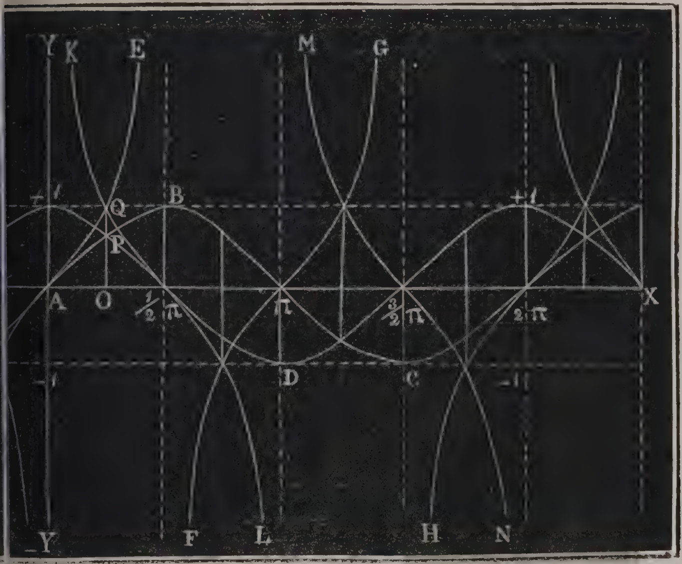
$$\text{för } x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}1416}{4} = 0{,}785 \ldots.\ y = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707,$$

$$\text{för } x = \frac{\pi}{2},\ y = 1, \text{ för } x = \pi,\ y = 0,$$

$$\text{för } x = \tfrac{3}{2}\pi,\ y = -1, \text{ för } x = 2\pi,\ y = 0 \text{ o. s. v.}$$

er man x såsom abscissor AO (fig. 20) och y såsom de

Fig. 20.



rande ordinaterna OP, så erhåller man kroklinien $APBC2\pi$, h kan fortsättas i oändlighet på båda sidor om A. Ur onen $y = \cos. x$ erhålles för $x = 0$, $y = 1$, för $x = \frac{\pi}{4}$,

$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, för $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$, för $x = \pi$, $y = -1$
$x = \tfrac{3}{2}\pi$, $y = 0$, för $x = 2\pi$, $y = 1$, o. s. v.; den mo
rar således alldeles samma kroklinie $(+1 P \tfrac{1}{2}\pi D \tfrac{3}{2}\pi + 1)$
sinusfunktionen, utom att den ligger $\tfrac{1}{2}\pi = 1{,}570$ framför
bakom sinuskurvan på abscissaxeln.

Helt annan skapnad hafva likväl de kroklinier, som
svara funktionerna $y =$ tang. x och $y =$ cotang. x. S
man i den förra x successivt $= 0, \tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi$, erhåller man y
$1, \infty$, och derföre motsvarar denna funktion en kurva $(A$
hvilken ständigt allt mer och mer närmar sig en genom
ningspunkten $(\tfrac{1}{2}\pi)$ på abscissaxeln gående, med ordinat
AY parallel, linie, utan att någonsin uppnå densamma.
man vidare $x = \dfrac{\pi}{2}, \pi, \tfrac{3}{2}\pi$, så erhåller man $y = -\infty, 0,$
och derför en kurva $F\pi G$, som oupphörligt närmar sig p
lelerna genom $\tfrac{1}{2}\pi$ och $\tfrac{3}{2}\pi$, eller, som man säger, har dess
ralleler till asymptoter.

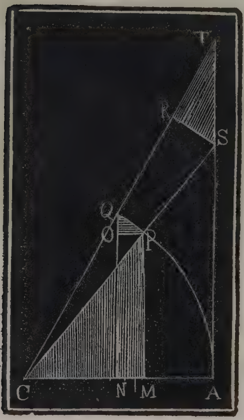
Vid ytterligare antagna värden på x, erhållas ånyo sa
värden på y, och derföre motsvaras äfven funktionen $y =$ ta
af kurvor, fullkomligt lika med $F\pi G$, men belägna på e
stånd af π på abscissaxeln från hvarandra.

Funktionen $y =$ cotang. x gifver för $x = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2},$

$y = \infty, 1, 0, -$

och derföre motsvarar densamma en kurva $KQ\tfrac{1}{2}\pi L$, hv
endast genom sin ställning skiljer sig från tangentkurvan
är äfven tydligt, att oändligen många kroklinier, såsom
$M\tfrac{3}{2}\pi N$ o. s. v. motsvara denna funktion.

Fig. 21.



Art. 19. Differentialerna till trig
metriska linier eller funktioner k
härledas ur en betraktelse af fig.2
i hvilken $CA = CP = CQ = 1$,
gen $AP = x$, $PQ = dx$; vidare $PM =$
sin. x, $CM =$ cos. x, $AS =$ tang.

$OQ = NQ - MP =$ sin. $(x + dx$
sin. $x = d$sin. x,

$OP = -(CN - CM) = -$ cos. $(x +$
$-$ cos. $x = -d$cos. x, och

$ST = AT - AS =$ tang. $(x + dx$
tang. $x = d$ tang. x.

Emedan bågelementet PQ är vi
rät mot radien CP, och vinkeln
är lika stor med PQO, ty den sed
sidor äro vinkelräta mot hvar sin a
förras, så äro trianglarne CPM och

miga med hvarandra, och således:

$$\frac{OQ}{PQ}=\frac{CM}{CP} \text{ eller } \frac{d \sin. x}{dx}=\frac{\cos. x}{1}, \text{ hvaraf}$$

$$d \sin. x = \cos. x\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

kaledes $\frac{OP}{PQ}=\frac{PM}{CP}$, eller $\frac{-d \cos. x}{dx}=\frac{\sin. x}{1}$, hvaraf

$$d \cos. x = -\sin. x dx \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Man ser häraf, att små fel i bågen eller vinkeln hafva ett större inflytande på sinus, ju större cos. x, och ju minåledes bågen eller vinkeln sjelf är; att deremot dylika fel mer förändra cosinus, ju större sin. x är och ju mer såleıågen närmar sig till $\frac{\pi}{2}$, samt att slutligen differentialen ısinus har motsatt tecken med bågen, och att således, såsom ıt är, en tillökning i x frambringar en förminskning i r, och omvändt en förminskning af x åstadkommer en tilli cos. x.

Drages SR vinkelrät mot CT, blifver triangeln SRT likg med CPM, emedan vinklarne RTS och CQN eller CPM ika stora; och derföre är

$$\frac{ST}{SR}=\frac{CR}{CM}, \text{ eller } \frac{d \operatorname{tang}. x}{SR}=\frac{1}{\cos. x}.$$

Men nu är äfven $\frac{SR}{CS}=\frac{PQ}{CP}$, eller $SR=\frac{CS.dx}{1}$ och

$$CS = \operatorname{secant}. x = \frac{1}{\cos. x}, \text{ hvaraf } SR = \frac{dx}{\cos. x} \text{ och}$$

$$d \operatorname{tang}. x = \frac{dx}{(\cos. x)^2} \ldots\ldots\ldots \text{(III)}.$$

nsätter man i st. f. x, $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, således i st. f. dx, $d.\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\cdot dx$, erhåller man

$$d \operatorname{tang}. \left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\frac{dx}{\left[\cos.\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}, \text{ eller}$$

$$d \cot. x = -\frac{dx}{(\sin. x)^2} \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}.$$

Genom omvändning af dessa formler, erhålles differentialen ågen:

$$dx = \frac{d \sin. x}{\cos. x} = -\frac{d \cos. x}{\sin. x} = (\cos. x)^2\, d \operatorname{tang}. x$$
$$= -(\sin. x)^2\, d \cot. x,$$

eller

$$= \frac{d \sin. x}{\sqrt{1-(\sin. x)^2}} = -\frac{d \cos. x}{\sqrt{1-(\cos. x)^2}} = \frac{d \operatorname{tang}. x}{1+(\operatorname{tang}. x)^2}$$
$$= \frac{d \cot. x}{1+(\cot. x)^2}.$$

Betecknar man nu *sin.* x med y, och x med *arc.* (*sin.*
erhåller man:

$$d \text{ arc. } (\sin. = y) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

och på lika sätt finner man

$$d \text{ arc. } (\cos. = y) = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

samt $d \text{ arc. } (\text{tang.} = y) = \dfrac{dy}{1+y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots$

äfvensom $d \text{ arc. } (\cot. = y) = -\dfrac{dy}{1+y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (

Art. 20. De sista differentialformlerna gifva genom
vändning följande integralformler:

$$\int \cos. x dx = \sin. x, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \sin. x dx = -\cos. x, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{\cos. x^2} = \text{tang. } x, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x^2} = -\cot. x, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

vidare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. } (\sin. = x) = -\text{arc. } (\cos. = x) \ldots$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. } (\text{tang.} = x) = -\text{arc. } (\cot. = x) \ldots$$

och dessutom kunna följande lätt finnas:

$$d \,(\text{Log. nat. sin. } x) \text{ är } = \frac{d \sin. x}{\sin. x} = \frac{\cos. x dx}{\sin. x} = \cot.$$

följaktligen

$$\int \cot. x dx = \text{Log. nat. sin. } x, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

äfvensom $\int \text{tang. } x dx = -\text{Log. nat. cos. } x; \ldots\ldots\ldots\ldots$

vidare är $d \,(\text{Log. nat. tang. } x) = \dfrac{d \text{ tang. } x}{\text{tang. } x} = \dfrac{dx}{\cos. x^2 \text{ tang.}}$

$$= \frac{dx}{\sin. x \cos. x} = \frac{d\,(2x)}{\sin. 2x}$$

hvaraf

$$d \,(\text{Log. nat. tang. } \tfrac{1}{2} x) = \frac{dx}{\sin. x} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

och $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin. x} = \text{Log. nat. tang. } \frac{x}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots$

samt $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos. x} = \text{Log. nat. tang. } \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \text{Log. nat. cot. } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Om vidare $\dfrac{1}{1-x^2}$ sättes $= \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-x} = \dfrac{a(1-x)+b(1}{(1+x)(1-}$
blifver $1 = a(1-x) + b(1+x)$. Tager man $1 + x = 0$,

-1, erhålles $1 = a(1+1)$, hvaraf $a = \frac{1}{2}$; och tager man $x = 0$, alltså $x = 1$, erhålles $1 = 2b$, hvaraf $b = \frac{1}{2}$ och

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}, \text{ samt slutligen}$$

$$\frac{}{x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Log. nat. } (1+x) - \frac{1}{2} \text{ Log. nat. } (1-x),$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \text{ Log. nat. } \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XII)}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \text{ Log. nat. } \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XIII)}$$

Slutligen är

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Log. nat. } (x+\sqrt{1+x^2}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XIV)}$$

som $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Log. nat. } (x+\sqrt{x^2-1}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(XV).}$$

Art. 21. För att finna arc. (tang. $= x) = \int\frac{dx}{1+x^2}$, behöf- nan blott genom division utveckla $\frac{1}{1+x^2}$ i en serie, och sedan rera denna term efter term. Man erhåller på detta sätt

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \text{ och}$$

$$\frac{dx}{+x^2} = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \ldots \text{ eller}$$

$$\text{arc. (tang.} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc. (tang.} = 1) = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots \text{ och}$$

s halfcirkeln $\pi = 4\,(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots)$ eller

$$\text{arc. (tang.} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{3^2} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{3^3} + \ldots)$$

tligen $\pi = 6\sqrt{\frac{1}{3}}\,(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \ldots) = 3{,}1415926\ldots$

På samma sätt erhåller man af

$$\frac{}{x^2} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{5}{16}x^6 + \ldots$$

$$\frac{1}{-x^2} = \int dx + \tfrac{1}{2}\int x^2 dx + \tfrac{3}{8}\int x^4 dx + \tfrac{5}{16}\int x^6 dx \ldots \text{ eller}$$

$$\text{arc. (sin.} = x) = x + \frac{1x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc. (sin.} = \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,(1 + \tfrac{1}{24} + \tfrac{3}{640} + \tfrac{5}{7168} + \ldots), \text{ således}$$

$$\pi = 3\left\{\begin{matrix}1{,}00000\\0{,}04167\\0{,}00468\\0{,}00070\end{matrix}\right\} = 3{,}141\ldots,$$

Vidare är, om man sätter

$$\sin. x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + .$$

$$\frac{d \sin. x}{dx} = \cos. x = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 +$$

$$\frac{d \cos. x}{dx} = - \sin. x = 2A_2 + 2.3\, A_3 x + 3.4\, A_4 x^2 +$$

$$- \frac{d \sin. x}{dx} = - \cos. x = 2.3\, A_3 + 2.3.4\, A_4 x + \ldots$$

$$- \frac{d \cos. x}{dx} = \sin, x = 2.3.4\, A_4 + \ldots$$

Men nu är för $x = 0$; $\sin. x = 0$, och $\cos. x = 1$; för ur första serien erhålles $A_0 = 0$, ur den andra cos. $0 = 1$, ur den tredje $A_2 = 0$, ur den fjerde $A_3 = -$ ur den femte $A_4 = 0$ o. s. v.; och om dessa värden ins den första serien på sin. x, erhålles

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

På lika sätt erhålles

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

vidare $\tang. x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \ldots$

och $\cot. x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} - \ldots$

Art. 22. Är $y = f(x)\varphi(x)$, d. v. s. en produk tvenne funktioner af den oberoende variabla x, så är differe

$dy = f(x+dx)\varphi(x+dx) - f(x)\varphi(x)$ eller, om för $f(x$ insättes $f(x) + df(x)$ och för $\varphi(x+dx)$, $\varphi(x) + d\varphi(x)$

$dy = [f(x) + df(x)]\ [\varphi(x) + d\varphi(x)] - f(x)($ således om man verkställer multiplikationen, $dy = \varphi(x).$ $+ f(x).d\varphi(x) + df(x).d.\varphi(x)$, och om man låter $df(x).$ såsom en produkt af tvenne elementer eller oändligt sm heter, försvinna

$$d[f(x)\varphi(x)] = \varphi(x)df(x) + f(x)d\varphi(x) \quad . \; . \; . \; . \; .$$

T. ex. $d(x^2$ Log. nat. $x) =$ Log. nat. $x.d(x^2) + x^2\, d($Log. n

$$= \text{Log. nat. } x\,.\,2xdx + x^2\,\frac{dx}{x} = (2\,\text{Log. nat. } x + 1)$$

Vidare

$$d[(3x-1)\sqrt{x^2+1}] = \sqrt{x^2+1}.d(3x-1) + (3x-1).d[(x^2$$

$$= \sqrt{x^2+1}\,.3dx + (3x-1).\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}.2d$$

Omvändt gifver formeln (I)

$d\varphi(x) = \frac{d[f(x)\varphi(x) - \varphi(x)d\,f(x)}{f(x)}$, eller, om $f(x)\varphi(x)$ ä $= \psi(x)$, hvaraf $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$,

$$d\varphi(x) = \frac{d\psi(x) - \frac{\psi(x)}{f(x)}df(x)}{f(x)}, \text{ eller}$$

$$d\left(\frac{\psi(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)\,d\,\psi(x) - \psi(x)d\,f(x)}{[f(x)]^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

T. ex. $d.\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\,d.(x^2-1) - (x^2-1)d.(x+2)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)\,2xdx - (x^2-1)dx}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}dx.$$

Genom omvändning af första differentialformeln i denna erhåller man slutligen under namn af *reduktionsformel* föl- bekanta integralregel:

$f(x)\varphi(x) = \int\varphi(x)df(x) + \int f(x)d\varphi(x)$, eller

$$\int\varphi(x)df(x) = f(x)\varphi(x) - \int f(x)d\varphi(x) \quad . \; . \; . \; (\mathrm{III}).$$

$\int$ Log. nat. $x dx$ = Log. nat. $x . x - \int x . d$ (Log. nat. x)

$= x$.Log. nat. $x - \int\frac{xdx}{x} = x$ (Log. nat. $x - 1$).

$$^x dx = x^2 e^x - \int e^x.2xdx = x^2 e^x - 2\int x.e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x)$$
$$= (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Art. 23. En yta ABC (fig. 22), som begränsas af en nie AB samt dess koordinater AC och BC, kan förme- ett oändligt antal ordinater såsom MP, NQ etc. indelas i rmiga elementer med den konstanta bredden $MN = dx$ en föränderliga längden $MP = y$; sätta vi derföre ytinne- $ABC = F$, så blir ytinnehållet af elementet $MNPQ$:

$$dF = ydx$$

ledes: $F = \int ydx$.

. ex. för en parabel med parametern p är $y^2 = px$, och densammas area

$$\int\sqrt{px}.dx = \sqrt{p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{p}\,x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\,x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3}\,xy.$$

Fig. 22.

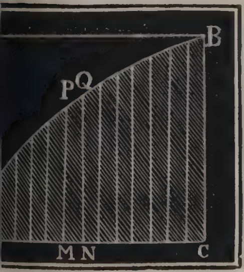
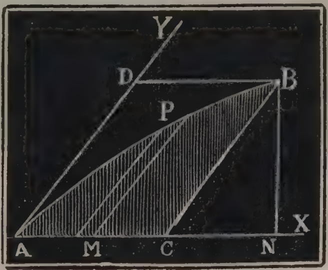


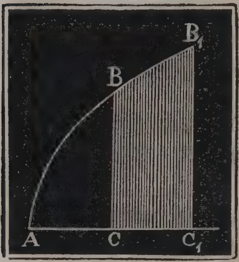
Fig. 23.



Parabelytan ABC utgör således två tredjedelar af den o
tande rektangelns $ABCD$ yta.

Denna formel gäller äfven för snedvinkliga koordi
sammanträffande under vinkeln α, såsom t. ex. för ytan
(fig. 23), om man endast i stället för $BC = y$ insätter
malafståndet $BN = y \sin. \alpha$. Man erhåller då här $F =$
$\int y dx$. T. ex. för en parabel, då abscissaxeln AX bild
diameter och ordinataxeln AY en tangent till densamma
således y^2 är $= p_1 x = \frac{px}{\sin. \alpha^2}$, blifver $F = \frac{2}{3} xy \sin. \alpha$, d
ytan ABC är $= \frac{2}{3}$ af parallelogrammen $ADBC$.

Fig. 24.

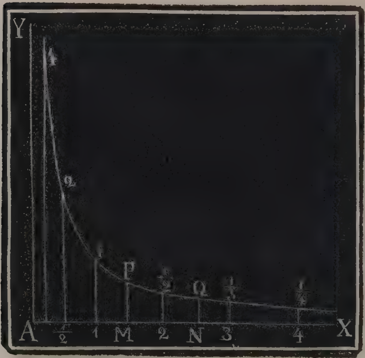


För en yta $BCC_1B_1 = F$, emella
scissorna $AC_1 = c_1$ och $AC = c$
24) är enl. art. 12, $F = \int_c^{c_1} y dx$.

T. ex. för $y = \frac{a^2}{x}$ är $F = \int_c^{c_1}$
$= a^2$ (Log. nat. c_1 — Log. nat. c)
$F = a_2$ Log. nat. $\left(\frac{c^1}{c}\right)$.

Eqvationen $y = \frac{a^2}{x}$ motsvarar den
af art. 3 kända kurvan PQ (fig. 25
om AN är $= c_1$ och $AM = c$, så är $F = a^2$ Log. nat.
arean af ytan $MNQP$. Antager man ytterligare för enk
skull $a = c = 1$, så
$F =$ Log. nat. x; sålun
göra ytinnehållen (1M
(1NQ1) o. s. v. de nat
logarithmerna till absci
AM, AN o. s. v.
kroklinien är en så kalla
sidig hyperbel, och de
linierna AX och AY
hvilka kurvan ständigt
mer och mer närmar sig,
att uppnå dem, äro
asymptoter. Med anledn
detta sammanhang mella
scissorna och ytinnehållen

Fig. 25.



las de naturliga logarithmerna äfven ofta hyperboliska.

Art. 24. Hvarje integral $\int y dx = \int \varphi(x) dx$ kan
sättas lika med en ytas arealinnehåll F, och om integ
icke kan verkställas genom någon af de kända reglorna, så

tminstone approximativt utföra den, genom att på geome-
räg söka den motsvarande ytans area.

g. 26.

För en yta $ABQN$ (fig. 26), som bestämmes af basen $AN = x$ och de trenne lika långt från hvarandra stående ordinaterna $AB = y_0$, $MP = y_1$ och $NQ = y_2$, har man den trapezoidala delen $ABQN = F_1 = (y_0 + y_2)\frac{x}{2}$, och den segmentformade $BPQS$, om man anser kroklinien BPQ som en parabel,

$$F_2 = \tfrac{2}{3} PS \, . \, BR = \tfrac{2}{3}(MP - MS) \, . \, AN$$
$$= \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)x,$$

och således hela ytan

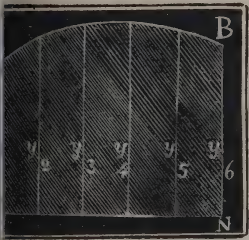
$$= F_1 + F_2 = \left[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right]x$$
$$= [\tfrac{1}{6}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3} y_1]x = (y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{x}{6}\,.$$

ntager man en medelordinat y, och sätter $F = xy$, erhålles

$$y = \frac{(y_0 + 4y_1 + y_2)}{6}.$$

ör att i eulighet härmed finna arean af en yta $MABN$ (fig. 27), som står på en gifven bas $MN = x$, och bestämmes genom ett udda antal ordinater, $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ samt således af dessa indelas i ett jemnt antal lika breda bandformade elementer, behöfver man endast på hvarje af dessa sednare tillämpa ofvanstående regel. Bredden af hvarje element är $= \frac{x}{n}$, och således ytan

Fig. 27.



' det första elementparet $= \dfrac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \cdot \dfrac{2x}{n}$,

» andra » $= \dfrac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \cdot \dfrac{2x}{n}$,

» tredje » $= \dfrac{y_4 + 4y_5 + y_6}{6} \cdot \dfrac{2x}{n}$ o. s. v.;

arean af de första sex elementerna, eller, de första tre för hvilka n är $= 6$:

$$= (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\frac{x}{3 \cdot 6}$$
$$= [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]\frac{x}{18};$$

häraf är lätt att inse, det arean af en yta, bestående a
elementpar, är

$$F = [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]\frac{}{3}$$

och att i allmänhet för en yta af n elementer är

$$F = [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-}$$

Äfven är medelhöjden af en sådan yta

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-}}{3n}$$

hvarvid n alltid måste vara ett jemnt tal.

Denna under namn af *Simpsonska regeln* kända for
tillämplig vid bestämmandet af en integral $\int_c^{c_1} y dx = \int_c^{c_1} \varphi($
om man indelar $x = c_1 - c$ i ett jemnt antal n lika delar,
nar ordinaterna $y_0 = \varphi(c_0), y_1 = \varphi\left(c_0 + \frac{x}{n}\right), y_2 = \varphi\left(c_0\right.$

$$y_3 = \varphi\left(c_0 + \frac{3x}{n}\right) \ldots \text{ ända tills } y_n = \varphi(x)$$

samt insätter dessa värden i formeln

$$\int_c^{c_1} y dx = \int_c^{c_1} \varphi(x) dx$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})$$

T. ex. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ gifver, då $c_1 - c$ här är $= 2 - 1 = 1$ och $y = \varphi(x)$
om man antager $n = 6$, således $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = \frac{1}{6}$,

$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000$, $y_1 = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7} = 0{,}8571$, $y_2 = \frac{1}{\frac{8}{6}} = \frac{3}{4} =$
$y_3 = \frac{1}{\frac{9}{6}} = \frac{6}{9} = 0{,}6666$, $y_4 = \frac{1}{\frac{10}{6}} = \frac{6}{10} = 0{,}6000$, $y_5 = \frac{1}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{11} =$
och $y_6 = \frac{1}{\frac{12}{6}} = \frac{6}{12} = 0{,}5000$, hvaraf
$y_0 + y_6 = 1{,}5000$, $y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692$ och $y_2 + y_4 =$
och den sökta integralen

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1{,}5000 + 4 . 2{,}0692 + 2 . 1{,}3500)\frac{1}{18} = \frac{12{,}4768}{18} = 0$$

Men enl. art. 17 är $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \text{Log. nat. } 2 - \text{Log. nat } 1$
$= 0{,}693147$. Öfverensstämmelsen mellan de båda resulta
således i det närmaste fullkomlig.

Art. 25. I det följande skola vi meddela ännu en
regel, hvilken äfven kan användas för ett udda antal n b
made elementer. Betraktar man ett mycket nedtryckt s

) (fig. 28) såsom ett parabelsegment, så har man enl. art. tsammas area $F = \frac{2}{3}\ AB \,.\, MD$; eller, om AT och BT äro tangenter i ändpunkterna A och B, och derföre CT är $= 2CM$,

Fig. 28.

$F = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB \,.\, TE}{2} = \frac{2}{3}$ af den likbenta triangeln ASB, som har lika höjd med ATB, och alltså äfven $F = \frac{2}{3}\ AC \,.\, CS = \frac{2}{3}\ \overline{AC^2}$. SAC. Vinkeln $SAC = SBC$ är $= TAC + TAS =$ $- TBS$; och sätter man derföre de små vinklarne TAS TBS lika med hvarandra, erhålles

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ och}$$

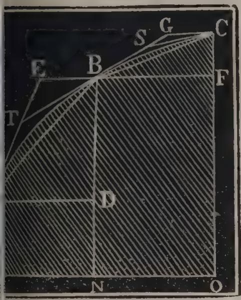
$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

angentvinklarne TAC och TBC betecknas med δ och ε. ı ytterligare $AC = BC = \frac{1}{2} AB$ är $= \frac{1}{2}$ kordan s, så har man

$$F = \tfrac{1}{6} s^2 \operatorname{tang.} \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Denna formel kan äfven tillämpas på ytan $MABN$ (fig. 29), hvars tangentvinklar $TAD = \alpha$ och $TBE = \beta$ äro gifna; sätter man neml. vinkeln $BAD = ABE$ $= \sigma$, så har man

Fig. 29.



$$TAB = \delta = TAD - BAD = \alpha - \sigma$$

och

$$TBA = \varepsilon = ABE - TBE = \sigma - \beta,$$

hvaraf

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta$$

och arean af segmentet på AB:

$$F = \tfrac{1}{6} s^2 \operatorname{tang.} \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

eller, emedan skillnaden $\alpha - \beta$ är liten,

$$\frac{s^2}{12} \operatorname{tang.} (\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12} \left(\frac{\operatorname{tang.} \alpha - \operatorname{tang.} \beta}{1 + \operatorname{tang.} \alpha \operatorname{tang.} \beta}\right),$$ eller, om α och β betydligt skilja sig från hvarandra, och derföre i tang. α. β medelvärdet σ insättes i stället för α och β,

$$\tfrac{1}{12} s^2 \frac{\operatorname{tang.} \alpha - \operatorname{tang.} \beta}{1 + \operatorname{tang.} \sigma^2} = \tfrac{1}{12} s^2 \cos. \sigma^2 (\operatorname{tang.} \alpha - \operatorname{tang.} \beta), \text{och}$$

es, då i stället för $s \cos \sigma$ basen $MN = x$ insättes,

$$F = \frac{x^2}{12} (\operatorname{tang.} \alpha - \operatorname{tang.} \beta),$$

hvaraf hela arean $MABN$, om y_0 och y_1 beteckna ordi
MA och NB:

$$F_1=(y_0+y_1)\frac{x}{2}+(\text{tang.}\,\alpha-\text{tang.}\,\beta)\frac{x^2}{12}.$$

Om till denna yta gränsar ytterligare en annan N
med lika stor bas $NO=x$, ordinaterna $BN=y_1$ och CO
samt tangentvinklarne $SBF=\beta$ och $SCG=\gamma$, så har man de

$$F_2=(y_1+y_2)\frac{x}{2}+(\text{tang.}\,\beta-\text{tang.}\,\gamma)\frac{x^2}{12},$$

samt således arean af det hela, då $-$ tang. β utgår mot $+$ t

$$F=F_1+F_2=(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+\tfrac{1}{2}y_2)x+(\text{tang.}\,\alpha-\text{tang.}\,\gamma$$

För en yta, bestående af tre lika breda bandforma
menter, är likaledes, om α betecknar tangentvinkeln i
nelse- och δ i slutpunkten,

$$F=(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\tfrac{1}{2}y_3)x+(\text{tang.}\,\alpha-\text{tang.}\,\delta)\frac{x}{1}$$

och i allmänhet för en yta, bestämd af abscissorna $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n}$
ordinaterna $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$ och tangentvinklarne α
$\alpha_2 \dots \alpha_n$,

$$F=(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}y_n)\frac{x}{n}+\tfrac{1}{12}(\text{tg.}\,\alpha-\text{tg.}\,\alpha_n)($$

En integral

$$\int_c^{c_1}ydx=\int_c^{c_1}\varphi(x)dx$$

$$=(\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}y_n)\frac{x}{n}+\tfrac{1}{12}(\text{tg.}\,\alpha-\text{tg.}\,\alpha_n)($$

kan i enlighet härmed bestämmas, då man sätter $x=c$
beräknar

$$y_0=\varphi(c),\ y_1=\varphi\left(c+\frac{x}{n}\right),\ y_2=\varphi\left(c+\frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3=\varphi\left(c+\frac{3x}{n}\right)\dots y_n=\varphi(c_1),$$

äfvensom tang. $\alpha=\frac{dy}{dx}=\psi(x)=\psi(c)$ och tang. $\alpha_n=\psi$
samt insätter dessa värden i eqvationen.

T. ex. för $\int_1^2\frac{dx}{x}$ har man, om n antages $=6$, då här
c_1-c är $=2-1=1$ och $y=\varphi(x)$ är $=\frac{1}{x}$,
$y_0=\frac{1}{c}=1,\ y_1=\frac{1}{1+\frac{1}{6}}=\frac{6}{7},\ y_2=\frac{6}{8},\ y_3=\frac{6}{9},\ y_4=\frac{6}{10},\ y_5$
och $y_6=\frac{6}{12}$, vidare då $\frac{dy}{dx}$ är $=\frac{d(x^{-1})}{dx}=-\frac{1}{x^2}$, tang. $\alpha=$
$=-1$ och tang. $\beta=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$, samt således

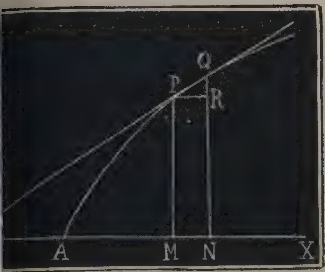
$$= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{7} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{6}{9} + \tfrac{6}{10} + \tfrac{6}{11} + \tfrac{1}{4}\right) \cdot \tfrac{1}{6} + \left(-1 + \tfrac{1}{4}\right) \cdot \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{36}$$

$$= \frac{4{,}1692}{6} - \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{1}{36} = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Jmfr exemplet till förra art.)

Art. 26. Ur eqvation $y = f(x)$ emellan en kroklinies koor-r $AM = x$ och $PM = y$ (fig. 30), måste man äfven kunna härleda en eqvation mellan bågen $AP = s$ och den ena eller andra af de båda koordinaterna. Gifver man x en tillväxt $MN = PR = dx$, så ökas äfven y med $RQ = dy$ och s med elementet $PQ = ds$, och då är i den rätvinkliga triangeln PQR

Fig. 30.



$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$, eller $ds^2 = dx^2 + dy^2$, alltså
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, och följaktligen sjelfva bågstycket
$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

T. ex. för den Neilska parabeln (se fig. 10), hvars eqva-r $ay^2 = x^3$, har man $2ay\,dy = 3x^2 dx$, hvaraf

$$dy = \frac{3x^2 dx}{2ay} \text{ och } dy^2 = \frac{9x^4 dx^2}{4a^2 y^2} = \frac{9x dx^2}{4a},$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{9x}{4a}\right) dx^2 \text{ och}$$

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)} dx = \frac{4a}{9} \int \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{9x}{4a}\right)$$

$$= \frac{4a}{9} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4a}{9} \tfrac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \tfrac{8}{27} a \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3}.$$

För att finna den härtill nödiga konstanten, antaga vi, att ar räknas från samma punkt som x och y. Då erhålles

$$0 = \tfrac{8}{27} a \sqrt{1^3} + \text{konst., alltså konst.} = -\tfrac{8}{27} a \text{ och}$$

$$s = \tfrac{8}{27} a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3} - 1\right].$$

T. ex. för bågstycket AP, hvars abscissa x är $= a$, blifver

$$s = \tfrac{8}{27} a \left[\sqrt{\left(\tfrac{13}{4}\right)^3} - 1\right] = 1{,}736\ a.$$

Inför man ytterligare tangentvinkeln $QPR = PTM = \alpha$ 30), så har man äfven

$$QR = PQ . \sin. QPR \text{ och } PR = PQ \cos. QPR, \text{ eller}$$

$$dy = ds . \sin. \alpha \text{ och } dx = ds . \cos. \alpha,$$

lltså, utom $\text{tang. } \alpha = \frac{dy}{dx}$ (art. 5), äfven

$$\sin.\,\alpha = \frac{dy}{ds} \text{ och } \cos.\,\alpha = \frac{dx}{ds}, \text{ äfvensom}$$

$$s = \int\sqrt{1 + \text{tang.}\,\alpha^2}.\,dx = \int\frac{dy}{\sin.\,\alpha} = \int\frac{dx}{\cos.\,\alpha}.$$

Är nu eqvation gifven mellan tvenne af storheterna
s och d, så kan man härefter äfven finna eqvation mell
tvenne andra af desamma. Är t. ex. $\cos.\,\alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$, så ha

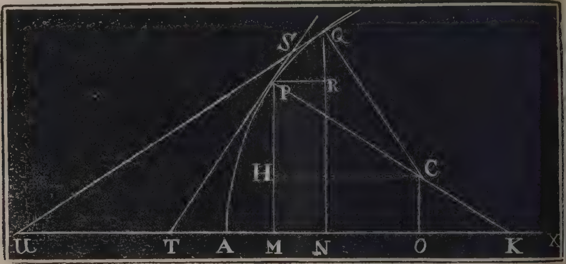
$$dx = ds.\cos.\,\alpha = \frac{sds}{\sqrt{c^2+s^2}} \text{ och}$$

$$x = \int\frac{sds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{2sds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}} +$$

$= \sqrt{c^2+s^2}$ + konst., och, om x och s samtidigt är
med noll, $x = \sqrt{c^2+s^2} - c$.

Art. 27. En rät linie, som är dragen vinkelrät mo
genten PT (fig. 31), är äfven vinkelrät mot sjelfva krokl

Fig. 31.



tangeringspunkten P, emedan tangenten angifver kurvans
ning i denna punkt. Stycket PK af denna vinkelräta
emellan tangeringspunkten och abscissaxeln kallas *norma*
densammas projektion MK på abscissaxeln, *subnormal*. E
vinkeln MPK är lika med tangentvinkeln $PTM = \alpha$,
$MK = MP$ tang. α eller

$$\text{Subnormalen} = y \text{ tang. } \alpha = y\,\frac{dy}{dx}.$$

För parabeln t. ex., der man har $y^2 = px$, såled
$= \frac{pdx}{2y}$, är Subnormalen $= y\,\frac{p}{2y} = \frac{p}{2}$, och alltså konstan

Drager man genom en till P oändligt nära belägen
Q, en annan normallinie QC, så erhåller man i skärning
ten C mellan båda medelpunkten för en cirkel, som kan
dragas genom båda tangeringspunkterne P och Q, utgöran
såkallade *osculerande* cirkeln; styckena CP och CQ af n
linierne äro radier till denna cirkel eller de såkallade *kröl*

e. Bland alla cirklar, hvilka kunna dragas genom P och denna den, som mest närmar sig till bågelementet PQ, man kan antaga den sammanfalla dermed.
eteckna vi krökningsradien $CP = CQ$ med r, bågstycket ed s, således dess element PQ med ds, och tangentvinkeln med α, således dess element $SUM - STM = - UST$ PCQ, med $d\alpha$, så hafva vi, då PQ är $= CP$ multi-d med bågen till vinkeln PCQ, $ds = - r d\alpha$, och följ-n kröningsradien $r = - \frac{ds}{d\alpha}$.
'anligen kan α bestämmas endast förmedelst eqvation mel ordinaterna, derigenom att man sätter tang. $\alpha = \frac{dy}{dx}$.
essutom är d tang. $\alpha = \frac{d\alpha}{\cos. \alpha^2}$ och cos. $\alpha = \frac{dx}{ds}$, hvaraf

$$d\alpha = \cos. \alpha^2 . d \text{ tang. } \alpha = \frac{dx^2}{ds^2} . d \text{ tang. } \alpha, \text{ och}$$

$$r = - \frac{ds^3}{dx^2 . d \text{ tang. } \alpha}.$$

enom omvändning af denna formel kan man äfven *recti-* jelfva kurvan, och alltså finna s.
oordinaterna $AO = u$ och $OC = v$ till *krökningscen-* ? äro

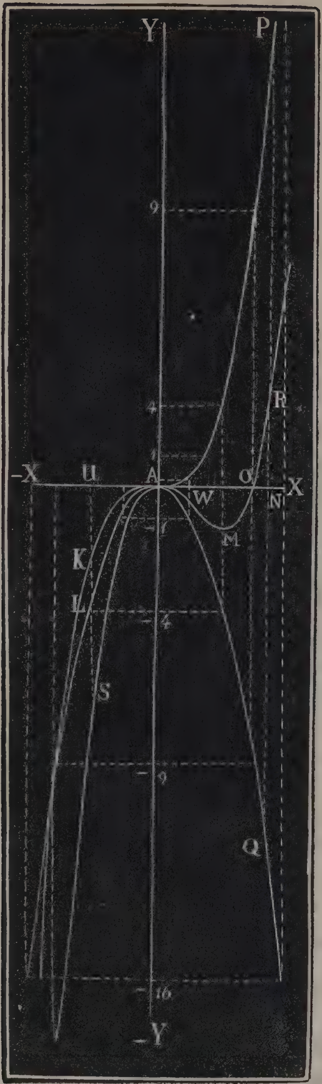
$u = AM + HC = x + CP$. sin. CPH, eller
$u = x + r$ sin. α, och
$v = OC = MP - HP = y - CP$ cos. CPH, eller
$v = y - r$ cos. α.

ammanbindas alla krökningsmedelpunkterne, uppkommer nom en ny kurva, som kallas *evoluta* till AP, och som mes af koordinaterna u och v.
rt. 28. Många funktioner, hvilkas användning förekom- praktiken, kunna sammansättas ur de hufvudfunktioner, x^m, $y = e^x$ och $y =$ sin. x, $y =$ cos. x o. s. v., hvilka ofvan lärt känna; och derföre kunna äfven, med tillhjelp gående satser, egenskaperna, motsvarande tangenters lägen, tur, krökningsradier m. m. uppsökas, äfvensom motsva- kroklinier utkonstrueras, såsom följande exempel visa:
åt den eqvation, vi taga i betraktande vara

$$y = x^2\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^3}{3} - x^2.$$

enna är $dy = (x^2 - 2x)dx$, följaktligen tang. $\alpha = \frac{dy}{dx}$ $-2x$; tangenten är sålunda parallel med abscissaxeln i kter, som uppfylla vilkoret $x^2 = 2x$, d. v. s. för $x = 0$ r $x = 2$; vidare är d tang. $\alpha = 2(x-1)dx$, och der-

Fig. 32.



före är den punkt, hvars koo
ter äro $x = 1$ och $y = \frac{1}{3} -$
$- \frac{2}{3}$, en inflexionspunkt. Ytter
är $ds^2 = dx^2 + (x^2 - 2x)$
$= [1 + (x^2 - 2x)^2]$
och derföre kurvans krökning

$$r = - \frac{[1 + (x^2 - 2x)^2]^{\frac{3}{2}}}{2(x-1)}.$$

för $x = 0$, är $r = - \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$,
$= 1$, $r = \infty$, för $x = 2$, $r = -$
$= 3$, $r = -7{,}905$ o. s. v.

Fig. 32 visar motsvarande
$X\overline{X}$ är abscissaxeln, $Y\overline{Y}$ or
axeln och A origo eller noll
ten. Genom denna går icke
kurvan KAP, motsvarande
tionen $y_1 = \frac{x^3}{3}$, utan äfven
van LAQ, som tillhör eq
$y_2 = -x^2$. Då $y = \frac{x^3}{3} -$
så finner man en punkt R a
svarande kurva, om man
$y_2 = NQ$ från $y_1 = NP$, oc
så gör $NR = NP - NQ$. U
detta på många ställen, erhålle
den sökta kroklinien SAW
hvilken har en inflexionspun
W, träffar abscissaxeln i A o
samt vid A och M ligger p
med denna axel.

Art. 29. Om genom obser
eller mätning en serie mots
värden blifvit bestämda på
riabla u, v och y i en fu
$y = \alpha u + \beta v$, så kan man
lära känna de värden på ko
terna α och β, hvilka äro i
gaste mån befriade från de små tillfälliga och oregelbund
servations- eller mätningsfelen, och derföre äfven möjligast
grannt uttrycka relation mellan storheterna u, v och y,

u och v äfven kunna vara bekanta funktioner af en och
variabla x. Bland alla reglor, hvilka blifvit använda till
t af denna fråga, d. v. s. till utrönandet af det sanno-
tigaste värdet på konstanterna, är den såkallade *minsta*
methoden den allmännaste och mest vetenskapligt grun-

$$\text{t}\left\{\begin{array}{lll} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n, \end{array}\right\}$$ vara de, funktionen $y=\alpha u+\beta v$

ande observationsresultaten, så har man följande värden
rvationsfelen och deras qvadrater:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=y_1-(\alpha u_1+\beta v_1) \\ z_2=y_2-(\alpha u_2+\beta v_2) \\ z_3=y_3-(\alpha u_3+\beta v_3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_n=y_n-(\alpha u_n+\beta v_n) \end{array}\right\}\text{ och}$$

$$\left.\begin{array}{l} =y_1^2-2\alpha u_1y_1-2\beta v_1y_1+\alpha^2u_1^2+2\alpha\beta u_1v_1+\beta^2v_1^2 \\ =y_2^2-2\alpha u_2y_2-2\beta v_2y_2+\alpha^2u_2^2+2\alpha\beta u_2v_2+\beta^2v_2^2 \\ =y_3^2-2\alpha u_3y_3-2\beta v_3y_3+\alpha^2u_3^2+2\alpha\beta u_3v_3+\beta^2v_3^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ =y_n^2-2\alpha u_ny_n-2\beta v_ny_n+\alpha^2u_n^2+2\alpha\beta u_nv_n+\beta^2v_n^2 \end{array}\right\}$$

håller summan af alla felens qvadrater, om man för kort-
ull betjenar sig af summationstecknet Σ, för att antyda
mation af likartade storheter, och alltså sätter $y_1^2+y_2^2$
$+\ldots+y_n^2=\Sigma(y^2)$,
$y_1+v_2y_2+v_3y_3+\ldots+v_ny_n=\Sigma(vy)$ o. s. v.
$\Sigma(y^2)-2\alpha\Sigma(uy)-2\beta\Sigma(vy)+\alpha^2\Sigma(u^2)+2\alpha\beta\Sigma(uv)+\beta^2\Sigma(v^2)$.
denna eqvation äro inga andra obekanta än den beroende
summan af felens qvadrater $\Sigma(z^2)$ och konstanterna
β i funktionen $y=\alpha u+\beta v$, hvilka här äro att anse
oberoende variabla. Minsta qvadratmethoden fordrar, att
och β skola så väljas, att qvadratsumman $\Sigma(z^2)$ blifver
imum; och derföre måste vi differentiera den erhållna
en för $\Sigma(z^2)$ en gång i afseende å α samt en gång i
å β, och sedan sätta hvardera af de härigenom erhållna

differentialqvoterna lika med noll. Man erhåller på dett
följande tvenne eqvationer för bestämmandet af α och β.

$$-\Sigma(uy)+\alpha\Sigma(u^2)+\beta\Sigma(uv)=0$$
$$-\Sigma(vy)+\beta\Sigma(v^2)+\alpha\Sigma(uv)=0$$

hvaraf

$$\alpha=\frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy)-\Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-\Sigma(uv)\Sigma(uv)},\ \text{och}$$
$$\beta=\frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy)-\Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2)-\Sigma(uv)\Sigma(uv)}.$$

Dessa formler öfvergå för en funktion $y=\alpha+\beta v$, då så
u är $=1$ och till följe deraf $\Sigma(uv)=\Sigma(v)$, $\Sigma(uy)=$
och $\Sigma(u^2)=1+1+1+\ldots.=n$, d. v. s. $=$ antalet af
tioner eller observationer, i följande:

$$\alpha=\frac{\Sigma(v^2)\Sigma(y)-\Sigma(v)\Sigma(vy)}{n\Sigma(v^2)-\Sigma(v)\Sigma(v)}\ \text{och}$$
$$\beta=\frac{n\Sigma(vy)-\Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2)-\Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

För den ännu enklare funktionen $y=\beta v$, i hvilken
$=0$, erhåller man

$$\beta=\frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v^2)},$$

och slutligen för det enklaste fallet $y=\alpha$, då det såled
frågan om utrönande af sannolikaste värdet af en enda storh

$$\alpha=\frac{\Sigma(y)}{n};$$

detta värde är således arithmetiska medium af alla de g
mätning eller observation erhållna värdena.

Ex. För att lära känna lagen för en likformigt tillta
rörelse, hvars begynnelsehastighet är c och acceleration p
man uppmätt de på tiderna t_1, t_2, t_3 o. s. v. tillryggalagda
styckena, och dervid funnit följande:

Tider:	0	1	3	5	7	10
Vägstycken:	0	5	20	38	$58\frac{1}{2}$	10

Är nu $s=ct+\frac{pt^2}{2}$ formeln för denna slags rörelse,
frågan här, att bestämma konstanterna c och p. Sätter ma
detta ändamål i ofvanstående formler $u=t$ och $v=t^2$,
$\alpha=c$, $\beta=\frac{p}{2}$ och $y=s$, så erhåller man till beräkni
c och p följande eqvationer

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\Sigma(st) - \Sigma(t^3)\Sigma(st^2)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)} \text{ och}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\Sigma(st^2) - \Sigma(t^3)\Sigma(st)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)}.$$

ill bestämmande af dessa summor utföra vi följande räk-

t^2	t^3	t^4	s	st	st^2
1	1	1	5	5	5
9	27	81	20	60	180
25	125	625	38	190	950
49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
100	1000	10000	101	1010	10100
184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(st)$	14101,5 $= \Sigma(st^2)$

äraf låter beräkna sig

$$\frac{13108 . 1674,5 - 1496 . 14101,5}{.184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{85340}{17386} = 4,908 \text{ fot och}$$

$$\frac{184 . 14101,5 - 1496 . 1674,5}{184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{89624}{173860} = 0,5155 \text{ fot,}$$

rmeln för den observerade rörelsen blifver följaktligen:

$$s = 4,908\, t + 0,5155 . t^2.$$

nligt denna formel blifver

erna	0	1	3	5	7	10 sec.
kena	0	5,43	19,36	37,43	59,62	100,63 fot.

Innehåll:

Rättelser:

I Förordet rad. 2 uppifr. står: *den* läs: *det*

» » 14 » » *alllid* » *alltid*

Herrn Prof. Dr. O. Stolz freundlichst der Verfasser.

us dem XCI. Bande der Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. II. Abth. März-Heft. Jahrg. 1885.

lotiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen.

Von Prof. Dr. **E. Weiss**,

wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. März 1885.)

Vor Kurzem stiess ich bei einer eingehenderen Discussion es Lagrange'schen Reversionssatzes[1] auf ein paar Specialfälle on zwei der Binomialreihe verwandten Reihengruppen und wurde adurch veranlasst, dieselbe allgemeiner zu untersuchen. Von den ben erwähnten Reihengruppen ist die eine folgende: L en

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+2r+1)}{2!}x^2 + \\ &\frac{m(m+3r+1)(m+3r+2)}{3!}x^3 + \ldots + \\ &+ \frac{m(m+nr+1)(m+nr+2)\ldots(m+nr+n-1)}{n!}x^n + \ldots \end{aligned}\right\} A$$

der, übersichtlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} X_r^{(m)} &= 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{2}\binom{m+2r+1}{1}x^2 + \ldots + \\ &+ \frac{m}{n}\binom{m+nr+n-1}{n-1}x^n + \ldots \end{aligned}\right\} A'$$

Diese Reihe enthält, wie man sofort erkennt, die Binomialihe als Specialfälle in sich. Es ist nämlich:

$$\text{für } r=0:\ X_0^{(m)} = (1-x)^{-m}$$
$$\text{für } r=-1:\ X_1^{(m)} = (1+x)^m$$

[1] Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem etc. nkschr. d. kais. Akad. d. Wissensch. XLIX. Bd., pag. 133.

Was zunächst die Convergenzbedingungen betrifft, folgt für r ganz und positiv aus dem Bildungsgesetze der Reihe unmittelbar:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[m+n(r+1)][m+n(r+1)+1]\ldots\ldots[m+n(r+1)+r-1].[m+n(r+1)+r]}{[m+nr+1]\quad[m+nr+2]\qquad\qquad[m+nr+r]\quad .\quad[n+1]}\,x =$$

$$= \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{\left[1+\frac{m}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+1}{n(r+1)}\right]\ldots\left[1+\frac{m+r-1}{n(r+1)}\right]\left[1+\frac{m+r}{n(r+1)}\right]}{\left[1+\frac{m+1}{nr}\right]\left[1+\frac{m+2}{nr}\right]\ldots\left[1+\frac{m+r}{nr}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]}\,x =$$

$$= \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{1+\frac{2m+r}{2n}+\ldots}{1+\frac{2m+r+3}{2n}+\ldots} \,.\, x = \frac{(r+1^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{x}{1+\frac{3}{2n}+\ldots} \qquad 1)$$

Dieselbe Relation gilt auch für r negativ ganz. Für r gebrochen positiv, etwa $r = +\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen vorstellen mögen, würde es zu sehr weitläufigen Rechnungen führen, wollte man die Convergenzbedingungen aus zwei unmittelbar auf einander folgenden Reihengliedern ableiten. Vergleicht man aber das allgemeine Glied mit dem Index nq, also u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$, so erhält man durch eine der obigen ganz gleiche Analyse leicht:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}} = \frac{(r+1)^{(r+1)q}}{r^{rq}} \cdot \frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+\ldots} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Etwas eingehender wollen wir uns indess mit dem Falle r negativ, gebrochen, also $r = -\frac{p}{q}$ beschäftigen.

$$u_{nq} = (-1)^{nq-1} \cdot \frac{m[np-(m+1)][np-(m+2)]\ldots[np-(m+nq-1)]}{(nq)!} x^{nq}$$

Der grösste Factor im Zähler ist der zweite $np-(m+1)$; der kleinste der letzte $n(p-q)-(m-1)$. Ist nun:

a) $p > q$, das heisst r seinem absoluten Werthe nach ein unechter Bruch, so sind von einem bestimmten Reihengliede an, alle Factoren des Zählers positiv, und man gewinnt durch eine Vergleichung von u_{nq} mit $u_{(n+1)q}$ wieder genau die Relation 2). Ist hingegen:

b) $p < q$, das heisst r ein echter Bruch, so sind von einer bestimmten Stelle an, die ersten Factoren des Zählers positiv, die letzten negativ. Ist überdies m ganz, so erfolgt der Übergang der Factoren aus den positiven in negative Werthe durch Null und es entfällt daher in der Reihe von einer bestimmten Stelle an jedes $q$te Glied. Ausserdem ist hier:

$$\frac{u_{(n+1)q}}{u_{nq}} = (-1)^p \cdot \frac{(r+1)^{(r+1)q}}{(-r)^{rq}} \cdot \frac{x^q}{1+\frac{3}{2n}+\ldots} \qquad 3)$$

Fassen wir daher das Resultat dieser Untersuchungen zusammen, so findet, wenn man im letzten Falle von dem Factor $(-1)^p$ absieht, Convergenz statt:

$$\text{für } -1 < r < 0, \text{ so lange } x < \frac{(-r)^r}{(r+1)^{(r+1)}}$$

für alle anderen Werthe von r hingegen, so lange $x < \dfrac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$.

Für die Grenzwerthe:

$$x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$$

und

$$x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

respective ist:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = +\frac{3}{2},$$

es convergirt daher auch noch für diese unsere Reihe, und w
können daher den Satz aussprechen:

Die Reihe, deren allgemeines Glied u_n den Ausdruck hat:

$$u_n = \frac{m}{n} \cdot \binom{m + nr + n - 1}{n - 1} x^n,$$

convergirt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } -1 < r < 0 \text{ und } & x \leqq \dfrac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}} \\ \text{für } \left\{\begin{array}{l} -\infty < r < 1 \\ 0 < r < +\infty \end{array}\right. \quad \text{,,} & x \leqq \dfrac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \end{array}\right\}$$

Für $r = 0$ und $r = -1$ geht die Reihe in die binomisc
über und es gelten dann die bekannten Convergenzbedingung

Vor Allem ist nun weiter zu bemerken, dass die durch
obige Reihe dargestellten Functionen Potenzgrössen sind. M
überzeugt sich nämlich durch eine einfache Multiplication lei
von dem Stattfinden der Relation:

$$X_r^{(m)} \cdot X_r^{(1)} = X_r^{(m+1)}$$

woraus, wenn man Kürze halber $X_r^{(1)}$ durch X_r schlechtw
bezeichnet, unmittelbar folgt:

$$X_r^{(m)} = X_r^m$$

Es handelt sich also jetzt nur noch darum, X_r zu ermitte
Gehen wir zu diesem Zwecke auf die Gleichung *A)* zurück,
liefert sie:

$$X_r = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1(2r+2)}{2!}x^2 + \frac{1.(3r+2)(3r+3)}{3!}x^3 + \ldots . \frac{1(nr+2)(nr+3)\ldots(nr+n)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + x\left[1 + \frac{r+1}{1!}x + \frac{(r+1)(3r+2)}{2!}x^2 + \ldots . \frac{(r+1)(nr+2)(nr+3\ldots(nr+n-1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + xX_r^{r+1}.$$

Man findet daher die Summe aller hieher gehörigen Reihen durch Auflösung der dreigliederigen Gleichung:

$$xX_r^{r+1} - X_r + 1 = 0 \qquad 8)$$

Die einfachsten Specialfälle dieser Gleichung ergeben sich, abgesehen von den schon oben erwähnten Werthen $r=0$ und $r=-1$, die bloss die Auflösung einer Gleichung ersten Grades erfordern, für $r=+1$, $-\frac{1}{2}$ und -2, und führen auf quadratische Gleichungen. Übrigens sind die Reihen für $r=+1$ und $r=-2$ im Grunde eben sowenig von einander verschieden, wie die für $r=0$ und $r=-1$. Bezeichnet man nämlich die Reihe *A)*, deren Werth von r, m und x abhängt, mit $F(x, m, r)$, so lässt das allgemeine Glied unschwer die Beziehung erkennen:

$$F(x, m, r) = F(-x, -m, -r-1) \ldots\ldots 9)$$

Die Gleichung 8) enthält daher bloss zwei Reihen, deren Summe aus der Auflösung einer quadratischen Gleichung sich ergibt. Sie lauten mit Weglassung der zweiten Wurzel, welche nicht den hier betrachteten, sondern stammverwandten Reihen angehört;

$$(1+\sqrt{1+4x})^m = 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-3)}{1.2}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{m[2n-(m+1)][2n-(nr+2)]\ldots[n-m+1]}{n!}x^n\ldots\right]$$

$$x \gtreqless \pm\frac{1}{4}$$

Für $r = -\frac{1}{2}$:

$$(2+x^2+x\sqrt{4+x^2})^m = \frac{1}{2^m}\underbrace{(x+\sqrt{4+x^2})}^{2m} =$$

$$= 2^m\left[1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}x^2+\ldots\ldots\frac{m\left[m-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]\left[m-\left(\frac{n}{2}-2\right)\right]\ldots\left[m+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]}{n!}x^n+\ldots\right]$$

$$x \gtreqless \pm 2.$$

daher, wenn man noch $\frac{m}{2}$ an die Stelle von m und $2x$ an die Stelle von x treten lässt, für $r = -\frac{1}{2}$ einfacher:

$$(x+\sqrt{1+x^2})^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m^2}{1.2}+x^2+\frac{m(m+1)(m-1)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-n+2)(m-n+4)(m-n+6)\ldots(m+n-2)}{n!}x^n+\ldots$$

$$x \leqq \pm 1.$$

Die Auflösung einer kubischen Gleichung erfordern die Werthe: $r = +2, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ und die homologen $r = -3, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$; die einer biquadratichen Gleichung $r = +3, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ oder $r = -4, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$; etc.

Eine beachtenswerthe Eigenschaft der Gleichung 8) besteht rner darin, dass sie für den einen Grenzwerth $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ vei gleiche Wurzeln $X_r = \frac{r+1}{r}$ besitzt. Denn der Gleichung 8) mmt bekanntlich dann eine doppelte Wurzel zu, wenn mit ihr eichzeitig ihr Differentialquotient erfüllt ist, wenn also mit 8) existirt:

$$(r+1)\, x X_r^r - 1 = 0 \tag{10}$$

Aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen folgt:

$$X_r = \frac{r+1}{r} \tag{11}$$

$$x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} \tag{12}$$

Sei nun zunächst wieder r ganz und positiv, so lässt sich die eichung 8) für den obigen Werth von x auch so schreiben:

$$\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}} X_r^{r+1} - X_r + 1 =$$

$$\frac{1}{r}[z-1]^2[z^{r-1} + 2z^{r-2} + 3z^{r-3} + \ldots . (r-1)z + r] = 0 \tag{8*}$$

zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$z = \frac{r}{r+1} X_r$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lässt nun erkennen, ss ihr ausser $z = 1$ keine weitere positive Wurzel mehr kommt. Da aber für ein positives r und $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ die Reihe *A)* e positive Summe haben muss, so ist $X_r = \frac{r+1}{r}$ auch die Summe r Reihe. Wir gewinnen damit das interessante Resultat:

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m = 1 + \frac{m}{1} x_r + \frac{m(m+2r+1)}{2!} x_r^2 + \tag{14}$$

$$\frac{m(m+3r+1)(m+3r+2}{3!} x_r^3 + \ldots$$

$$\frac{m(m+nr+1)(m+nr+2 \ldots . (m+nr+n-1)}{n!} x_r^n + \ldots .$$

$$x_r = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$$

Wir haben oben nur den Fall r ganz und positiv betrachtet. Es lässt sich indess leicht zeigen, dass alles bisher Gesagte auch für positive gebrochene r, ferner für r negativ ganz, und für r negativ, unecht gebrochen seine Giltigkeit behält.

Für ein negatives, echt gebrochenes r, also $r = -\frac{p}{q}, p < q$ haben wir früher als Grenze der Convergenz $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ gefunden. Ist nun p eine gerade Zahl, so fällt wenigstens für die hier in Betracht kommende Wurzel $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ mit $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ zusammen; es reducirt sich also auf den früheren Fall. Für p ungerade, q gerade besitzt die Gleichung 8) für $x = \frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$ keine ohne Weiteres allgemein angebbare Wurzel, während die Annahme $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ diese Grösse imaginär macht. Die Reihe *A)* zerfällt daher für diesen Werth von x in zwei Theile, deren reeller die Summe $X_r = \frac{r+1}{r}$ und imaginärer die Summe Null hat. Für p und q ungerade und $x = -\frac{(-r)^r}{(r+1)^{r+1}}$, also im Grunde $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ kommt der Gleichung wieder die Wurzel $X_r = \frac{r+1}{r}$ zu.

Für den zweiten Grenzwerth der Convergenz $x = -\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$ lässt sich im Allgemeinen keine Wurzel der Gleichung 8) angeben. Hingegen besitzt sie für $x = -\frac{r}{(r+1)^{r+1}}$ und $x = -\frac{(r+1)^r}{r^{r+1}}$ die Wurzeln $X_r = \frac{r-1}{r}$ und $X_r = \frac{r}{r+1}$, respective; diese Werthe von x liegen aber ausserhalb der Grenze der Convergenz der Reihe X_r.

Mit der bisher betrachteten Reihengruppe im innigen ammenhange steht die folgende, deren Bildungsgesetz ähnlich, r etwas einfacher ist:

$$Y_r^{(m)} = 1 + \binom{m+2r+1}{1} x + \binom{m+3r+2}{2} x^2 + \dots \\ + \binom{m+nr+n-1}{n-1} x^{n-1} + \dots \qquad B)$$

Hier haben wir:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} \cdot \frac{x}{1+\frac{1}{2n}+\dots}$$

$$\operatorname{Lim} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} x \dots$$

l für $x = \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$

$$\operatorname{Lim} n\left[\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1\right] = \frac{1}{2}$$

Die obige Reihe convergirt daher für $x < \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$; sie ergirt aber bereits für $x = \pm \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$. Sie enthält als ecialfälle wohl ebenfalls die binomische Reihe (für $r=0$ und -1) in sich, ist aber trotzdem im Allgemeinen keine einhe Potenzfunction. Denn es ist, wie leicht ersichtlich:

$$Y_r^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{d(X_r^m)}{dx} = X_r^{m-1} \frac{dX_r}{dx}$$

Aus Gleichung 8) folgt aber

$$\frac{dX_r}{dx} = -\frac{X_r^{r+1}}{(r+1)xX_r^r - 1} = -\frac{X_r^{r+2}}{rX_r - (r+1)}$$

l damit:

$$Y_r^{(m)} = \frac{X_r^{m+r+1}}{(r+1) - rX_r} \qquad 15)$$

Für die beiden oben betrachteten Specialfälle $r = -2$ und $= -\frac{1}{2}$ ist:

$$Y^{(m)}_{-2} = \frac{X_{-2}^{m-1}}{2X_{-2}-1} = \frac{(1+\sqrt{1+4x})^{m-1}}{2^{m-1}\sqrt{1+4x}}$$

$$Y^{(m)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2X_{-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}}{X_{-\frac{1}{2}}+1} = \frac{1}{2^{2m-1}} \; \frac{(x+\sqrt{4+x^2})^{2m}}{\sqrt{4+x^2}}$$

oder im ersten Falle $m+1$ und $\frac{x}{4}$, im zweiten $\frac{m}{2}$ und $2x$ st
m und x setzend:

$$\frac{(1+\sqrt{1+x})^m}{\sqrt{1+x}} = 2^m \left[1 + \binom{m-2}{1}\cdot\frac{x}{4} + \binom{m-3}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots \right.$$
$$\left. \dots \binom{m-n}{n-1}\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} + \dots \right]$$

$$\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^m}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \binom{\frac{m}{2}}{1}(2x) + \binom{\frac{m+1}{2}}{2}(2x)^2 + \dots$$
$$\binom{\frac{m+n-2}{2}}{n-1}(2x)^{n-1} + \dots$$

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass wohl bereits Lagra
in seiner schönen Abhandlung „Nouvelle méthode pour résou
les équations littérales" (Lagrange oeuvres, T. III, p. 5 ff.) be
der Entwickelung der Wurzeln einer Gleichung in Reihen u
einige Specialfälle der zuerst betrachteten Reihengruppe A
stiess, dass er aber, dem Zwecke jener Abhandlung entsprech
die Eigenschaften derselben nicht weiter verfolgte.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

7.

Guido Hauck.

Stuttgart. Hauptstätterstr. 14.

Drei Vorlesungen

zur Einleitung

in die

Differential- und Integralrechnung.

Gehalten

zur Eröffnung der Winter-Vorlesungen 1850 — 1851

von

Dr. Th. Wittstein.

Hannover.

Hahn'sche Hofbuchhandlung.

1851.

Schrift und Druck von Fr. Culemann.

Vorrede.

ı einigen Mußestunden, welche mir im vergangenen
ıter mein Unterricht an der Königlichen Cadetten-An-
t hieselbst übrig gelassen hat, bin ich so glücklich gewesen
ın größeren Zuhörerkreis um mich versammelt zu sehen,
durch einen Cyclus von Vorlesungen in die Differen-
- und Integralrechnung eingeführt zu werden wünschte.
ist mir Bedürfniß öffentlich den Dank auszusprechen,
welchem ich mich dem aufmerksamen Kreise meiner Zu-
r verpflichtet fühle, und deshalb mache ich hier nach-
end die drei ersten einleitenden Vorlesungen bekannt.
lleicht aber darf ich auch hoffen in einem weiteren
ise damit willkommen zu sein; insbesondere an alle
enigen Leser möchte ich dieses Werkchen richten dürfen,
he sich von dem, was man Mathematik nennt, einen
ständigern und angemessenern Begriff zu bilden wün-
n, als er aus den Schulen ins Leben mitgebracht zu
den pflegt. Ich habe in diesen drei einleitenden Vor-

lesungen ein Stück Culturgeschichte zu liefern vers
indem ich die geschichtliche Betrachtung vor der speculat
habe vorwalten lassen, so lange bis mit der dritten V
lesung der Eintritt in die Sache selbst zur Aufnahme
rein theoretischen Fadens nöthigte. Somit treffe ich
in einem kleinen Beispiele mit den Strebungen zusam
welche die Gegenwart auf anderweitigen Gebieten
Großen zeigt; denn im Leben sehen wir heute ja Alles
der Geschichte hindrängen und überall die geschichtliche
fassung der Dinge mehr und mehr das Übergewicht
langen, seitdem die Speculation durch ihre Selbstü
hebung, verbunden mit der gänzlichen Inhaltslosigkeit i
Resultate, die Achtung der Zeitgenossen verscherzt
Der Staat mit seinen papierenen Constitutionen, mit
willkürlich in ihn hineingetragenen Theorieen und D
trinen, hat geschwankt und getaumelt, bis er sich wi
auf seinen historischen Boden zu besinnen anfing
gleichwie in dem Lande der Erbweisheit, in diesem B
seine Stütze suchte. Die speculative Rechtslehre oder
sogenannte Naturrecht nöthigt nur noch ein mitleid
Lächeln dem Rechtskundigen ab, der die Quelle und
Ausgangspunkt seiner gesammten juristischen Thäti
in dem historisch gegebenen Rechte zu finden weiß.
alte Glauben lebt wieder auf, das ewige Wort G
beginnt in seiner durch Jahrhunderte erprobten Kraft
Gemüther der Menschen wieder zu erobern, seitdem
moderne Philosophie im Nihilismus und Atheismus

n Gipfelpunkte ihrer Speculation vor sich daliegen t. Kurz wir kommen immer mehr, oder streben we- stens immer mehr zu derjenigen Anschauung der Dinge kommen, in welcher uns Göthe als ein so erhabenes unerreichbares Muster vorleuchtet: Die Dinge zu men wie sie sind, sie gelten zu lassen für das was sie , und nichts Selbstgemachtes und Selbstconstruirtes eilig hineinzutragen. Oder sollte es so ganz zufällig , daß Alle, die am historischen Staat, am historischen ht, am historischen Glauben festhalten, an Göthe wie ihrem Meister hinaufschauen?

Nicht daß ich hievon eine Rückanwendung auf die thematik zu machen gedächte! Die Mathematik, sammt Naturwissenschaften, deren formale Grundlage sie macht, besitzt nicht gleich der Politik, der Jurisprudenz der Theologie ein Object, welches einer Geschichte g wäre; ihr Object bleibt ewig unverändert dasselbe, nur die verschiedenen Mittel und Wege, auf denen diesem Objecte beizukommen gesucht hat, können eine chichte — der Wissenschaft, nicht des Gegenstandes der ssenschaft — bilden. Darum ist es hier auch viel ter möglich, das Object der Wissenschaft rein aufzu- en, und darum schreiten denn auch Mathematik und urwissenschaften auf ihrem Wege rüstig fort, ohne der hülfe der Geschichte merklich zu bedürfen. Und dennoch, die Wissenschaft zu studiren unternimmt, ohne auch Geschichte zu seinem Studium zu machen, dem kann

nicht der vollständige Begriff der Wissenschaft zu T
werden. Der Tadel, der ihn treffen muß, wird
um so größer, wo, wie heute, die Erinnerungen an
Geschichte von allen Seiten an ihn herantreten. Mö
die nachstehende Skizze als ein kleiner Beitrag gelten,
hierauf die Aufmerksamkeit zu lenken.

Hannover, im Juli 1851.

Erste Vorlesung.

Meine Herren!

Indem wir im Begriff sind, miteinander das Gebiet der
erential= und Integralrechnung zu durchwandern, dürfte es
allen Dingen der Mühe werth sein, daß wir einen Blick
värts werfen auf dasjenige mathematische Wissen, mit welchem
beim Betreten jenes Gebiets ausgerüstet sein muß. Es ist
en bekannt, daß man dieses Wissen, der Hauptsache nach,
r dem Einen Worte Elementar=Mathematik zusammen zu
n pflegt, und wenn man nach der Bedeutung dieses Wortes
t, so versteht man darunter offenbar diejenige Parthie aus
gesammten Mathematik, welche zum Behuf einer allgemeinen
nschaftlichen Bildung pflegt auf Schulen, nämlich auf Schulen
dem Standpunkte der Gymnasien, gelehrt zu werden. Dieser
riffsbestimmung des Worts Elementar=Mathematik läßt sich
ssen sogleich eine andere an die Seite setzen, eine tiefer grei=
e und der Natur der Sache näher tretende. Denn rück=
end auf diejenigen Jahrhunderte, denen die älteren unter
rn Gymnasien ihre Entstehung verdanken, aus denen des=
auch Inhalt und Umfang der Fächer, welche auf den Gym=
en durchgenommen werden, herzuschreiben sind, wird man

unter dem Worte Elementar=Mathematik nichts anderes als d
jenige mathematische Wissen verstehen können, welches dam
den Schulen, den Trägern der Wissenschaften, allein zugewi
werden konnte, weil von der Wissenschaft noch nichts we
existirte. Nun ist zwar die Wissenschaft seitdem fortgeschrit
und so hat denn auch jenes Wissen mancherlei Ergänzungen
weitere Ausführungen selbst innerhalb seines eigenen Gebiets
müssen gefallen lassen. Wollen wir aber davon für den Aug
blick absehen, so kann man also die Elementar=Mathematik a
definiren als die Mathematik in demjenigen Zustande und Umfa
den sie in der Periode des sogenannten Wiedererwachens
Wissenschaften d. h. mit dem Schlusse des funfzehnten Jahrh
derts besaß. Und mit Rücksicht auf diese Definition wollen
mir nun gestatten, daß ich an dem Faden der Geschichte, von
ältesten Zeiten beginnend, die Elementar=Mathematik in eini
wenigen Zügen an Ihnen vorübergehen lasse. Wir werden
da von selbst schon zu dem eigentlichen Gegenstande dieser V
lesungen den Eingang finden müssen.

Vor und während der Zeit, welche bei den abendländisc
Völkern als die Periode des Wiedererwachens der Wissenscha
bezeichnet wird, waren es bekanntlich zwei Wege, auf welchen
Wissenschaften und die Werke, in denen diese Wissenschaften n
dergelegt sind, zu uns hergelangten. Der eine — durch diejeni
Griechen, welche vor und zur Zeit der Eroberung Constantino
durch die Osmanen im Jahre 1453 flüchtig ins westliche Eur
übersiedelten; der andere — durch die Araber, welche dam
Spanien inne hatten und schon um das zehnte Jahrhundert
im Culminationspunkte ihrer wissenschaftlichen Cultur befan
Auf beiden Wegen sind uns mathematische Werke zugekomm
und wenn wir beide Wege rücksichtlich der Mathematik rückwä
verfolgen, so führen sie, der Hauptsache nach, zu einer gem

ftlichen Quelle zurück, nämlich den Griechen des Alterthums,
den ältesten Völkern, von denen uns bestimmte Beweise ihrer
hematischen Beschäftigungen übrig geblieben sind. Man kann
n, daß es beinahe nur die Mathematik der alten Griechen
, welche in wenig veränderter Gestalt den Völkern des Mittel=
rs zugeführt wurde; nur ein geringer Theil daran muß,
nigstens so weit die heutigen Forschungen reichen, auch den
ern, nämlich den Bewohnern der Halbinsel zwischen Indus
Ganges, zugeschrieben werden.

Lassen Sie uns zunächst die Geometrie betrachten. Sie wurde
den Griechen schon um das Jahr 600 vor C. G. cultivirt,
on die Kunde uns durch spätere Schriftsteller überliefert wor=
ist. Man nennt Thales von Milet als den Erfinder des
tzes, daß der Winkel im Halbkreise ein rechter ist; Pythagoras
Samos als den Erfinder des nach ihm benannten Lehrsatzes
rechtwinkeligen Dreieck. Beide sollen ihre Vorkenntnisse
ch Aufenthalt bei den Ägyptern und Chaldäern, Pythagoras
ar bei den Indern, erlangt haben, worüber genauere Nachrich=
zwar fehlen; jedenfalls wird man indessen zugeben müssen,
das mathematische Wissen der genannten Völker, aus denen
Quellen Thales und Pythagoras geschöpft haben, nicht von
ßem Belang gewesen sein könne, da man Sätze wie die ge=
nten, welche so sehr im Vordergrunde der Wissenschaft stehen,
bedeutend genug gehalten hat, um die Namen ihrer Erfinder
zubewahren. Bei den Griechen dagegen machte die Geometrie
elle Fortschritte. Sehr bald, mit Hippokrates von Chios und
axagoras von Klazomenä um das Jahr 450 vor C. G., tauch=
die Untersuchungen über die Quadratur des Kreises auf;
i berühmte Aufgaben, die Aufgabe von der Dreitheilung des
nkels, und die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels
r das sogenannte Delische Problem, beschäftigten im vierten

Jahrhundert vorzugsweise die Mathematiker aus der Schule Pl ton's; und welche Achtung die Griechen damals der Geomet bewiesen, zeigt die bekannte Inschrift über dem Eingange, der den philosophischen Vorlesungen Platon's führte, und welche deut aussagt: Kein der Geometrie Unkundiger trete hier ein! U aber den Gipfelpunkt der Geometrie bei den Griechen zu bezeic nen, ist es nur nöthig drei Namen zu nennen, welche aus all übrigen hoch hervorragen: Euklid, Archimedes, Apollonius vo Pergä. Alle drei haben uns eine Reihe von schriftstellerisch Werken hinterlassen.

Euklid lebte um das Jahr 300 vor C. G. in Alexandri welche Stadt damals, unter der Herrschaft der ersten Ptolemäe anfing der Hauptsitz der wissenschaftlichen Cultur zu werde Allgemein bekannt sind die sogenannten Elemente Euklid's, un stehen unter den Werken, welche Euklid's Namen tragen, obena Sie enthalten eine Darstellung der Geometrie, sowohl der Plani metrie als der Stereometrie, ungefähr in dem Umfange unsere heutigen Elementar-Lehrbücher, überdies aber auch eine Reihe vo Untersuchungen, welche der Arithmetik angehören, und geben somi ein Bild von der Gestalt und der Ausdehnung, welche die Ma thematik der Griechen zur Zeit des Euklid gewonnen hatte. Ander hatten schon vor Euklid versucht Elemente zu schreiben, doch i davon nichts bis auf unsere Zeit gekommen; alle wurden durc das Werk Euklid's verdrängt, welches man in alter wie in neue Zeit als ein Muster einer streng wissenschaftlichen und syste matischen Entwickelung gepriesen hat, welches die Unterlage alle spätern geometrischen Lehrbücher bildet, und hie und da bis au den heutigen Tag, in England sogar ausschließlich, beim Unter richt in der Geometrie zum Grunde gelegt wird. Man mach sich indeß von Euklid's Geometrie einen zu geringen Begriff wenn man sie auf die sogenannten Elemente beschränkt. Es existir

Euklid noch eine Reihe anderer Schriften, noch andere
uns nur durch spätere Berichterstatter bekannt, und aus
geht hervor, daß er mit Erfolg Aufgaben behandelt hat,
e weit über die Sphäre seiner Elemente hinausgehen und
in unsere sogenannte neuere Geometrie hereinragen. So,
nur ein Beispiel zu nennen, berichtet Pappus, daß Euklid
erste gewesen ist, der eine gewisse unter den Mathematikern
Alterthums berühmt gewordene Aufgabe gestellt und zu lösen
ıcht hat: eine Aufgabe, deren glückliche Lösung später dem
cartes der Anlaß zur Erfindung der analytischen Geometrie
de. Hauptsächlich aber, um noch dieses Eine zu nennen,
nt die mathematische Methode das Augenmerk der Bemühun-
Euklid's gewesen zu sein, wovon mehrere seiner Werke den
eis geben, und man erzählt von ihm die Anekdote, daß er
Könige Ptolemäus, welcher von ihm einen leichteren und
emeren Weg, in die Wissenschaft zu gelangen, zu wissen be-
te, geantwortet haben soll: Es gebe zur Geometrie keinen
nderen Weg für Könige.

Archimedes, der größte Mathematiker des Alterthums, wel-
zu Syracus am Hofe des Königs Hiero lebte und bei der
nnten Eroberung von Syracus durch die Römer im Jahre
vor C. G. umkam, hat eine Reihe von mathematischen Wer-
geschrieben, von denen uns die Mehrzahl erhalten worden ist.
von ihm behandelten Probleme gingen über Euklid, nament-
über die Elemente desselben, merklich hinaus. Diejenige
gabe, auf deren Lösung er selbst den meisten Werth gelegt zu
n scheint, ist die von der Inhaltsbestimmung der Kugel; denn
Cicero erzählt, hat er eine Kugel nebst einem Cylinder,
n Höhe und Durchmesser gleich dem Durchmesser der Kugel
en, und von dessen Inhalt, wie bekannt ist, der Inhalt der
el zwei Drittheile beträgt, in Stein auf sein Grabmal setzen

lassen, woran später Cicero das Grab wiedererkannte. Am
rühmtesten unter uns ist indessen des Archimedes Bestimmung
Länge des Kreisumfangs geworden, von welchem er aus
Vergleichung des eingeschriebenen und des umschriebenen Sec
undneunzigecks nachwies, daß derselbe zwischen dem $3\frac{1}{7}$ u
$3\frac{10}{71}$fachen des Durchmessers enthalten sei: eine Bestimmu
die man um so mehr bewundern muß, wenn man die damal
Umständlichkeit und Mühseligkeit jeder numerischen Rechnung
achtet. Archimedes blieb aber nicht bei Kreis und Kugel steh
Er quadrirte die Parabel; bestimmte den Inhalt von Parabol
und Hyperboloid; stellte Untersuchungen an über die nach i
benannte Spirale; endlich war er der Begründer der heutig
Statik, deren Lehren ihm mehrfach zur Lösung geometrisc
Probleme dienen mußten. — Die Kegelschnitte waren jedoch z
Zeit des Archimedes nichts Neues mehr. Die Schule des Plat
scheint die Erfinderin derselben gewesen zu sein, und schon dam
dienten die Kegelschnitte zur Lösung von Aufgaben, namentl
der beiden schon erwähnten Aufgaben von der Verdoppelung d
Würfels und von der Dreitheilung des Winkels, deren Unlösba
keit durch gerade Linie und Kreis allein man bereits erkan
hatte. Das berühmteste Werk über Kegelschnitte, welches d
Alten uns hinterlassen haben, ist dasjenige des Apollonius vo
Pergä, der um das Jahr 200 vor C. G. lebte, und der au
zuerst die Kegelschnitte mit den jetzt gebräuchlichen Namen: Parab
Ellipse, Hyperbel, benannt haben soll.

Die Trigonometrie entstand bei den Griechen erst durch da
Bedürfniß der Astronomie, und war deshalb von Anfang an d
Hauptsache nach sphärische Trigonometrie, zu welcher die eben
Trigonometrie gleichsam nur die Einleitung bildete. Ihre En
stehung wird den berühmtesten Astronomen des Alterthum
Hipparch von Nicäa, zugeschrieben, welcher in den Jahren 16

s125 vor C. G. theils zu Rhodus, theils zu Alexandria beob-
te. Sowol er, als der spätere Astronom Ptolemäus zu
andria, dessen Beobachtungszeit in die Jahre von 125 bis
nach C. G. fällt, bedienten sich indessen nicht unserer trigono-
ischen Functionen, insbesondere nicht der Sinus, sondern der
nen. Man findet in dem Hauptwerke des Ptolemäus, wel-
unter dem Namen Almagest, den ihm die Araber gaben,
rhin einen so großen Ruf erlangte, eine Tafel der Seh-
von 0 bis 180 Grad, von halben zu halben Graden
chreitend; und auf Grundlage dieser Tafel werden in
genannten Werke die Hauptaufgaben beider Trigonome-
n, soweit sie astronomische Anwendung finden, umständlich
ßt.

Die Leistungen der Griechen in der Arithmetik lassen sich
n in der Geometrie nicht an die Seite stellen; ohnehin gaben
Griechen dem Worte Arithmetik eine viel engere Bedeutung,
dasselbe bei uns hat. Das Wort bezeichnete ihnen nämlich
einen Inbegriff von Lehren, welche sich auf die Eigenschaften
Zahlen beziehen, wohin also etwa gehören würden die Unter-
ungen über gerade und ungerade Zahlen, Primzahlen und
nmengesetzte Zahlen, Theilbarkeit der Zahlen, Quadratzahlen
dergl., so wie überhaupt ihr Zahlenbegriff nicht über ganze
en, Brüche und Irrationalzahlen hinausging, welche letzte-
sie gleichfalls sehr sorgfältig durchforscht haben. Was dagegen
unst zu rechnen betrifft, die in unserer Arithmetik als Haupt-
vorangestellt wird, so bezeichneten sie diese mit dem Worte
stik. Besondere Werke darüber existiren nicht. Indessen läßt
schon begreifen, wie umständlich und schwerfällig ihre Rech-
zen müssen ausgefallen sein, wenn man nur die eine Ueberle-
macht, daß ihnen unser Zahlensystem, d. h. unsere Art die
en zu schreiben, gänzlich fremd war, und daß sie deshalb ge-

nöthigt waren, sich der Buchstaben ihres Alphabets als Z
zeichen zu bedienen.

In der Arithmetik selbst nun, im engeren Sinne der Griec
wird zuerst Pythagoras genannt, dessen Speculationen über
Natur der Zahlen, denen zum Theil höchst wunderbare und
heimnißvolle Eigenschaften beigelegt wurden, jedoch sehr unv
ständig bekannt sind. Seine mathematischen Studien schei
überall eine mehr arithmetische Richtung gehabt zu haben, v
leicht veranlaßt durch seine Reise zu den Indern, von
die Alten erzählen; ja man will wissen, daß ihm das bei u
gebräuchliche indische Zahlensystem nicht fremd gewesen sei, w
ches indessen bei den Griechen sonst nirgends nachweisbar im G
brauch gewesen ist. Der Pythagoräische Lehrsatz soll gleichfa
in seinem ersten Entstehen einen arithmetischen Ursprung geh
haben, veranlaßt durch die Bemerkung, daß, wenn die Summ
zweier Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist, das aus d
Seiten dieser Quadrate construirte Dreieck ein rechtwinkeliges wi

Arithmetische Untersuchungen bei den Griechen kommen sp
terhin nur sehr vereinzelt vor, z. B. in den Elementen Eukli
über die Eigenschaften der Zahlen, besonders der Irrationalzahl
und in der sogenannten Sandrechnung des Archimedes über
Hülfsmittel, um große Zahlen ausdrücken zu können. Ganz b
sonders hervorragend aber ist, merkwürdiger Weise ohne nachwei
bare Vorgänger und Nachfolger, Diophantus von Alexandr
welcher um das Jahr 350 nach C. G. lebte. Wir besitzen v
ihm ein nur theilweise erhaltenes Werk unter dem Titel Arith
metik, welches die Auflösung der Gleichungen vom ersten u
zweiten Grade enthält, mit überwiegender Behandlung der unb
stimmten Aufgaben, und in welchem mithin die Anfänge unser
heutigen Algebra vorgezeichnet sind. Geometrische Aufgabe
welche, arithmetisch behandelt, auf Gleichungen des zweiten Grad

n würden, finden sich schon bei Euklid geometrisch gelöst; rithmetische Behandlung dieser Gleichungen hat uns indessen t Diophantus hinterlassen.

So weit die Griechen. Wie aus dem Gesagten hervorgeht, die Blüthezeit der Mathematik bei den Griechen in die ersten hunderte des Bestehens des alexandrinischen Museums, welim Jahre 323 vor C. G. nach dem Tode Alexanders des rien durch Ptolemäus Lagi, dem bei der Theilung des alexanischen Weltreichs Ägypten zufiel, gegründet wurde. Euklid als einer der ersten Vorsteher dieses Museums genannt. dies gehörten diesem Museum an: Conon, der Freund des medes; Eratosthenes, dem man die erste Gradmessung zurbt; die schon genannten Astronomen Hipparch und Ptolemäus; hantus; Pappus. Mit Pappus um 400 nach C. G., der t schon mehr Commentator als Schöpfer war, der aber für das große Verdienst hat, uns von Werken ausführliche richt zu geben, die nach der Zeit gänzlich verloren gegangen i beginnt bereits der Verfall der Wissenschaft merklich zu en. Nur einzelne Commentatoren tauchen noch auf, bis endlich die hereinbrechenden Araber mit der Eroberung von endria und der freilich von den Historikern mit Grund in fel gezogenen Verbrennung der alexandrinischen Bibliothek ahre 641 nach C. G. aller Wissenschaft ein Ende machten. Merkwürdiger Weise waren dieselben Araber nicht lange rauf berufen, die Träger der Wissenschaften zu werden, wähdie übrige Welt durch die Barbarei der Zeit den Beschäfgen des Friedens entfremdet wurde. Schon unter Harun chid um das Jahr 800 nach C. G. und noch mehr unter Nachfolger Almamun wurde die Mathematik wieder lebhaft irt. Es werden Mohammed ben Musa und Thebit ben h als Mathematiker, so wie Alfraganus als Astronom ge=

nannt, die sämmtlich in Bagdad ihren Wohnsitz hatten. [...] Ende des neunten Jahrhunderts beobachtete in Antiochia [...] von allen Arabern gerühmte Astronom Albategnius. In Span[...] oder dem Kalifat von Cordova waren besonders das zehnte [...] elfte Jahrhundert den Wissenschaften günstig; daselbst lebten [...] Mathematiker Geber und der Astronom Alhazen. Die Wiss[...]schaft der Araber trägt indessen einen eigenthümlichen Charak[...], welcher überhaupt den semitischen Völkerstämmen gegenüber [...] Völkern indogermanischen Ursprungs eigen zu sein scheint; näm[...]lich so groß der Eifer war, mit welchem die Araber die vor[...]fundenen Schätze griechischer Gelehrsamkeit sich aneigneten, [...] so sehr sie bemüht waren, dieselben in ihre Sprache zu übersetz[...], umzuarbeiten und zu commentiren, so haben sie doch in Hinsi[...] auf Theorie gar nichts Neues und Eigenes geliefert, und i[...] Mission in der Geschichte der Wissenschaften scheint nur die [...]wesen zu sein, den späteren christlichen Völkern die Schätze [...] Alterthums, welche ohne ihre Dazwischenkunft verloren gegang[...] sein würden, treu aufzubewahren. Vornehmlich waren es Eukl[...], Diophantus und der Astronom Ptolemäus, daneben auch Arc[...]medes und Apollonius, deren Werke sie nach allen Seiten [...] sich anzueignen suchten; ja einzelne dieser Werke, deren griechis[...] Originale verloren gegangen sind, sind uns nur durch arabis[...] Übersetzungen bekannt geworden. Allerdings haben die Arab[...] dem mathematischen Wissen der Griechen Einzelnes neu hinzuge[...]fügt; doch theils ihre eigenen Aussagen, theils das seit funf[...] Jahren bei uns neu aufgekommene Studium der Sanscrit-Li[...]ratur, die einer längst ausgestorbenen Sprache des alten Hind[...]stan angehört, geben den vollständigen Beweis, daß dieses Ne[...] überall und in allen Fällen den Indern entlehnt war, mit den[...] das große Reich der Araber gleichfalls Jahrhunderte lang in B[...]rührung gestanden hat. Zu diesen Zugaben indischen Ursprung[...]

e wir den Arabern verdanken, gehört in erster Linie unser
nsystem, nämlich das Verfahren, durch neun Ziffern und
edeutungsloses Zeichen, die Null, mit Rücksicht auf die Stel-
rthe der Ziffern jede beliebige Zahl ausdrücken zu können.
nur die arabischen Schriftsteller nennen wiederholt diese
es Zahlenschreibens eine indische Erfindung, sondern auch
anscrit findet sich dieses Zahlenschreiben wieder, wenn gleich
ahlzeichen selbst andere als die unsrigen sind, deren heutige
lten ohnehin erst seit Erfindung der Buchdruckerkunst sich
zu haben scheinen. — Ferner gehört dahin die Anwendung
raischer Rechnung auf die Lösung geometrischer Aufgaben,
ch gleichfalls bei den Indern findet, wovon ein neuerlich
nt gewordenes Werk des Brahmegupta, der um das Jahr
nach C. G., also vor dem geschichtlichen Auftreten der Ara-
ebte, den Beweis giebt. Auch die Algebra selbst scheint bei
Indern eine selbständige Entstehung gefunden zu haben;
einem noch ältern Mathematiker, dem Aryabhatta, schreiben
e Commentatoren die Auflösung unbestimmter Gleichungen
rsten Grades zu, welche in dem Werke des Diophantus,
oir es jetzt besitzen, fehlt. Der Name Algebra dagegen ist
schen Ursprungs. Er hieß vollständig: Algebr v' Almukabala,
h etwa: Herstellung und Vergleichung, und bezieht sich auf
)perationen, welche bei dem Ansatz und der Auflösung einer
)ung vorgenommen werden müssen. Irrig ist die Meinung,
den Namen Algebra von dem schon genannten Mathema-
Geber ableiten will, und wohl nur durch die zufällige Na-
erwandtschaft entstanden; denn Geber lebte in Spanien um
Jahr 1050, während der vorhin angeführte vollständige
der Algebra sich schon zweihundert Jahre früher als Titel
Hauptwerks des Mohammed ben Musa vorfindet. — End-
at auch die Trigonometrie bei den Arabern mehrfache Ver-

vollständigungen erfahren, wohin namentlich die Einführung d
Sinus, anstatt der bis dahin gebräuchlichen Sehnen der dop
ten Winkel, zu rechnen ist. Die Sinus finden sich zuerst
Albategnius; doch hat man auch bei ihnen Grund, einen i
schen Ursprung vorauszusetzen.

In dem Vorhergehenden habe ich in der Kürze einen U
des Zustandes der Mathematik bei den Arabern zu geben
sucht, und in diesem Zustande gelangte nun die Mathemati
den christlichen Völkern des Abendlandes. Die hohe Blüthe
maurischen Literatur und Kunst, welche im zehnten Jahrhun
unter Abderrhaman dem III., mit dem Beinamen des Prächti
und mehr noch unter dessen Nachfolger Hakem dem II. i
Anfang nahm, lockte mehrere Jahrhunderte hindurch die Gel
ten von Italien, Deutschland, Frankreich, England nach
glänzend ausgestatteten Hochschulen Spaniens hin, von we
sodann das dort erlangte Wissen und die mitgebrachten geleh
Werke in ihrer Heimath verbreiteten. So wird zuerst der Bis
Gerbert, später Pabst Sylvester II., als derjenige genannt, w
cher um das Jahr 980 aus Spanien unser heutiges Zah
system herüberholte. Im zwölften Jahrhundert gelangte eb
durch den Engländer Athelard der Euklid zur Kunde des ch
lichen Europa; durch Leonardo von Pisa, mit dem Beina
Fibonacci, wurde die Algebra der Araber bekannt; Kaiser Fr
rich II. von Hohenstaufen ließ um das Jahr 1218 den Alma
übersetzen, und s. f. Allen diesen Übersetzungen lagen arab
Handschriften zum Grunde. Erst im funfzehnten Jahrhun
zur Zeit der Zerstörung des oströmischen Kaiserthums, lernte m
durch die flüchtigen Griechen auch die griechischen Originalw
kennen, so weit deren noch vorhanden waren, und von hier
kann man die vollständige Bekanntschaft mit den mathemati
Schriften der alten Griechen rechnen, für deren Ausbreitung

beginnende Buchdruckerkunst kräftig mitwirkte. Die meisten
aben der griechischen Mathematiker und ihrer lateinischen
etzungen datiren aus dem sechzehnten Jahrhundert.

Wenn ich im Eingange dieser Vorlesung dasjenige, was ich
in einer kurzen Übersicht Ihnen vorzuführen versucht habe,
em Einen Worte Elementar=Mathematik bezeichnete, so muß
m Schluß der heutigen Stunde noch einmal auf eine ge=
Modification dieser Begriffsbestimmung zurückkommen, deren
falls schon im Eingange gedacht worden ist. Das mathe=
the Wissen der Griechen, so wie es auf dem angezeigten
zu den abendländischen Christen gelangte, mußte offenbar
igfaltige Lücken darbieten, schon deshalb, weil manches Werk
nur mangelhaft, theils gar nicht erhalten worden war.
ag darum nahe, daß die erste Arbeit der abendländischen
ematiker, nach Aneignung des überlieferten Stoffes, darauf
gerichtet sein, das Fehlende zu ergänzen, nach Bedarf
es an die Stelle zu setzen, auch wohl Einzelnes einen
tt weiter zu führen, und es kann offenbar nicht meine Ab=
ein, dergleichen Ergänzungen und Zusätze von der Elemen=
Mathematik ausschließen zu wollen. Ich rechne dahin die
llständigung der Trigonometrie durch Regiomontan, der
hre 1476 starb und dem man namentlich die Einführung
igonometrischen Tangenten verdankt; ich rechne ferner dahin
lgemeine Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten
s, welche nach Cardano und Ferrari, die im sechzehnten
undert lebten, benannt werden; auch ist dahin die Erfin=
der Logarithmen zu zählen, welche durch Napier's berühm=
Werk vom Jahre 1614 bekannt gemacht wurde, und welche,
r heutigen Auffassung der Sache, einen nothwendigen und
mehr zu entbehrenden Bestandtheil der elementaren Arith=
ausmacht. Indessen wie weit man auch diese Ergänzungen

und Zusätze heranziehen mag, um dadurch den Umfang der [E]lementar=Mathematik zu bestimmen, so bleibt doch immer noch [ein] großer Schritt übrig, ehe man bis zur Differential= und In[te]gralrechnung, die den eigentlichen Gegenstand dieser Vorlesun[gen] bilden soll, selbst gelangen kann. Mit anderen Worten, es w[aren] noch wesentlich neue Erfindungen zu machen, um die Erfind[ung] der Differential= und Integralrechnung vorzubereiten. Von [die]sen Erfindungen werde ich in der nächsten Vorlesung reden.

Zweite Vorlesung.

Meine Herren!

In der ersten Vorlesung habe ich den Versuch gemacht, an
)and der Geschichte die Entstehung und den Umfang desjeni=
nathematischen Wissens nachzuweisen, welches man heute mit
Namen der Elementar=Mathematik zu bezeichnen gewohnt
mit dem Vorbehalte freilich, daß auch einzelnes später Ge=
ne und Hinzugefügte noch zur Elementar=Mathematik gerech=
werden müsse, welches theils zur Ausfüllung von Lücken,
als unmittelbare Folgerung sich dem Vorangegangenen von
anschließt. Heute liegt mir nun die Aufgabe vor, von da,
falls an der Hand der Geschichte fortfahrend, noch dasjenige
utragen, was als Übergang zur Differential= und Integral=
ung muß angesehen werden. Ich werde deshalb nicht spre=
von vielen der Erfindungen und neuen Schöpfungen im
te der Mathematik, welche der Zeit Leibnitzens vorangegan=
sind. Ich werde nicht sprechen von der mannigfaltigen Aus=
ng der Algebra, hauptsächlich der Theorie der Zahlengleichun=
welche man Vieta, Hudde, Descartes, Harriot und andern
ankt; nicht von den großen Untersuchungen Fermat's und
al's, welche zwei ganz neue Zweige der Mathematik, die

Theorie der Zahlen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in
Leben riefen; auch nicht von den Erweiterungen der Euklidisch
Geometrie, die durch Pascal, Desargues und Lahire auf ei
so hohen Grad der Ausbildung gebracht wurde, daß man
Unterbrechung fast beklagen muß, welche durch das beginne
Vorherrschen des Calculs seit Descartes etwa anderthalb Ja-
hunderte währte, bis mit dem Anfange des gegenwärtigen Ja-
hunderts Monge durch seine **Géométrie descriptive** und Car
durch seine **Géométrie de position** den abgebrochenen Fa
wieder aufnahmen. Im Gegensatz gegen alle diese Bereicheru-
gen der Mathematik durch die Völker des heutigen Europa s
es im Grunde nur zwei Namen, an welche ich dasjenige we
anzuknüpfen haben, was als Brücke aus der Mathematik, die
Araber uns überliefert, zur Differential- und Integralrechnu
gedient hat. Diese beiden Namen sind: Vieta und Descartes

Vieta (französisch Viète), der im Jahre 1540 geboren wu
und 1603 zu Paris starb, verdanken wir den sehr wichtig
Fortschritt, daß er der erste war, der auf den Gedanken k
Zahlen allgemein durch Buchstaben zu bezeichnen. Bis da
hatte man nur mit bestimmten durch Ziffern ausgedrückten Z-
len gerechnet, und jede Rechnung trug mithin nur den Charak
eines individuellen Falls, der eine allgemeine Betrachtung
Beispiel begleitete; nur für die Unbekannte einer Gleichung wu
ein eigenthümliches Zeichen, gewöhnlich ein Buchstabe des Alph
bets, gesetzt. Wie mühsam auf diesem Wege es war, Betra-
tungen von einiger Allgemeinheit anzustellen, das übersieht je-
sogleich, der die ersten Schritte in der heutigen Buchstabenre-
nung zurückgelegt hat; auch erkennt man z. B. noch in
Untersuchungen der italienischen Mathematiker über die Gleichu-
gen des dritten und vierten Grades eine so außerordentli
Schwerfälligkeit des Ausdrucks, daß es fast verwundern m

…bei solcher Mangelhaftigkeit in der Bezeichnung überall so …gende Resultate haben zum Vorschein kommen können. Die… Mangel hat Vieta durch seine **Logistica speciosa**, d. i. …stabenrechnung, abgeholfen, womit er der Begründer der …igen mathematischen Zeichensprache geworden ist. Der Buch… diente fortan ganz allgemein als der Vertreter irgend einer …, mit dem ausdrücklichen Vorbehalt, daß dafür jede beson… Zahl sollte an die Stelle gesetzt werden dürfen; die Buch…ln wurden zu Formeln, die Formeln zu Gleichungen zusam…gesetzt; und in jeder solchen Buchstaben-Gleichung und in … Umwandlung einer solchen Gleichung liegt nun eine mehr … weniger reiche Combination von Begriffen, die nur sehr …ständlich würde durch gewöhnliche Worte wiederzugeben sein, …ar und präcise und in einem so engen und leicht überseh…n Raume zusammengedrängt, daß keine andere Wissenschaft …hnliches Hülfsmittel für ihre speculativen Forschungen auf…isen hat, und daß Leibnitz daraus sogar den kühnen Gedan…iner Universalsprache faßte, die als Sprache der Wissen…ten dienen, und zugleich im geistigen Verkehr der Völker … einander allgemein sollte verstanden werden können. Man … es geradezu behaupten, daß ohne die mit Vieta beginnende …ematische Zeichensprache die Mathematik niemals ihre heutige … erreicht haben würde, von welcher herab die mathematischen …hungen der Alten kaum mehr als wie die ersten furchtsamen …ritte auf dem Gebiete der Wissenschaft erscheinen. Vieta's …ichnungsweise selbst ist freilich in ihren Einzelheiten nicht im …rauch geblieben. Er bediente sich nur der großen Buchstaben … Alphabets; er bezeichnete ferner die unbekannten Größen … die Vocale, die bekannten Größen durch die Consonanten; … führte er eine Menge neuer Kunstwörter ein, die man längst …issen hat.

Vieta machte von seiner neuen Buchstabenrechnung sogl
sehr glückliche Anwendungen, nicht nur auf die Algebra, wo
ihm die Entwickelung der Fundamental=Eigenschaften der höhe
algebraischen Gleichungen verdanken, sondern auch auf die G
metrie. Er lehrte geometrische Aufgaben in die Sprache
Buchstabenrechnung zu übertragen, in dieser, also auf dem Bo
der Algebra, aufzulösen, und das gewonnene algebraische E
resultat wieder in eine geometrische Construction zur Auffind
der unbekannten Größen umzuwandeln. Nicht minder behand
er allgemeine algebraische Aufgaben durch den Weg der geo
trischen Construction, lehrte z. B. die Wurzeln gegebener G
chungen auf geometrischem Wege zu finden, und so haben
bei ihm schon die ersten Anfänge jener Wechselbeziehung zwisc
Geometrie und Arithmetik, wo beide, nämlich Geometrie
Arithmetik, fast nur wie zwei verschiedene Methoden erschei
um eine und dieselbe vorgelegte mathematische Aufgabe au
lösen. Diese Wechselbeziehung wird sogleich noch sichtbarer
vortreten.

Descartes oder, wie er in seinen lateinischen Schriften
nennt, Cartesius, geboren 1596 und gestorben 1650, nicht min
berühmt als Mathematiker denn als Philosoph, ging auf d
von Vieta eingeschlagenen Wege der Anwendung der Buchstab
rechnung auf Geometrie weiter fort, und gelangte dadurch
seiner wichtigsten mathematischen Schöpfung, der analytisc
Geometrie. Er behandelte, wie er selbst in seiner im Jahre 1
herausgekommenen Geometrie erzählt, eine von mir schon an
deutete Aufgabe, welche uns Pappus hinterlassen hat und de
vollständige Lösung den Alten nicht hatte gelingen wollen.
fand, daß die Aufgabe, in welcher es sich um die Auffind
eines gewissen Punktes handelte, eine unbestimmte war, fü
deshalb zwei Unbekannte in die Rechnung ein, und erhielt,

gesuchten Punktes, die Gleichung derjenigen Linie, deren
ntliche Punkte der vorgelegten Aufgabe Genüge leisteten:
in der Sprache der Alten, des geometrischen Ortes des ge-
n Punktes. Dies war das erste Beispiel der Bestimmung
Linie durch ihre Gleichung, und damit war der Grund-
ke der analytischen Geometrie gegeben und der Weiterbau
. Die neue Betrachtungsweise fand sofort zahlreiche Anhän-
; die Neuheit der Resultate, welche sie lieferte, drängte die
netrie der Alten in den Hintergrund und führte zu der schon
eu teten Vernachlässigung derselben; das wichtigste Ergebniß
welches aus ihr hervorgegangen ist und an welches ohne
analytische Geometrie nicht würde zu denken gewesen sein,
: die Differential- und Integralrechnung, zu der sie den
twendigen Vorhof bildet.

Bei der Wichtigkeit, welche die analytische Geometrie für den
ntlichen Zweck dieser Vorlesungen hat, wollen Sie mir ge-
n, daß ich den Rest der heutigen Stunde darauf verwende,
Grundzüge dieser Wissenschaft in der Kürze an Ihnen vor-
uführen. Wir werden im Verlaufe der Vorlesungen wieder-
davon Gebrauch machen müssen. Um zuerst bei der Geome-
der Ebene stehen zu bleiben, so wollen Sie sich denken, daß
in der Ebene zwei unbegränzte gerade Linien gezogen hat,
einander durchschneiden, und zwar im einfachsten Falle unter
em Winkel. Diese beiden Linien werden als feste Linien be-
tet und deshalb die Achsen genannt. Soll nun von der
irgend eines Punktes in der Ebene die Rede sein, so denkt
sich von diesem Punkte auf die beiden Achsen Perpendikel
lt; die Länge dieser beiden Perpendikel, in Zahlen ausge-
t, muß sodann den betrachteten Punkt der Ebene charakteri-
und ihn von jedem anderen Punkte derselben unterscheiden.
hierin aber auch in Bezug auf die vier Quadranten, in welche

die beiden Achsen die Ebene zerlegen, jeden Zweifel zu entfer
bedarf es überdies noch einer Feststellung darüber, in wel
Falle die Perpendikel positiv und in welchem Falle sie neg
heißen sollen. Die Perpendikel selbst führen den Namen Coo
naten, und das ganze angezeigte System, durch welches die F
legung eines Punktes in der Ebene zu Wege gebracht wird, h
ein Coordinaten-System.

Wenn nun der vorhin gedachte Punkt in der Ebene
Bewegung gesetzt wird, während, wie schon gesagt, die bei
Achsen fortwährend als festliegend angesehen werden müssen,
verändern sich gleichzeitig auch jene beiden Perpendikel oder Co
dinaten, und zwar sowol in Betreff ihrer Länge als ihrer La
Sobald nun die Bewegung jenes Punktes eine gesetzmäßige
d. h. eine solche, durch welche nach bestimmtem Gesetze eine
stimmte gerade oder krumme Linie entsteht, so muß das genan
Gesetz auch auf die Veränderung der beiden Coordinaten
übertragen; und da die genannten beiden Coordinaten hier ar
metisch d. h. durch Zahlen ausgedrückt vorausgesetzt werden,
muß unter diesen beiden Coordinaten eine Gleichung sich a
stellen lassen, aus welcher, sobald für die eine Coordinate
gewisser Werth an die Stelle gesetzt wird, der entspreche
Werth der anderen Coordinate sofort folgt, aus welcher Gleichu
man mithin die ganze Linie Punkt vor Punkt wieder kann h
vorgehen lassen. Diese Gleichung wird eben deshalb die Gleichu
der Linie genannt, und man kann das Ergebniß dieser kur
Betrachtung so zusammenfassen, daß jede gerade oder krum
Linie in einer Ebene, deren Entstehung ein nachweisbares Ge
zum Grunde liegt, durch eine Gleichung zwischen zwei veränd
lichen Coordinaten ausgedrückt werden kann. Die genan
Gleichung bildet demgemäß im Geiste der analytischen Geome
die Grundlage, auf welche jede Untersuchung von Eigenschaf

er oder krummer Linien in letzter Instanz zurückkom=
muß.

So wie man nun die Gleichungen, nach heutigem Sprach=
uch, in die beiden Hauptgruppen der algebraischen und der
cendenten Gleichungen zerfällt, so zerfallen darnach alle ebenen
n von gesetzmäßigem Bau — und nur solche betrachtet man
r wissenschaftlichen Geometrie — in die beiden Hauptgrup=
der algebraischen und der transcendenten Linien, oder, wie
artes sie nannte, der geometrischen und der mechanischen
n, je nachdem die Gleichung zwischen den beiden veränder=
Coordinaten eine algebraische oder eine transcendente ist.
so wie ferner die algebraischen Gleichungen wieder eingetheilt
en in Gleichungen des ersten, des zweiten, des dritten &c.
es, so zerfallen auch die algebraischen Linien der Ebene
o in Linien der ersten, der zweiten, der dritten &c. Ordnung,
chdem ihre Gleichung in Bezug auf die in ihr vorkommenden
derlichen Coordinaten vom ersten, zweiten, dritten &c. Grade
Insbesondere mag noch bemerkt werden, daß jede Linie,
e nach dem angeführten Sprachgebrauch eine Linie der ersten
nung genannt werden muß, eine gerade Linie ist; so wie
Linie der zweiten Ordnung ein Kegelschnitt, d. h. eine Para=
eine Ellipse oder eine Hyperbel, wobei bekanntlich der Kreis
als ein besonderer Fall der Ellipse erscheint. Die Linien der
en Ordnung aber bieten schon eine so große Mannigfaltigkeit
Formen dar, daß man dieselben nicht weiter durch Benen=
gen hat von einander zu unterscheiden versucht. Diese Auf=
ing kann einiger Maßen einen Begriff von der Reichhaltig=
der analytischen Geometrie geben, zumal wenn man damit
eicht, daß die Untersuchungen der Alten nur in ganz isolir=
Fällen über die Kegelschnitte hinausgegangen sind; und es
t hiernach wenigstens nicht mehr zu verwundern, wie der

Reiz der neuen Wissenschaft die Mathematiker auf so lange z
beinahe ausschließlich hat in Anspruch nehmen können.

Die Geometrie des Raumes ging bei dieser neuen Betrachtun
weise gleichfalls nicht leer aus, wenn gleich die dahin führe
Verallgemeinerung der so eben entwickelten Coordinaten-Theo
durch die Fülle des neuen Materials zurückgedrängt, erst merk
später erfolgte. Parent scheint in einer Abhandlung vom Ja
1700 der erste gewesen zu sein, welcher in der nöthigen All
meinheit eine krumme Fläche im Geiste der analytischen Geome
betrachtete. Um dahin zu gelangen, hat man sich, statt
beiden Coordinaten-Achsen in der Ebene, drei Coordinaten-Ebe
im Raume zu denken, welche durch Einen Punkt gehen und
einfachsten Falle einander gleichfalls rechtwinkelig durchschneid
Als Durchschnittslinien dieser drei Ebenen entstehen überdies
Coordinaten-Achsen. Wenn man nun von der Lage irgend ei
Punktes im Raume Rechenschaft geben will, so hat man
diesem Punkte auf jede der drei Coordinaten-Ebenen ein Perp
dikel zu fällen, dessen Länge man sich in Zahlen ausgedrückt d
ken muß; zugleich ist in Bezug auf jedes dieser Perpendikel, we
wiederum den Namen Coordinaten führen, eine Feststellung d
über zu treffen, wann dasselbe als positiv und wann als nega
angesehen werden soll. Wenn ferner der Punkt im Raume sei
Ort verändert, so verändern sich gleichfalls die genannten
Perpendikel oder Coordinaten, und wenn jene Ortsveränder
des Punkts eine gesetzmäßige ist, so muß gleichfalls unter
Veränderungen der Coordinaten ein bestimmtes Gesetz herrsch
welches nach der Weise der Algebra durch Vermittelung
Gleichungen zwischen den drei veränderlichen Coordinaten aus
drückt werden kann. Es sei nun irgend eine ebene oder krum
Fläche als der geometrische Ort für jenen sich bewegenden Pu
gegeben, so gelangt man durch diese Betrachtung zu dem Erg

daß jede Fläche im Raume, welche durch ein bestimmtes
z entstanden ist, durch eine Gleichung zwischen drei verän-
chen Coordinaten dargestellt wird, aus welcher, sobald für
dieser Coordinaten willkürliche Werthe an die Stelle gesetzt
en, die denselben zugehörige dritte Coordinate durch bloße
ösung der Gleichung hergeleitet werden kann, und welche
n auch wieder rückwärts dazu geeignet ist, die gesammte
e Punkt vor Punkt zu reproduciren. Eine Gleichung zwischen
veränderlichen Coordinaten ist es demnach, auf welche im
e der analytischen Geometrie die Betrachtung jeder Fläche
t zurückkommt. — Ferner unterscheidet man auch wieder bei
Flächen im Raume, in ähnlicher Weise wie bei den Linien
r Ebene, algebraische und transcendente Flächen, so wie denn
wieder die algebraischen Flächen weiter zerfallen in Flächen
ersten Ordnung, der zweiten Ordnung 2c., je nach dem
de ihrer Gleichung. Jede Fläche der ersten Ordnung ist eine
ne; jede Fläche der zweiten Ordnung aber läßt sich durch die
nschaft charakterisiren, daß jeder ebene Durchschnitt derselben
n Kegelschnitt hervorbringt, wohin also z. B. gehören:
lflächen, Cylinderflächen, Kugelflächen, ellipsoidische Flächen,
boloidische Flächen u. s. f.

Wenn in der analytischen Geometrie von einer Linie im
me die Rede sein soll, so könnte es auf den ersten Blick den
chein gewinnen, als ob dieser Fall einer einfacheren Erledi-
g müsse fähig sein als der so eben betrachtete von der Fläche
Raume. In der That findet sich der genannte Fall schon
Descartes; er dachte sich die Linie im Raume orthogonal
icirt auf zwei auf einander rechtwinkelig stehende Ebenen,
der Inbegriff der beiden Gleichungen, welche den auf solche
ise entstehenden beiden Projectionslinien angehören, indem
dieser Linien in ihrer Ebene auf ein rechtwinkeliges Coordi-

naten=System bezogen und die Durchschnittslinie beider Eb
als gemeinschaftliche Coordinaten=Achse für beide angesehen n
galt ihm als der analytische Repräsentant der gedachten Linie
Raume. Diese Auffassungsweise hat indessen durch die analyt
Betrachtung der Flächen eine Verallgemeinerung erfahren.
Linie, sie sei gerade oder krumm, kann nämlich immer als
Durchschnittslinie zweier Flächen angesehen werden, und desl
wird eine Linie im Raume im Geiste der analytischen Geome
allgemein dargestellt durch das System zweier Gleichungen, we
dieselben drei veränderlichen Coordinaten in sich enthalten.
dieser beiden Gleichungen, für sich genommen, stellt eine Fl
im Raume dar; die gleichzeitige Geltung beider Gleichungen
beschränkt die Gültigkeit derselben auf den Inbegriff derjeni
Punkte, welche beiden Flächen gemeinsam angehören, d. h.
ihre Durchschnittslinie. Spätere Anwendungen werden di
Letztere, welches ich hier nur der Vollständigkeit wegen kurz
rühren wollte, deutlicher machen.

Das Gesagte enthält, so weit dies ohne ein Eingehen
die Sache selbst möglich war, vollständig die Grundgedanken
neuen oder analytischen Geometrie, welche durch Descartes
in's Leben gerufen worden. Diese analytische Geometrie,
Zuziehung der Bezeichnungsweise von Vieta, zeigte sich nun
fort nicht allein sehr geeignet, die Geometrie um ein Wesentlic
über den Standpunkt der Alten hinaus zu fördern, sondern
war auch zugleich von einer sehr erheblichen Rückwirkung auf
Arithmetik. Es braucht nur daran erinnert zu werden, daß j
Gleichung einer Linie oder einer Fläche, arithmetisch betrach
indem man sich die Coordinaten wie unbekannte Größen den
die zur Festlegung eines unbekannten Punktes führen soll
nichts anderes ist als eine Gleichung von der Natur der un
stimmten, wo für eine oder mehrere der Unbekannten willkürl

ne angenommen werden dürfen und die Werthe der übrigen
annten sodann durch die Gleichung selbst sich bestimmen.
nun eine unbestimmte Aufgabe der Arithmetik gegeben
lzt, so wird derselben, in der Sprache der Algebra ausge=
, eine Gleichung oder ein System von Gleichungen zuge=
müssen, welches mehr Unbekannte enthält als Gleichungen
id. Sobald man darauf aber diese Gleichung oder dieses
m von Gleichungen auf den Boden der analytischen Geo=
hinüberträgt, so bedeutet es daselbst eine Linie oder eine
; und es erhellet sogleich, daß in dieser Linie oder Fläche
igenschaften und Beziehungen der ursprünglichen Aufgabe
erkannt werden müssen, freilich in einem ganz anderen,
ch dem geometrischen Gewande: ja daß in dieser neuen
lt manches erst an den Tag treten wird, was in der ur=
glichen arithmetischen Auffassung der Aufgabe gar nicht
bar vorlag. Zwar ist allerdings die Geometrie beschränkter
ie Arithmetik; sie kann über nicht mehr als drei Dimensionen
zen, und wo demnach eine Aufgabe zu betrachten ist, welche
als drei unbekannte oder veränderliche Größen in sich fassen
a muß es der arithmetischen Betrachtung überlassen bleiben,
und ausschließlich das letzte Wort zu reden. Aber selbst in
Voraussetzung kann man in der Regel, durch vorläufige
ränkung und Vereinfachung der Aufgabe, die geometrische
chtung zuvor auf einen besonderen Fall zur Anwendung
en und somit dem allgemeinen Endresultat, wenn es selbst
sollte erreichbar sein, wenigstens mit Erfolg vorarbeiten. —
wurde also die Geometrie ein räumliches Veranschauungs=
arithmetischer Beziehungen; sie wurde gleichsam eine neue
ode zur Erkenntniß arithmetischer Wahrheiten, während
ursprüngliche Zweck der analytischen Geometrie nur darauf
itet war, die Untersuchung geometrischer Gebilde auf den

Boden der Arithmetik zu übertragen und hier zu erledigen. Wechselbeziehung zwischen Geometrie und Arithmetik ist es, seitdem höchst fördernd auf die Fortschritte beider Wissensch eingewirkt hat, und welche bis auf den heutigen Tag von bedeutendsten Mathematikern nicht verschmäht wird, um Erke nisse der einen Wissenschaft durch diejenigen der anderen zu forschen und in's Klare zu bringen. Ihr wichtigstes Erge aber war die Differential- und Integralrechnung, zu deren Gr legung ich in der nächsten Vorlesung übergehen werde.

Dritte Vorlesung.

Meine Herren!

Den geschichtlichen Weg verlassend, welcher uns bis hieher
die Pforten der Differential= und Integralrechnung geführt
werde ich heute zu dem eigentlichen Zwecke dieser Vorlesungen
gehen, nämlich die Wissenschaft selbst, von den Grundbe=
ien derselben beginnend, vor Ihnen zu entwickeln. Die Na=
der Sache bringt es mit sich, daß ich von der Voraussetzung
ehe, daß die Differential= und Integralrechnung Ihnen
unbekannt sei und Sie die Kenntniß derselben erst durch
gegenwärtigen Vorlesungen sich verschaffen wollen, und ich
de deshalb einen vergeblichen Versuch machen, wollte ich etwa
der Hand der Geschichte im Einzelnen nachzuweisen unter=
nen, welche mannigfaltigen Bemühungen und Forschungen
usgehen mußten, um die große Erfindung Leibnitzens vor=
reiten und in ihr schließlich ihren Zielpunkt zu finden. Ein
ständniß, so wie ein Interesse für solche Nachweisung ist ja
all erst da möglich, wo der Gegenstand, um den es sich
delt, schon hinreichend bekannt ist, und so wird dann auch
Verlaufe dieser Vorlesungen mehr als Einmal sich die Ge=
nheit darbieten, bei einzelnen Problemen, welche für die

Gestaltung der Wissenschaft von Bedeutung gewesen sind, geschichtlichen Rückblick zu thun. Zunächst und für heute werde ich darauf bedacht sein müssen, den wissenschaftlichen gangspunkt, so wie die Aufgabe, welche die Differential- Integralrechnung zu lösen unternimmt, kurz zu charakter um sodann mit den nächstfolgenden Vorlesungen in die Red gen selbst einzugehen.

Derjenige Begriff, durch dessen richtige Auffassung Behandlung man am unmittelbarsten in die Sache gelang der Begriff der Function; denn die Functionen sind durc ganze Wissenschaft der fortwährende Gegenstand der Betrach weshalb denn auch Einige nicht mit Unrecht es für angem gehalten haben, der Wissenschaft den Namen Functionenrech zu geben. Der Begriff der Function aber lehnt sich unmitt an die vorangegangenen Betrachtungen über die analytische metrie. Denkt man sich im einfachsten Falle eine unbesti Gleichung zwischen zwei unbekannten Größen, deren geometr Repräsentant die Linie in der Ebene ist, so kann man in Gleichung für die eine der beiden Unbekannten willkürliche W setzen, worauf man sodann correspondirende Werthe für die a Unbekannte erhält. Man kann aber auch die eine der b Unbekannten continuirlich eine Reihe von Werthen durchl lassen, ausgehend von einem willkürlichen Anfangswerthe schließend mit einem willkürlichen Endwerthe, und wenn hiebei die correspondirenden Werthänderungen der anderen U kannten auffaßt, so nennt man diese letztere, in der genan Beziehung gedacht, eine Function der ersteren. Die beiden betrachteten Größen, mit einem gemeinschaftlichen Namen bene heißen veränderliche Größen, und dieses Wort soll demnach sagen, daß diese Größen als fähig erachtet werden, eine R von auf einander folgenden Werthen successiv anzunehmen.

genannte Veränderliche heißt die unabhängige Veränderliche, weite dagegen ist die abhängige Veränderliche oder die Func- der ersten.

Wenn eine Gleichung zwischen drei unbekannten Größen ven vorliegt, deren geometrischer Repräsentant eine Fläche im ume ist, so kann man in dieser Gleichung für zwei der ge- nten Größen willkürliche Werthe setzen, worauf sodann für ritte sich correspondirende Werthe ergeben. Man kann also jene beiden Unbekannten, jede für sich, eine Reihe auf ein- r folgender Werthe successiv durchlaufen lassen und die daraus rgehenden Werthänderungen der dritten Unbekannten betrach- mithin hat man hier mit Zuziehung der vorigen Begriffe veränderliche Größen, worunter zwei unabhängige und eine ngige, und diese letzte ist eine Function der beiden ersten.

In derselben Weise kann man fortfahren, eine Gleichung hen mehr als drei unbekannten Größen zu betrachten, wo nn nur, wegen Beschränkung der Geometrie auf die drei ensionen des Raumes, das begleitende geometrische Bild ällt. Man gelangt daraus auf die vorige Weise zu dem riffe einer Function von drei und mehr Veränderlichen. Jede e Function wird gegeben durch eine Gleichung, welche die nderlichen Größen in sich enthält, oder auch durch ein System Gleichungen, in welchem die Anzahl der vorkommenden ver- rlichen Größen diejenige der Gleichungen übertrifft. So e diese Gleichungen unaufgelöst vorliegen, heißt die Function unentwickelte; eine entwickelte dagegen, wenn die Gleichung das System von Gleichungen für diejenige Veränderliche, he als die abhängige Veränderliche angesehen werden soll, elöst ist.

Beispiele zur Erläuterung des Begriffs der Function lassen schon aus der Elementar-Mathematik in Menge anführen,

wenn gleich in der Elementar-Mathematik selbst Veränder
und Functionen nicht betrachtet zu werden pflegen. So k
man z. B. sagen, der Inhalt eines Quadrats oder eines re
mäßigen Fünfecks sei eine Function seiner Seitenlänge, wo
mit dem Worte Function sich der Begriff verbinden muß,
durch continuirliche Werthänderungen der Seite der Figur
der von dieser Seite abhängige Inhalt stufenweise eine Aender
erfahren soll. Ebenso ist z. B. der Inhalt des Dreiecks
Function von Grundlinie und Höhe des Dreiecks, also u
dieser Auffassung eine Function von zwei Veränderlichen;
auch der Inhalt des Dreiecks eine Function seiner drei Se
also hier eine Function von drei Veränderlichen; und so in vi
ähnlichen Fällen. Viel mannigfaltiger aber wird noch das G
der Functionen, wenn man in die Anwendungen der Mathem
auf Mechanik, Physik und Astronomie eingeht, und hier liegt
halb das eigentliche Feld, auf welchem die neue Wissenschaft
bewundernswürdige Kraft vorzugsweise hat entfalten können.
nur einige wenige naheliegende Beispiele zu nennen, so ist z.
die Schwingungsdauer eines Pendels für einen bestimmten
der Erdoberfläche eine Function seiner Länge; die Expansivk
des über Wasser abgesperrten Wasserdampfs eine Function
Temperatur, unter welcher er aus dem Wasser entwickelt w
die Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne eine Func
seines mittleren Abstandes von der Sonne; und so fort, w
Reihe von Beispielen sich in's Unzählige vermehren ließe.

Wenn nun — um zu der Aufgabe der Wissenschaft s
überzugehen — über eine Function Untersuchungen angestellt w
den sollen, zu dem Zwecke nämlich, irgend ein vorgelegtes P
blem seiner Auflösung näher zu führen, so muß diese Func
zuerst und vor allen Dingen in ihrer arithmetischen Form ged
werden, d. h. man muß die Reihefolge derjenigen arithmetis

ationen als gegeben oder doch wenigstens als angebbar vor-
tzen, durch welche aus gegebenen Werthen der unabhängigen
nderlichen die zugehörigen Werthe der Function hergeleitet
en müssen. Gleichzeitig aber wird man auch, als Veran-
ungsmittel der gegebenen Function, zu den Grundbegriffen
nalytischen Geometrie zurückzugehen haben und diesen gemäß
begleitende Bild der gegebenen Function zu construiren ver-
n, so weit solches überall möglich ist. Einer Function von
Veränderlichen wird eine Linie in der Ebene, einer Func-
von zwei Veränderlichen eine Fläche im Raume entsprechen;
ber hinaus, also für Functionen von mehr als zwei Verän-
hen, wo eine unmittelbare geometrische Construction nicht
möglich ist, wird man durch entsprechende Vereinfachung
Aufgabe auf einen der beiden vorigen Fälle müssen zurück-
amen suchen. Wie nun aber diese Construction des beglei-
n geometrischen Bildes der Function ausgeführt werden
, damit sie den Zweck erreiche, die gegebene Function ihrer
n Erstreckung nach, d. h. für alle Werthe der unabhängigen
nderlichen, welche möglicher Weise bei einem vorgelegten
lem in Betracht kommen können, vor Augen zu führen und
nathematischen Auffassung zugängig zu machen, das dürfte
von selbst klar sein.

Soll, um bei dem einfachsten Falle stehen zu bleiben, eine
in der Ebene aus der ihr zum Grunde liegenden Function
einer Veränderlichen durch Construction hervorgehen, so würde
nöthig sein, daß man die eine Coordinate, welche die unab-
igige Veränderliche vorstellen soll, sich im Zustande der unun-
ochenen continuirlichen Veränderung denkt, und durch gleich-
te Betrachtung der daraus resultirenden Werthänderungen
nderen Coordinate, welche aus dem arithmetischen Ausdrucke
zum Grunde liegenden Function sich ergeben, die gesuchte

Linie zu Stande kommen läßt. Da indessen das Veränder
als solches ein Object mathematischer Betrachtung nicht sein k
vielmehr nur die einzelnen Werthe, welche dasselbe durch Ve
derung erreicht, der mathematischen Auffassung zugängig s
so wird man die Construction jener Linie damit beginnen mü
daß man aus dem arithmetischen Ausdrucke der gegebenen F
tion zuerst für Werthe der unabhängigen Veränderlichen, w
in gewissen endlichen Intervallen auf einander folgen, die z
hörigen Werthe der abhängigen Veränderlichen herleitet,
durch deren Construction in der Ebene ein System von Pun
festlegt, welche die festzulegende Linie gleichsam nur erst vorzeich
Durch Einschiebung von Zwischenwerthen in die genannten In
valle wird man neue Zwischenpuncte herstellen, und da
die Zwischenschiebung solcher Punkte so weit treiben kann
man will, also die Zwischenräume, in denen die Punkte auf
ander folgen, kann so klein werden lassen als man will, so
man auf diese Weise eine immer enger zusammenschließende R
von Punkten erhalten, welche, wenn man sich die Zeichnung
sinnlichen Raume ausgeführt denkt, dem Auge immer mehr
Eindruck der gesuchten geraden oder krummen Linie her
bringt. Indessen eine Reihe von Punkten, so eng dieselben
an einander schließen mögen, ist niemals eine Linie im stren
Sinne der Geometrie. Die Linie wird durch ihre Steti
charakterisirt, während jene Construction nur erst ein System
creter Punkte darbietet; es kommt also noch darauf an, aus
discreten Punktenreihe zu der stetigen Linie einen Überg
zu finden, der einer mathematischen Behandlung fähig ist.

Hier nun ist derjenige Ort, wo ein viel angefochtener
viel mißverstandener Begriff seine Anwendung finden muß,
Begriff, den man als das wahre Fundament der Differen
rechnung anzusehen hat, und dessen scharfe Hervorhebung z

ı Leibnitz gegeben wurde: nämlich der Begriff des Unendlich-
in. Es ist von großer Bedeutung, und ich mache Sie aus-
lich darauf aufmerksam, diesen Begriff scharf und exact auf-
ffen. Unter einer unendlich kleinen Größe versteht man näm-
um die Sache sogleich mit der vollen Präcision hinzustellen,
Größe, welche kleiner ist als jede noch so kleine Größe, die
wirklich angeben mag. Wenn man also etwa, um etwas
r auszuführen, eine Größe angeben wollte, die nach allge-
iem Zugeständniß klein, oder sehr klein, oder außerordentlich
wäre, so würde man damit durchaus noch keine unendlich
Größe haben; denn wie klein jene Größe auch angenommen
rmag, so könnte man immer sofort eine andere nennen, die
r ist, folglich hatte man noch nicht was man haben wollte.
ist ohne Zweifel, und niemand wird widersprechen, die Größe
Ein Tausendtel Zoll sehr klein, ja man kann sagen außer-
ntlich klein im Vergleich zu dem Durchmesser der Erde, und
ch weit davon entfernt, unendlich klein zu sein; denn man
sogleich Ein Milliontel Zoll nennen, welche Länge noch
r ist als die angegebene. Eine sehr kleine oder außerordent-
kleine Größe kann noch immer angegeben werden, wie das
führte Beispiel zeigt; eine unendlich kleine Größe dagegen —
beiläufig gesagt verhält es sich mit der unendlich großen
e nicht anders — wird zwar durch ihren Begriff vollkommen
f bestimmt, aber das Object dieses Begriffes vorzuzeigen ist
ll nicht möglich. Wollte man die Wörter: sehr klein,
rordentlich klein, unendlich klein, durcheinander gebrauchen,
aß das eine für das andere dürfte an die Stelle gesetzt
en, so würde man damit das Zeugniß ablegen, daß man
in Rede stehenden Fundamentalbegriff der neueren Mathe-
: noch nicht in der nöthigen Schärfe und Präcision erfaßt
l.

Eine unendlich kleine Größe, wie gesagt, ist also üb
nicht anzugeben oder wirklich vorzuzeigen; dennoch soll
ein Gegenstand mathematischer Betrachtung werden; hier
scheinbar eine Unvereinbarkeit, die noch der Lösung entgegens
Diese Lösung ist aber in dem Vorhergehenden bereits vollstän
vorgezeichnet. Wenn man nämlich von endlichen Größen
geht, wie es in dem vorhin gewählten Beispiele die Interv
der discreten Punktenreihe, welche zur Festlegung einer L
dienen sollte, waren; wenn man darauf diese Intervalle d
Zwischenschiebung neuer Punkte kleiner und kleiner werden l
wenn man überdies für jede solche Zwischenschiebung ein bestim
tes Gesetz feststellt, so daß nach demselben Gesetze, welches ü
gens beliebig ist, fortwährend neue und neue Zwischenschiebun
ohne Aufhören ausgeführt werden können: so gelangt man,
bald man diesen Gang nicht in der Wirklichkeit — was unm
lich wäre — sondern nur im Begriff ohne Ende verfolgt, je
falls zu unendlich kleinen Intervallen, also zu unendlich klei
Größen, und damit entsteht sodann aus der anfänglichen dis
ten Punktenreihe die gesuchte continuirliche Linie. Die L
erscheint hier also als eine Gränze, der die zum Ausgange
wählte Punktenreihe ohne Aufhören näher und näher kom
ohne sie jedoch in der Wirklichkeit jemals zu erreichen. Und ebe
wenn man die Operation durch den Calcul begleitet, ausgeh
von irgend einem arithmetischen Ausdruck, welcher, durch
bestimmtes Problem herbeigeführt, auf Grundlage des als beka
vorausgesetzten Ausdrucks der gegebenen Function zu Stande
kommen ist, so wird dieser arithmetische Ausdruck gleichzeitig
der gedachten geometrischen Operation sich mehr und mehr ei
bestimmten Gränzwerthe nähern, gleichfalls ohne ihn jemals ge
zu erreichen, und zugleich wird der diesen Gränzwerth darstell
arithmetische Ausdruck derjenigen Linie angehören, welche

nze aus der vorhin angezeigten geometrischen Operation her=
gegangen ist. Der Begriff der Gränze also bildet die Ver=
ielung zwischen dem Endlichen und dem Unendlichkleinen, oder
ist die Brücke, welche von der Betrachtung des Endlichen zu
Betrachtung des Unendlichkleinen hinüberführt. Überall, wo
sich um eine Betrachtung des Unendlichkleinen handelt, hat
von der Betrachtung eines Endlichen auszugehen, und die
nze aufzusuchen, der man, während dieses Endliche kleiner
kleiner wird, ohne Aufhören näher und näher kommt. In
r Weise werden wir denn gleichfalls mit Gränzbetrachtungen
sehr bald zu beschäftigen haben.

Wir stehen hier bereits am Eingange zur Differentialrech=
ng; denn in der That ist ein Differential nichts anderes als
unendlich kleine Zunahme, welche eine der Veränderung als
ig vorausgesetzte Größe erlitten hat. Der Gegenstand der
ferentialrechnung ist die Ausmittelung derjenigen unendlich
nen Zunahmen, welche die Functionen erleiden, sobald man der
bhängigen Veränderlichen oder, falls ihrer mehrere sind, den
bhängigen Veränderlichen eine unendlich kleine Zunahme er=
lt hat. Der Weg zur Ausmittelung dieser unendlich kleinen
nahmen der Functionen besteht aber nach dem vorhin Gesagten
in, daß man zuerst endliche Zunahmen betrachtet, und auf
ie sodann den angedeuteten Gränzübergang anwendet. — Die
egralrechnung hat, soviel sich hier vorläufig sagen läßt, genau
umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich aus den bekannten un=
lich kleinen Zunahmen oder Differentialen der Functionen
e Functionen selbst wieder herzustellen, in welcher Beziehung
e Functionen die Integrale der gegebenen Differentiale ge=
nt werden.

Wenn es mir gelungen sein sollte, Ihnen in demjenigen,
s ich hier gesagt habe, ein klares Bild von dem Charakter der

Differentialrechnung zu entwerfen, so muß ich freilich sogleich h
zusetzen, daß hier noch ein auf den ersten Blick nicht sehr wese
lich erscheinender Zusatz gemacht werden muß, ehe das Ganze
voller Bedeutung mit der eigentlichen Differentialrechnung zusa
menfällt. Jener in allgemeinen Umrissen angedeutete Gang nä
lich, welcher, von endlichen Werthen ausgehend, durch den Grä
übergang zur Auffindung gewisser Resultate führt, ist sei
Hauptzügen nach keineswegs ein Eigenthum der neueren Mat
matik, sondern läßt sich rückwärts verfolgen bis zu dem größ
Mathematiker des Alterthums, dem Archimedes. Die Exhaustio
methode des Archimedes, welche, anknüpfend an die Betracht
eingeschriebener Polygone, von demselben zur Quadratur krum
linig begränzter Flächen angewandt wurde, wozu heutiges Ta
die Integralrechnung dient, nimmt wesentlich denselben Ga
indem man es auch dort mit allmälig kleiner werdenden Grö
zu thun hat, die schließlich in eine Summe vereinigt werd
Doch war diese Methode, wenn gleich ihr Grundgedanken
sehr allgemeiner ist, noch keineswegs einer allgemeinen Anw
dung auf Linien jeder Art fähig; vielmehr forderte jeder bes
dere Fall erst noch eine besondere Erfindung, welche den Eig
thümlichkeiten des besonderen Falles Rechnung trug. Die no
wendige Ergänzung aber, durch welche aus der Exhaustio
methode der Alten eine vollkommen allgemeine Methode gewor
ist, auf Linien und Flächen jeder Art und auf Functionen
voller Allgemeinheit anwendbar, wurde erst durch Leibnitzens
rühmte Erfindung gegeben, und mit ihr haben sich die Aufgab
zu deren Behandlung Archimedes in bewundernswürdiger W
den höchsten Scharfsinn aufzubieten sich genöthigt sah, jetzt
leichte Rechen=Exempel verwandelt, die mit wenig Federstric
erledigt werden.

Leibnitz, geboren 1646 zu Leipzig und gestorben 1716

nover, wurde nicht nur als Philosoph, sondern auch als
hematiker des großen Descartes größerer Nachfolger. Sein
Auftreten fiel in die Zeit, wo die Cartesianische Geometrie
deren Rückwirkung auf die Arithmetik die Hauptbeschäftigung
Mathematiker ausmachten, und insbesondere waren es die
n Probleme von den Maximis und Minimis und von den
nzenten, nach deren allgemeiner Lösung man suchte. Leibnitz
diese Lösung in der berühmten Abhandlung vom Jahre 1684,
damit die Grundregeln der Differentialrechnung, denen er
zwei Jahre später die Grundregeln der Integralrechnung
folgen ließ. Das wesentlich Neue in dieser Abhandlung war
exacte und unmittelbare Auffassung des Unendlichkleinen selbst,
zweckmäßige Bezeichnung desselben, und endlich, gestützt auf
Bezeichnung, ein höchst eigenthümlicher und vollkommen
meiner Calcul, welcher eine Anwendung auf Functionen, und
lich auch, auf Grundlage der analytischen Geometrie, auf geo-
rische Gebilde jeder Art zuließ. Das eben ist das große Ver-
ıst Leibnitzens, und darin besteht die nothwendige Ergänzung,
e das vorhin dargelegte Wesen der Differentialrechnung noch
ern mußte, daß wir in der Leibnitzischen Differentialrechnung
vollkommen allgemeine Rechnungsmethode besitzen, der jedes
blem ohne Ausnahme unterworfen werden kann; eine Rech-
gsmethode, ohne welche der vorhin ausgesprochene Grund-
nke der Differentialrechnung beinahe vollkommen unfruchtbar
und beinahe uns wieder auf den Archimedischen Standpunkt
ckversetzen würde. Eine solche Rechnungsmethode gab Newton
t. Es wird Ihnen nicht unbekannt geblieben sein, daß über
Ehre der Erfindung der Differentialrechnung zwischen Newton
Leibnitz ein heftiger Streit ausbrach; daß die Londoner
cietät eine Entscheidung zum Nachtheile Leibnitzens gab, und
s Urtheil lange als Autorität galt; ja es ist Ihnen vielleicht

nicht entgangen, daß noch heute unser berühmter Landsm
Alexander von Humboldt die wahre Sachlage so weit hat
kennen können, daß er im zweiten Bande seines Kosmos, gele
lich der Erfindung der Differentialrechnung, abermals jenes Ur
der Londoner Societät zur Entscheidung über diese Erfindung
seinen Lesern vorführen mögen. Wir leben hier in derjenigen S
welche vierzig Jahre aus dem Leben Leibnitzens gesehen, von we
die Erfindung der Differentialrechnung sich über die ganze gel
Welt verbreitet hat und in welcher die Asche des großen Ma
begraben liegt. In dieser Stadt und an dieser Stätte dar
wohl um so bestimmter darauf hinweisen, wie die Urtheile
namhaftesten Mathematiker längst darüber einig sind, in Lei
den wahren und alleinigen Erfinder der Differential- und I
gralrechnung anzuerkennen und zu verehren. Leibnitz gab
neue und allgemeine Rechnungsmethode, welche den an sich
Anwendung nach gar nicht zugängigen Grundgedanken erst
Anwendung fähig machte; auf Leibnitzischen Fußstapfen füh
die Bernoulli, Euler, Lagrange, und wie die großen Mä
weiter heißen, die Wissenschaft zu größerer Höhe fort;
Leibnitzische Methode endlich ist die allgemein verbreitete ge
den, und hat jede andere vor und neben ihr aufgekommene v
ständig verdrängt. Die Fluxionen-Methode Newton's, welche
für ebenbürtig mit der Differentialrechnung, wohl gar für
Vorbild derselben ausgab, entbehrt gänzlich des Vorzugs,
allgemeine Rechnungsmethode der angedeuteten Art, die also
wendbar wäre auf Probleme jeder Art, zu besitzen; und w
man etwa Newton den Erfinder der Differentialrechnung nen
so müßte man mit gleichem Rechte — wie Leibnitz in einer
nen, erst neuerlich bei der zweiten Säcularfeier seines Gebu
tags gedruckten Schrift sich ausspricht — die Cartesianische G
metrie dem Apollonius zuschreiben, der gleichfalls das Ob

:echnung schon besaß, die Rechnung selbst aber nicht. So
s auch die Fluxionen-Methode in der Hand ihres Erfinders
iet hat, für seine Nachfolger blieb sie ein unbrauchbares In-
ient; und so sehen wir denn, nach Newton's und seiner
enossen Tode, die Mathematik in England veröden, bis erst
dem gegenwärtigen Jahrhundert die Engländer, durch natio-
Rücksichten nicht länger abgehalten, sich dazu bequemten, die
itzische Erfindung in Gebrauch zu nehmen. Dieses äußer-
Symptom dürfte Ihnen allein schon als ein hinreichender
eis gelten, daß die Newtonische Methode, die jetzt nur
ein historisches Interesse hat, weit davon entfernt war,
der Differentialrechnung Leibnitzens an die Seite stellen zu
rn.

Indem wir nun im Begriff sind, mit dem Beginn der
ten Vorlesung in die Leibnitzische Rechnungsmethode und
in die Sache selbst einzugehen, wollen Sie mir zum Schluß
heutigen Vorlesung noch gestatten, daß ich den Versuch mache
eigenthümlichen Gang der Differential- und Integralrechnung,
ihre Weise, zu Resultaten zu gelangen, Ihnen an einem
piele vorläufig etwas näher zu führen. Man hält es ge-
iglich für schwierig, wo nicht gradezu für unmöglich, einem
t-Mathematiker einen Begriff von demjenigen zu geben, was
Differentialrechnung zu leisten unternimmt. Ich kann mich
: Meinung nicht anschließen; vielmehr sobald man nur die
ichsten mathematischen Begriffe als geläufig voraussetzen darf,
laube ich, daß ein zweckmäßig gewähltes Beispiel sehr wohl
geeignet sein könne, um einen Blick in das Wesen der
ierentialrechnung thun zu lassen. Nur wird es nöthig, da-
i nicht nach den strengen Anforderungen der Mathematik
verfahren, sondern den sogenannten populären Weg einzu-
gen.

Es sei die Rede vom Schießen aus einer Kanone.
kenne die Richtung des Rohrs, die Kraft der Pulver-Explo
und die Beschaffenheit der Kugel, und es werde gefordert,
Bahn zu bestimmen, welche die Kugel in Folge dieser bekan
Data in der atmosphärischen Luft beschreibt; insbesondere
auch den Punkt, wo sie niederfallen wird. Um diese Auf
zu behandeln, wird man im Geiste der Differentialrechnung
etwa die ganze Bahn der Kugel, vom Anfangspunkte bis
Endpunkte derselben, in Einem Acte aufzufassen unternehm
solche Auffassung würde überdies hier wie in vielen and
Fällen, so lange man noch am Eingange der Betrachtung
geradezu vollkommen unausführbar sein. Vielmehr man
vorläufig die Kugel in einem gewissen Punkte ihrer B
für einen Augenblick im Gedanken fest, verfolgt sie von
gleichfalls im Gedanken bis zu einem gewissen zweiten Pu
ihrer Bahn, und beschränkt die Betrachtung zunächst nur au
zwischen diesen beiden Punkten enthaltene Bahnstrecke, mit
seitstellung des ganzen vorangehenden und nachfolgenden Theils
Bahn. Die beiden angezeigten Punkte kann man jedenfalls
ander so nahe wählen, daß die zwischenliegende Bahnst
beinahe wie eine gerade Linie angesehen werden kann. Ge
wird dieses zwar niemals der Fall sein; aber die angezeigte
dingung wird zum wenigsten desto näher erfüllt werden, je
ner man jene Bahnstrecke angenommen hat, so daß die Ab
chung von der Wahrheit so klein gemacht werden kann als
nur will. Nun beachtet man weiter, welche Kräfte thätig gew
sind, um die Kugel aus dem Anfangspunkte der genannten St
in den Endpunkt derselben überzuführen. Diese Kräfte sind
Wirkung der Pulver-Explosion, deren Richtung mit der Richt
des Kanonenrohrs zusammenfällt; die Wirkung der Schw
welche vertikal nach unten geht; und die Wirkung des Luftwi

.es, welche sich der Kugel in der Richtung ihrer Bahn, also
.r Richtung der hier beinahe als geradlinig vorauszusetzenden
.nstrecke entgegenstellt. Wegen der gleichfalls vorausgesetzten
.heit dieser Bahnstrecke kann man überdies annehmen, daß
.genannten drei Kräfte nur in dem Anfangspunkte dieser
.cke ihre Wirkung auf die Kugel äußern, in jedem Zwischen=
.nte derselben aber eine Wiederholung dieser Wirkung aus=
.. Die vereinte einmalige Wirkung dieser drei Kräfte muß
.nn die Kugel aus dem Anfangspunkte der Bahnstrecke in
.Endpunkt derselben übergeführt haben. Wenn ich mich nun
. auf eine wirkliche Rechnung hier nicht einlassen will, so
. doch soviel sich aus der Natur der Sache ergeben, daß, da
. drei Kräfte der Bestimmung durch Zahlen fähig sind, es
.ich sein muß, wo auch der Anfangspunkt der genannten
.nstrecke gedacht werden mag, den zugehörigen Endpunkt der=
.n aus den angegebenen Daten zu berechnen. Ja es muß
.ich sein, den Übergang vom Anfangspunkte zu dem End=
.nte dieser Bahnstrecke durch eine so allgemeine arithmetische
.nel darzustellen, daß darin auch die Lage des Anfangspunktes
. Strecke vollkommen unbestimmt gelassen, und nur durch ein
.meines Zeichen vertreten wird. Wenn man aber, nachdem
. Formel gefunden, die Bahnstrecke sich in dem oben ange=
.en Sinne als unendlich klein denkt, so liefert die entspre=
.e Formel den Ausdruck dessen, was man das Differential
.Bahn der Kugel nennen kann, und die Aufgabe wäre mit=
.u Ende, so weit sie die Differentialrechnung allein angeht.
.nun aber ferner die genannte Formel für jede unendlich kleine
.nstrecke ihre Gültigkeit behalten muß, welche man aus der
.amten Bahn der Kugel irgendwo herausheben mag, so ist
.ch weiter klar, daß es auch ein Verfahren geben muß, durch
.es man aus dem einzelnen Differential auf die gesammte

Bahn wird zurückschließen können: ein Verfahren, welches o
flächlich angesehen mit einer Summirung sämmtlicher Differen
große Ähnlichkeit haben wird. Dieses Verfahren ist die
tegration, und das Resultat desselben, oder das Integral,
mithin die gesuchte Bahn der Kugel selbst dar. So weit d
Beispiel.

Anmerkung.

Die Literatur der Geschichte der Mathematik ist bereits ziemlich
[...]altig, wenn gleich noch manches zu thun übrig bleibt. Ich setze
[...]auptsächlichsten Werke hieher, so weit sie mir zugängig gewesen und
[...]m Vorigen zur Anwendung gekommen sind.

[...] **Montucla**, Histoire des Mathématiques. Nouvelle édition. Paris 1799 — 1802. 4 Bände in 4. (Die beiden letzten Bände von Lalande herausgegeben).

Sehr ausführlich und auch auf alle Theile der angewandten Mathematik sich verbreitend. Mit französischer Gewandtheit geschrieben und deshalb angenehm lesbar. Leider nicht in allen Punkten vollkommen zuverlässig.

[...]**ssut**, Essai sur l'histoire générale des Mathématiques. Paris 1802. Neu aufgelegt unter dem Titel: Histoire générale des Mathématiques. Paris 1810. 2 Bände in 8.

Deutsch unter dem Titel:

[...]**ossut's** Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik. Übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von N. Th. Reimer. Hamburg 1804. Hoffmann. 2 Theile in 8.

Enthält mehr Raisonnement, weniger Thatsachen. Als Übersicht sehr brauchbar. Die Zusätze des Übersetzers sind beachtenswerth.

[...] **Kästner**, Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Göttingen 1796 — 1800. Rosenbusch. 4 Bände in 8.

Mehr Bibliographie als Geschichte. Enthält fast nur eine ausführliche Beschreibung der werthvollen Bibliothek des Verfassers.

Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui rapportent à la géométrie moderne. Bruxelles 1837. 4.

Deutsch unter dem Titel:

Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf neueren Methoden. Übertragen durch L. A. Sohncke. H 1839. Gebauersche Buchhandlung. 8.

Ein treffliches und gehaltvolles Werk, fast wie mit deutsc Fleiß gearbeitet. Enthält mehr als sein Titel anzeigt, indem sich in zahlreichen Noten auch über die Mathematik im Gan verbreitet.

G. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis renaissance des lettres jusqu' à la fin du dix-septième siè Paris 18.. — 1841. 4 Bände in 8.

Mir sind nur der 3. und 4. Band zu Gesicht gekommen.

G. H. F. Nesselmann, Versuch einer kritischen Geschichte der Alge Erster Theil: Die Algebra der Griechen. Berlin 1842. Reimer

Von diesem vorzüglichen Werke, welches auf 4 Theile rechnet ist und durchweg auf unmittelbarem Quellenstudium be haben wir leider die Fortsetzung noch immer vergeblich zu erwa

Ideler, über die Trigonometrie der Alten. Aufsatz in v. Zach's mo licher Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelsku Juli 1812.

Ausführlich und tief in die Sache gehend.

G. G. Leibnitii Historia et Origo Calculi differentialis. Zur zw Säcularfeier des Leibnitzischen Geburtstages aus den Handschr der Königl. Bibliothek zu Hannover herausgegeben von Dr. C Gerhardt. Hannover 1846. Hahn'sche Hofbuchhandlung.

Die auf Seite 38 erwähnte Schrift, welche Leibnitz zur wehr der aus England erfolgenden Angriffe verfaßte und an Herausgabe ihn der Tod verhinderte.

De

Calculi Infiniteſimalis
argumento mere analytico.

Pars posterior,

ıae transformationem rationum geometricarum et arithmetica-
rum mutuam omni differentialium eliminationi optime
ſatisfacere demonſtrat.

Diſſertatio mathematica,

quam auctoritate
Ampliſſimi Philoſophorum Ordinis
pro loco
in hoc ordine rite obtinendo
publice defendet auctor

Ernestus Fridericus Wrede,
Pomeranus,
hiloſ. Doct. et Lib. Art. Mag. Math. P. O. nec non Societatis Scrutatorum
erolinenſis, Societatis Oeconomicae Potsdamienſis, Societatis Medicinalis Pari-
ſienſis ſodalis atque Societatis Literarum German. Regio-
montanae ſodalis honorarius;

Reſpondente
Carolo Guilielmo Schaedlich, Regiomontano,
Teolog. Cand.

contra Opponentes
Carolum Leopoldum Büttner, Regiomontanum,
Theol. Cand.
Chriſtianum Fridericum Lentz, Pomeranum,
Theol. Cand.

Anno MDCCCVIII. Die 9. Septemb.
Horis locoque ſolitis.

Regiomonti,
apud Hartungium typographum regium academicum.

§. 1.

Etsi fuit omnium fere mathematicorum, qui de calculo scripserunt infinitesimali, consuetudo vel negligendi vel recusandi ejus finitionem, dicendo difficillimam esse cuivis, qui nondum hanc matheseos disciplinam perspexit;* nihilominus tamen mihi non perpera videtur tentatio, finiendi calculum infinitesimalem iis, qui in analysi sublimiore nondum profecerunt, et praeter theoriam de rationibus proportionibusque nihil fere sapiunt. Liceat igitur ut incipiam a propositionibus valde notis, omnem scilicet ratiocinationem, qua semper ad inveniendas magnitudines incognitas utimur, in proportione vel geometrica vel arithmetica niti. Quaelibet autem proportio quatuor consistit terminis, quorum bini rationem eamdem constituunt. Ad constituendum quamcunque rationem, duas invicem quantitates esse comparandas, jam satis constat. Quare hoc loco nihil praeter qualitatem cujusvis rationis animadvertendum erit. Rationes enim, quibus in regula trium utuntur, ita sunt comparatae, ut numerus finitus vel divisione vel subtractione inveniatur; omnesque hujus generis

* *Leonh. Euleri* ad Institutionem calculi differentialis etc. praefatio.

rationes dicuntur *conſtantes*, quoniam neque unus neque alter trium terminorum, qui dati ſunt, inter ratiocinationem vel augetur vel diminuitur. Saepius autem fieri poſſe, quod unus vel alter terminorum, qui dati ſunt, in quovis, dum ratiocinamur, temporis momento poſteriori jam aliam, quam in praecedente habeat quantitatem, facile quisque intelliget.* Quo facto in proportione non amplius *inſtitio* et *menſura* quantitatum, ſed *fluxus* aderit, qui quidem ambas rationes *variabiles* reddit. In hoc autem ſtatu proportionis, *ob menſurae* (id eſt quoti vel differentiae finiti) *impoſſibilitatem*, nec ullus vel ratiocinari, vel ex numerorum tractatione aliquid colligere poteſt.** Igitur termini cujuslibet variabilis locum res aliqua inter ratiocinationem non amplius variabilis teneat neceſſe eſt, vt quae hucusque abfuit quantitatum inſtitio et menſura reſtituatur. Haec autem res reſtituens nulla alia, praeter differentiam lege quadam neceſſaria adſtrictam eſſe poteſt; nam ſola cujusvis mutationis lex vel forma dum functio ſeu quantitas variabilis ipſa ex uno in alterum tranſit ſtatum, immutabilis vel *conſtans* erit. Quam ob cauſam, ut, dum metiri volumus, ali-

---

* V. c. motus corporum gravium, qui lapſu fertur libero.

** Hac de re perpauca quidem ſed vera ſcripſit *Jo. Aug. Erneſti* in Initiis doctrinae ſolidioris ed. III. Lipſ. MDCCL. pag. 48. "Ea (ſc. regula trium) "ut recte et facile adhiberi poſſit, obſervandum eſt, non poſſe eam, niſi "in iis rebus adhiberi, quae *conſtantem* quamdam ac *perpetuam*, *fi-* "*xamque magnitudinem* habent, cum ratione temporis tum partium, "ut ſcilicet non ſemper modo eandem magnitudinem habeant, ſed par- "tes ſimiles etiam aequales. Ita ſi ſit v. c. in motu dimetiendo adhiben- "da, motus aequabilis eſſe debet, ejusdem ſemper celeritatis, ut non- "ſolum ſingulis horis aequalia abſolvantur ſpatia, ſed etiam motus ſimi- "libus horarum ſpatiis reſpondeant aequales." etc.

uid conſtantis in proportionibus habeamus, quantitates variabiles ım differentialibus ſuis, id eſt cum ſignificationibus, quae mutaɔnis legem vel naturam pro certa conditione exprimunt, comutare nos oportet. Quo facto hujus generis proportiones et per rminos ſinitos terminis variabilibus immixtos,* et per ſolas quanates variabiles ** conſtitui poſſunt. Hac autem ſub conditione mper concludendum erit: *ut quantitas quae primum tenet lom ad teminum ſecundum, ita ſignificatio legis mutationis rtii ad formam legis mutationis quarti numeri proportionalis;* ae quidem ſignificatio demum ad functionem ipſam, quam aerimus, reducenda eſt, id quod *integrare* vocant.

Nota. In calculo jam occurrunt inferiore problemata quaedam, quae numerum quartum proportionalem non niſi interveniente alia re analytica inveniri ſinunt, v. c. in proportione $a : x = b : y$, ubi duarum incognitarum vel ſumma $x + y$ vel differentia $x - y$ data erit, itaque $(a + b) : b = (x + y) : y$ vel $(a + b) : a = (x + y) : x$ vel $(a - b) : b = (x - y) : y$ vel $(a - b) : a = (x - y) : x$ ratiocinando concludetur. Ex quo facile perſpici poteſt, in regula trium terminorum quorundam locum nonſolum ſummam ſed etiam differentiam tenere poſſe; quae quidem res calculo infiniteſimali valde ſimilis eſt, quatenus hoc loco non magnitudinibus ipſis, ſed earum *vicariis* utimur. Ceterum quoque proportiones occurrunt, quarum termini quaeſiti non directe ſed *indirecte tantum*, et quaſi

---

* E. g. $np : m = dv : dt$, quae proportio ſaepiſſime in mechanica ſublimiore offenditur.

** E. g. $\frac{ydx}{dy} : y = \frac{ydx - xdy}{dy} : d(z)$, qua proportione in ſitu aſymptotorum determinando utimur.

integrationis cujusdam ope colligendi ſunt, v. c. $a : (aq - a$
$= b : (bq - b)$; unde $(bq - b) = \frac{b}{a}(aq - a)$ et $\frac{b}{a}(aq - a) + b$
$= bq$ ſequitur, quae eſt ipſa quartum in proportione primari
$a : aq = b : bq$ locum tenens magnitudo.

§. 2.

Jam ex eo, quod ſupra dictum eſt, calculi infiniteſimalis natura et finitio facile deduci poteſt. Nam ut regula quam vocar trium finitam nil eſt niſi computus, in quo rationibus duntaxat *ſta bilibus* (vel conſtantibus) utimur, ita calculus infiniteſimalis regu eſt trium, in qua rationes, ut ita dicam, inter manus *fluente* id eſt continuo variabiles,* ideoque cum differentialibus ſuis con mutandae occurrunt; ſemperque hoc in calculo integratione op eſt, quoniam quarti numeri proportionalis loco non niſi ejus *fo ma mutationis characteriſtica* invenitur. Facile quoque qui bet, ſiquidem animum ad rem perſcrutandam reflectet, forma mutationis, dum functionis vices obit ſuae, non niſi *termino cha racteriſtico* opus eſſe perſpiciet. Nam ſimulac in calculo infinit ſimali hic terminus comparet, ſemper et inveniendi reliquos te minos, et reperiendi functionem genitricem veram compot

---

* Mihi quidem liceat, ut hoc loco memorem ipſius *Leibnitii* verba: "Vti "Algebra ſeu ſcientia generali finitae magnitudinis potiſſimus ſcopus e "extrahere formularum radices, ita in ſcientia infiniti invenire ſumm "ſerierum; *quae cum ex terminis conſtant continuo ſeu elementa "ter creſcentibus*, nihil aliud ſunt, quam quadraturae, vel areae fig "rarum" etc. *Leibnitii* Op. omn. Tom. III. LXV. (coll. et indic exorn. ſtudio *L. Dutens*. Colon. Allob. MDCCLXXXIX.)

rimus, dummodo formulam quae jam sufficit integralem noscaius. Quod ut eo facilius intelligatur, per exemplum illustrare ihi liceat. Itaque fingendo proportionem differentialem, cujus rminus quartus vel quaesitus $= d\left(\frac{s}{g}v^m\right) = d(x^n)$ est, aequaonem $\frac{s}{g}\left(mv^{m-1}dv + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}v^{m-2}dv^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}v^{m-3}dv^3 + \ldots\ldots dv^m\right) = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}dx^3 + \ldots\ldots dx^n$ erimus nacti. Integratioem nihil aliud esse, quam reductionem functionum derivatarum l functionem genitricem, quae est $\frac{s}{g}v^m = x^n$, jam satis constat.*

ufficit autem primus omnium terminorum, nec opus est reliqis, l reperiendum functionem genitricem: quam ob rem in calculo ifferentiali, computi decurtandi causa, omnes qui differentiae atum exhibent, praeter primum, termini negligi possunt. Nam dice aequationis datae extracta omnes terminos evanescunt, nec llus praeter $\sqrt[n]{\frac{s}{g}dv^m}$ vel dx restat, ad quem functio x^n in initio btracta accedit, quo facto functionis x^n conditio adhuc mutata $^n + dx$ comparebit. Id quod facile perspicietur, dummodo raicum extrahendarum regulam generalem, quae ex natura dignitum numerorum nascitur, obsequamur. Nam functione data

---

* Conf. Théorie des fonctions analytiques etc. par *J. L. Lagrange*. Par. an V. item *Leibnitii* oper. omn. Tom. III. Num. LXV. pag. 373.

$\sqrt[n]{(x^n + nx^{n-1}\,dx + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}\,dx^2 + \ldots\, dx^n)}$ nemo ſane

nescit, $\sqrt[n]{x^n + dx} = x + \dfrac{\frac{nx^{n-1}dx}{1} + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}dx^2}{1\,.\,2} + \ldots\, dx^n}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)\,x^{(n-2)}dx}{1\,.\,2} + \ldots\, dx^{n-1}}$

ex ea colligendum eſſe. Itaque ſi data functione $nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}dx^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\, dx^n$ quaeritur, ut ſtatus potentiarum auferatur, quisque calculi non imperitus ex differentia $nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}dx^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\, dx^n$ quantitatem

$$\frac{\frac{nx^{n-1}dx}{1} + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}dx^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\, dx^n}{nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)\,x^{n-2}dx}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\, dx^{n-1}}$$

$= dx$ reducet. Quae dum functioni genitrici in initio ſubtractae addendo alligatur, ſignificationem $x^n + dx$, quae mutata functionis genitricis eſt conditio, reddit. Minime vero conditio mutata ſed functio ſemper ipſa quaeritur; quare incrementum dx quovis in caſu abjiciendum erit: quo facto functio genitrix ipſa $= x^n$ in conſpectum ſe dabit. Itaque cum omnes praeter primum differentiae termini nihil integrationem adjuvent, et unus eorum, quem characteriſticum appellavimus, ad reperiendum functionem genitricem ubique jam ſufficiat; ſane ſuperfluum eſſet, in calculo integrali, qui ad inveniendum ex differentialibus functiones genitrices

ices ſpectat, omnibus qui poſt primum ſeu characteriſticum exſint terminis uti. Ex quo ſequitur, methodum in functionibus differentialibus eliminandi, ſi ſola mathematicorum eſſet conſuetudo, vel ſolus conſenſus, computum ſemper decurtare, nec ullum errorem adferre poſſe, eamque ob cauſam omnino eſſe probandam.

§. 3.

Vt autem eliminandi differentialia cujusvis ordinis ſuperioris neceſſitas pateat, *valor* eorum, qui per comparationem cum infimi ordinis differentiali exſtat, ſemper eſt reſpiciendus. Qui quidem facile per transformationem rationum geometricarum et arithmeticarum inveniri poteſt. Ponamus enim $a : b = n$, quo facto $a - b = b(n-1)$ ſit neceſſe eſt; quoniam ex $a = nb$ differentia $a - b = nb - b = b(n-1)$ ſequitur. Contra ſi differentia $= d$ ponitur, omni tempore ex $d = b(n-1)$ quotus $n = \frac{d+b}{b} = \frac{d}{b}$ $+ 1$ colligetur. Ex quo facile non ſolum rationis geometricae quantitatem a ratione eorumdem quantorum arithmetica et vice verſa pendere, ſed etiam rationis arithmeticae valorem utique per menſuram (i. e. quotum vel denominatorem) rationis geometricae determinari poſſe, quisque intelliget. Porro ſequitur ex $\frac{a}{b} = n$ proportio $a : b = n : 1 = a + n : b + 1 = ma : mb = a - n : b - 1$, quae quidem rationes *conſtantes* exſtant. Si vero rationis $a : b$ loco, ratio mutata $(a + x) : b$ datur, quotus $= n + \frac{x}{b}$ et differentia $= b(n - 1 + xb^{-1})$ comparebunt. Contra ex $(a - x) : b$ quotus $= n - xb^{-1}$ et differentia $= b(n - 1 - xb^{-1})$ naſcuntur. Denique

ex rationibus $a : (b+z)$; $a : (b-z)$; $(a+x) : (b+z)$; $(a-x) : (b+z)$ $(a-x) : (b-z)$ etc. eodem ordine quoti $\frac{bn}{b+z}$, $\frac{bn}{b-z}$, $\frac{bn+x}{b+z}$ $\frac{bn-x}{b+z}$, $\frac{bn-x}{b-z}$ etc. totidemque differentiae $(b+z)\left(\frac{bn}{b+z}-1\right) = b(n-1)-z$; $(b-z)\left(\frac{bn}{b-z}-1\right) = b(n-1)+z$; $(b+z)\left(\frac{bn+x}{b+z}-1\right) = b(n-1)+x-z$; $(b+z)\left(\frac{bn-x}{b+z}-1\right) = b(n-1)-x-z$ $(b-z)\left(\frac{bn-x}{b-z}-1\right) = b(n-1)+z-x$, ficut ex ratione $(a \pm x) : b$ quotus $\frac{bn+x}{b}$ et differentia $b(n-1) \pm x$ fequuntur; ex quo in genere omnes rationum arithmeticarum, quae de rationis fundamentalis $a : b$ mutatione pendent, mutationes perfpici, atque vice verfa quotos omnes differentiarum ope, formula fcilicet generali $n = 1 + \frac{d}{b}$ duce, exprimi poffunt. Quo facto differentiae, quae exitant, omnes de quibus originem traxerunt quotos, fcilicet

$$\frac{(b+z)\left(\frac{bn}{b+z}-(1+b+z\right)}{b+z} = \frac{bn}{b+z};$$

$$\frac{(b-z)\left(\frac{bn-x}{b-z}-1\right)+(b-z)}{b-z} = \frac{bn-x}{b-z}$$

etc. reddent.

§. 4.

Sine dubio quisque facile perſpecturus erit, omnes qui in paragrapho praecedente jam explicati ſunt quotos, non minus quam rationes conſtantes ad calculum inferiorem pertinere, in quo terminorum et incrementa et decrementa finem aliquando adtingunt. Id quod in calculo ſublimiori fieri nequit, quoniam hic rationum termini variabiles *in infinitum* vel creſcunt vel decreſcunt. Haec autem incrementa vel decrementa infinita, quae *quanta infinita* (germanice *unendlich groſs, unendlich klein*, i. e. ohne Ende gröſſer oder kleiner werdend) vocantur, locum habere poſſunt ita, vt vel terminus alter conſtans alter vero variabilis, vel eorum quisque ſit variabilis alio modo, id eſt celerius quam alter aut increſcat aut decreſcat. Quod cum ita ſit neque ratio conſtans comparebit, nec ulla re alia interveniente terminorum differentia determinari poterit. Nam quantitates, quarum altera in quovis temporis momento incrementum quoddam capit, omnem ex differentia hauſtam oppugnant menſuram, quoniam incrementorum vel decrementorum ſumma nullam inſtitionem ſed fluxum continuum, ideoque limites habet nullas. Igitur ſubtrahendo nunquam differentia terminorum, quorum alter ſtabilis eſt alter vero fluit, indicari vel definire exprimi poteſt. Id quod etiam fieri nequit, ſi terminorum unus celerius quam alter fluit. Nihilominus tamen hujus generis quantitates *geometrice comparando* metiri queunt, quoniam ad quaeſtionem, quoties dividendus infinitus diviſorem finitum complectitur, reſponſum definitum *omnino infinities eum complecti*, dare poterunt. Quam ob rem in calculo infiniteſimali, ſi *differentiae* determinandae ſint, ubique rationes geometricae, quae quidem, licet unus terminorum alterve conti-

nuo creſcat vel decreſcat, quotum dare poſſunt, interveniant n
ceſſe eſt.

§ 5.

Si rationis geometricae $a:b = nb:b$ terminus antecedens i
ſtatu remanet ſixo, alter contra continuo creſcit, dividend

$$\frac{nb}{b + b + b + b + \ldots \text{ in infinitum}}$$

quotus $n - n = o$ i
venitur, ex quo terminorum differentia vel ratio arithmetic
$(b + b + b + \ldots \text{ in infin.}) - nb = \infty b - nb$, formulae ſuperiori
$d = b(n - 1)$ ope, facile deduci poteſt. Nam ſubſtituendo ∞
$- nb = \infty b\ (o - 1) = \infty b$ in conſpectum venit, ex quo ſine du
bio $\infty b = \infty b + nb$ ſequitur. Cum autem idem ſit, an termi
nus b continuo creſcat vel terminus nb continuo decreſcat, id eſ
fractura $\frac{1}{\infty}$ coefficientis n locum teneat; terminus nb ſolus conti-
nuo variabilis vel continuo in minus mutatus *(unendlich klein* ſcili-
cet *kleiner werdend)* alter vero b conſtans ponendus eſt. Quo
facto diviſio $\frac{nb}{b}$ iterum quotum $= o$, itaque differentiam $b - nb$
$= b - \frac{1}{\infty} b = b\,(o - 1) = b$, et aequationem $b + \frac{b}{\infty} = b$ red-
det. Quae cum ita ſint, calculi differentialis notiones et ſignifica-
tiones $x + dx = x$, $y + dy = y$ etc. veras eſſe, facile quisque intel-
liget. Nam quantitas x, dum incrementum $dx = \frac{1}{\infty}$ capit, ob
hujus fracturae decreſcentiam continuam, in hac ratione continuo
creſcens habenda eſt: ex quo, geometrice dum x cum quantitate
dx comparatur, $dx : x = o$, eamque ob cauſam horum termino-

rum differentia $x - dx = x$, id est $x \pm dx = x$ utique ſequitur. Nam inter quantitates quarum altera conſtans eſt, altera vero continuo creſcit, nulla alia differentia niſi infinita et quanto infinito ipſo x aequalis exſtare poteſt; quoniam v. c. lineam infinite creſcentem uti tangentem anguli recti ab exordio diminuere nil aliud eſt, niſi ejus punctum incipiens dislocare; id quod nullam aliam quam loci inchoativi mutationem adſert, nec unquam incrementa infinita opprimit. Si vero differentia $x - dx = x$ eſt, nonſolum $x + dx = x$, ſed etiam ex hac aequatione mutata quantitatis infinite parvae dx *valor* in calculo infiniteſimali *relativus* $= 0$ facile colligitur; nec ullus dubitabit, eliminationem differentialium quorundam in hujus rationis arithmeticae natura, nihilominus tamen in eo poſitam eſſe, quod neque dx neque dx^n neque $d^n x$ etc. in ſtatu abſoluto quanta vera, ſed nihila tantum abſoluta ſint. Nulla enim fractura, cujus nominator continuo creſcit, unquam annihilatur, quamquam in ratione cum termino finito non alius quam rationis denominator $= 0$ inveniri poteſt. Nam in collatione magnitudinum x et dx illa eo magis hanc ſuperat quo magis haec ipſa decreſcit; et infinite, id eſt absque limite, ſuperatur, dummodo infinite decreſcat. Itaque notiones in hoc ſtatu commutari, id eſt quantum x infinite creſcens (unendlich groſs) et dx conſtans haberi licebit. Ex quo, cujus mentio jam facta eſt, rationis geometricae $dx : x$ denominator $= 0$ et rationis arithmeticae differentia $x - dx = x$ utique apparet, nec ullus de ſignificationis $x + dx = x$ veritate dubitabit.

§. 6.

Vt autem, differentialia nonſolum prima cum quantitatibus finitis, ſed etiam omnium ordinum diverſorum mutue in ratione $: dx$, ideoque $dx \pm dx^n = dx$, $dx \pm d^n x = dx$ et in genere

$d^m x \pm d^{m+1} x = d^m x$ esse, satis perspici possit, hoc loco exponendum erit, fracturas infinitas $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, $\frac{1}{\infty^n}$, $\left(\frac{1}{\infty^n}\right)^m$ etc. quantis infinite parvis dx, dx^2, d^3, d^4, dx^n, dx^{mn} etc. similes, quae in calculo cyphrarum confunduntur,* re vera invicem a se abhorrere. Nemo enim nescit, fracturas esse in ratione duplicata, triplicata, quadruplicata etc. seu vice versa in ratione subduplicata subtriplicata, subquadruplicata etc si vel ad eumdem gradum et numerans et index evehitur, vel amborum simul eadem radix eruitur. Igitur cum dx, dx^m, $d^n x$ etc. fracturae sint, in quarum locum $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty m}$, $d^n\left(\frac{1}{\infty}\right)$ etc. substitui possunt; differentio-differentialia ab indicis ∞ gradu pendere omnino sequitur. Quare non solum significationes ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^m etc. revera diversas esse vel valores diversos habere, sed etiam quantum infinite crescens ad altiorem quam tertium gradum ** evehi posse, demonstrandum erit. Est autem ∞ nil nisi $x + x + x + x + \ldots\ldots$ in infinitum $= \infty x$, quam ob rem nota ∞ quantum significet finitum, cui si alligatus coefficiens infinitus, necesse est: ex quo $\infty^2 = x^2 + x^2 + x^2 + \ldots\ldots$ in infinitum $= \infty (x^2)$ sicut etiam $\infty^m = \infty (x^m)$ etc sequitur. Quod ut probetur, ponamus quanti ∞x^2 loco quanti

---

* In calculo cyphrarum quodvis differentiale $= 0 =$ Zero absoluto, igitur $dx = adx = dx^2 =$ mddx etc. ponitur, id quod est differentialium omnium confusio.

** Conf. Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen, von *Joh. Schulz* Kön. 1788, pag. 368, ubi auctor $\frac{4}{3}\pi\infty^3$ omnium infinitorum *maximum* omnisque magnitudinis esse *absolutum* contendit, quod omnino falsum est, quoniam non omnes tertii gradus numeri cubos proprios significant

tatem quae per factores in ſeipſos ductos $(a + b + c + d + e + f + \ldots$ in infin.$) \times (a + b + c + d + e + f + \ldots$ in inf.$) = (a + b + c + d + e + f +$ in inf.$)^2 = (\infty)^2$ producitur; quo facto ſecundum Analyſis combinatoriae regulas $\infty^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + \ldots + 2\,(ab + ac + ad + ae + af + \ldots + bc + bd + be + bf + bg + \ldots + cd + ce + cf + cg + ch + \ldots + de + df + dg + dh + di + \ldots + ef + eg + eh + ei + ek + \ldots + fg + fh + fi + \ldots$ in infinit.) naſcitur. Nunc ſubſtituamus x in locum a, b, c, d etc. quo facto ſumma $x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + \ldots + (1 + 1)\,x^2 + (1 + 1)\,x^2 + \ldots$ in infinitum, quae ſane nihil aliud eſt quam $x^2\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ in infinitum$) = \infty\, x^2$ exſtabit. Pari modo ex quanto $(a + b + c + \ldots)^3 = (\infty)^3$ ſumma $= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3 + \ldots + 3a^2\,(b + c + d + e \ldots) + 6a\,(bc + bd + be + \ldots) + 6a\,(cd + ce + cf + \ldots) + 6a\,(de + df + dg + \ldots + 6a\,(ef + eg + eh + \ldots +$ etc. in infinitum $+ 3b^2\,(a + c + d + e + \ldots) + 6b\,(cd + ce + cf + \ldots) + 6b\,(de + df + dg + \ldots) + 6b\,(ef + eg + eh + \ldots) + 6b\,(fg + fh + fi + \ldots) +$ etc. in infinitum $+ 3c^2\,(a + b + d + e + \ldots) + 6c\,(de + df + dg + \ldots) + 6c\,(ef + eg + eh + \ldots) +$ etc. etc. in infinitum $= x^3 + x^3 + x^3 + \ldots + (1 + 1 + 1)\,x^3 \ldots + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)\,x^3 + \ldots) = x^3\,(1 + 1 + 1 + \ldots$ in infin.$) = \infty x^3 = \infty^3$, ſcilicet ſubſtituendo x pro a, b, c, d etc. facile computando colligitur. Itaque non nemo, qui diligenter animum ad hanc rem reflectit, ſignificationes $\infty^{\frac{1}{4}}$, $\infty^{\frac{1}{2}}$, ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4, ∞^m, ∞^∞ etc. quae cum his $(\infty x)^{\frac{1}{4}}$, $(\infty x)^{\frac{1}{2}}$, ∞x, $(\infty x)^{2}$, $(\infty x)^3$, $(\infty)^4$, $(\infty)^m$, $(\infty x)^\infty$ commutandae ſunt, ad multiplicium, quorum factor finitus x exponente adfectus unitate vel major vel minor vel ipſa unitas eſſe poteſt,

$$x^{\frac{1}{4}}\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ in ifinitum}) = \infty\, x^{\frac{1}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots) = \infty\, x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^1\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x$$
$$x^2\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x^2$$
$$x^3\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x^3$$
$$x^4\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x^4$$
$$x^m\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x^m$$
$$x^\infty\,(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots) = \infty x^\infty \text{ etc.}$$

formam reduci poſſe lubenter ſibi perſuadebit. Qui autem multiplices ut rite poſſint comparari, dividamus quemlibet eorum in tot factores infinitos, quot ejus exponens m unitates complectitur; quo facto proportiones comparebunt ſequentes:

$$dx : dx^2 = \frac{1}{\infty x} : \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x}$$

$$dx^2 : dx^3 = \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} : \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x}$$

$$dx^3 : dx^4 = \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} : \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty x}$$

$$dx^m : dx^{m+1} = \left(\frac{1}{\infty x}\right)^m : \left(\frac{1}{\infty x}\right)^{m+1}$$

uti $dx : dx^3 = \dfrac{1}{\infty x} : \dfrac{1}{\infty x} \cdot \dfrac{1}{\infty x} \cdot \dfrac{1}{\infty x}$

. . . .

$$dx : dx^m = \frac{1}{\infty x} : \left(\frac{1}{\infty x}\right)^m \text{ etc.}$$

ex quibus pariter terminos antecedentes et conſequentes dividendo quemvis antecedentem eum quem excipit gradum innumerabiliter ſeu infinities ſuperare, ita ut ex omnibus hiſce rationibus non alius quam *rationis denominator* $= 0$, ſiquidem terminus major ſemper diviſoris locum teneat, evadere poſſit, facillime cognoſcitur.

tur. Igitur si quadam in differentiarum infinitarum functione praeter differentiale dx quanta simul infinite parva homogenea dx^2, dx^3, dx^n, ac^2dx^2, a^2bdx^3, $\frac{c^2dx^n}{4a^3}$, $5am\,dx^m$ ejusque generis alia adsunt, haec omnia eliminentur necesse est; quoniam cum differentiali dx in ratione $dx : x = \frac{1}{\infty x} : x$, cujus quotus vel denominator $= 0$ est, se exhibent, eamque ob causam differentias $dx - dx^2 = dx$, $dx - dx^3 = dx$, $dx - dx^n = dx$, $dx - \frac{c^2dx^n}{4a^3} = dx$, $dx - 5amdx^m = dx$, ergo $dx + dx^2 = dx$, $dx + \frac{c^2dx^n}{4a^3} = dx$ et in genere $dx^m + dx^{m+1} = dx^m$ praebent. Etenim primo quodvis differentiale, quod ad altiorem gradum evehitur, in eadem cum graduum inferiorum differentialibus est ratione $1 : \infty$, cujus denominator $= 0$ exstat; denique si dx^n in functione differentiali cessat, quoque mdx^n eliminetur necesse est, quoniam multiplex mdx^n summae $dx^n + dx^n + dx^n + dx^n + \ldots\ldots$ locum tenet, quae singula coram dx^{n-1} vel $x^{-1}\,dx^{n-1}$ etc. cessare oportet.

§. 7.

Quod autem differentio-differentialia d^2x, d^3x, d^4x ….. $d^m x$ adtinet, facile et cum dx et secum invicem comparari possunt ita, ut eorum vis in functionibus differentialibus definite indicetur. Ponamus igitur $x = y^n$, quo facto differentialia quae sequuntur, se habunt, scilicet $dx = ny^{n-1}\,dy$, $ddx = n(n-1)\,y^{n-2}\,dy^2$, $d^3x = n(n-1)(n-2)\,y^{n-3}\,dy^3$, $d^4x = n(n-1)(n-2)(n-3)\,y^{n-4}\,dy^4$ et in genere $d^mx = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n+1-m)\,y^{n-m}\,dy^m$,

$d^{m+1}x = n(n-1)(n-2)\ldots(n+1-m)(n-m)y^{n-m-1}dy^{m+1}$
ex quo primum rationes simplices

$$dx : d^2x = 1 : (n-1)y^{-1}dy$$
$$d^2x : d^3x = 1 : (n-2)y^{-1}dy$$
$$d^3x : d^4x = 1 : (n-3)y^{-1}dy$$
$$d^4x : d^5x = 1 : (n-4)y^{-1}dy$$
$$d^mx : d^{m+1}x = 1 : (n-m)y^{-1}dy$$

et substituendo $x^{\frac{1}{n}}$ pro y, sicut $\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}dx = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}dx$ pro dy

$$dx : d^2x = 1 : \frac{n-1}{n}x^{-\frac{1}{n}}x^{-\frac{n-1}{n}}dx = 1 : \frac{n-1}{n}x^{-1}d$$
$$d^2x : d^3x = 1 : \frac{n-2}{n}x^{-\frac{1}{n}}.x^{-\frac{n-1}{n}}dx = 1 : \frac{n-2}{n}x^{-1}d$$
$$d^3x : d^4x = 1 : \frac{n-3}{n}x^{-\frac{1}{n}}.x^{-\frac{n-1}{n}}dx = 1 : \frac{n-3}{n}x^{-1}d$$
$$d^mx : d^{m+1}x = 1 : \frac{n-m}{n}x^{-1}dx;$$

deinde rationes compositae

$$dx : d^3x = 1 : (n-1)(n-2)y^{-2}dy^2 = 1 : \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^{-2}dx^2$$
$$dx : d^4x = 1 : (n-1)\ldots(n-3)y^{-3}dy^3 = 1 : \frac{(n-1)\ldots(n-3)}{n^3}x^{-3}dx$$
$$dx : d^5x = 1 : (n-1)\ldots(n-4)y^{-4}dy^4 = 1 : \frac{(n-1)\ldots(n-4)}{n^3}x^{-4}dx$$
$$dx : d^mx = 1 : (n-1)\ldots(n+1-m)y^{-m+1}dy^{m-1} = 1 : \frac{(n-1)\ldots(n+1-m)}{n^{m-1}}x^{-m+}$$
$$dx^{m-1}$$

denique aequationes

$\frac{d^2x}{dx} = \frac{n-1}{nx}\,dx$; $\frac{d^3x}{d^2x} = \frac{n-2}{nx}\,dx$; $\frac{d^4x}{d^3x} = \frac{n-4}{nx}\,dx$;

$\frac{d^{m+1}x}{d^mx} = \frac{n-m}{nx}\,dx$, ſicut $\frac{d^3x}{dx} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{n^2\;\;x^2}\,dx^2$,

$\frac{d^4x}{dx} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{n^3x^3}\,dx^3$, $\frac{d^5x}{dx} = \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{n^4}$

$\frac{(n-4)}{x^4}\,dx^4$ et in genere $\frac{d^mx}{dx} = \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n+1-m)}{n^{m-1}\;\;x^{m-1}}\,dx^{m-1}$

naſcuntur. Ex quibus, dummodo $\frac{1}{\infty}$ in locum quanti infinite parvi dx ſubſtituatur, et rationum denominatores et differentio-differentialium inter ſe differentiae facile perſpici poſſunt; nam

aequatio $\frac{d^2x}{dx} = \frac{n-1}{nx} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{n-1}{\infty\, nx} =$

$\frac{d}{nx + nx + nx + \ldots \text{ in infinitum}}$ quotum ſeu rationis denominatorem $\frac{d}{nx} - \frac{d}{nx} = 0$, ideoque differentiam $dx - d^2x = dx$ reddit, cui ſignificatio $dx + d^2x = dx$ reſpondet. Iterum ex aequatione $\frac{d^3x}{d^2x} = \frac{n-2}{nx}\,dx = \frac{d^1}{\infty\, nx} = 0$, itaque $d^2x + d^3x = d^2x$, et in genere ex aequatione $\frac{d^{m+1}x}{d^mx} = \frac{n-m}{nx}\,dx = \frac{n-m}{\infty . nx} = \frac{u}{\infty . nx} = 0$

eamque ob cauſam ex $\frac{d^{m+1}x}{dx} = 0$ nonſolum $d^mx + d^{m+1}x = d^mx$ ſed etiam $dx + d^mx = dx$, et $dx + d^{m+1}x = dx$ atque $dx + d^{m+1}x$

$= dx$ facile ratiocinando colligitur. Quae cum ita ſint, nonſolum in calculo infiniteſimali mathematicorum eliminandi methodum optime probant, ſed etiam hujus eliminationis neceſſitatem demonſtrant.

§. 8.

Cum igitur et differentio- differentialia et differentialia quae ad gradus altiores evecta ſunt, coram differentialibus primis non minus quam haec coram quantis finitis evaneſcere jam ſatis pateat, quisque rei peritus propoſitionis generalioris, quae ſonat: *quodlibet ordinis ſuperioris differentiale coram ordinis inferioris differentiali evaneſcere*, veritatem ſine dubio perſpiciet. Quodvis enim differentiale nil eſt aliud, niſi fractura infinite decreſcens, quae gradus omnes, fracturarum finitarum modo, ſuos nonſolum finite ſed etiam innumerabiliter ſuperat. Id quod comparando gradum, qui nullo alio interveniente alterum excipit, cum hoc, qui tali modo excipitur, non nunquam intelligitur. Exempli gratia ſi $dx = d(y^n) = n y^{n-1} dy$ ponitur, $d^2x = n(n-1) y^{n-2} dy^2$ et $(d^2x)^2 = n^2 (n-1)^2 y^{2n-4} dy^4$ ponendum erit; quo facto functio differentialis $n(n-1) y^{n-2} dy^2$ quantum infinite parvum $n^2(n-1)^2 y^{2n-4} dy^4$ toties, quoties ab hocce complectitur, ſuperat. Eſt autem $dy = \frac{1}{\infty}$, itaque $n^2 (n-1)^2 y^{2n-4} dy^4 : n(n-1) y^{n-2} dy^2 =$

$$\frac{n^2(n-1)^2 y^{2n}}{(\infty y)^4} : \frac{n(n-1) y^n}{(\infty y)^2} = \frac{n(n-1) y^n}{(\infty y)^2} = n(n-1) y^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{\infty}\right)^2,$$

id quod, exponens n dummodo, uti fieri non nequit, numero finito aequalis ponatur, quantum infinite parvum d^2x, quanto infinite parvo d^2x^2, et in genere d^mx quanto $(d^mx)^p$ innumerabiliter majus efficit. Si vero (d^mx) coram dx jam evaneſcit, eo magis

$d^m x)^p$ evanescat necesse est. Porro cum ex divisione $\frac{dx^2}{d^2x} = \frac{{}^2 y^{2n-2} dy^2}{(n-1)y^{n-2} dy^2}$ quantum infinite crescens $\frac{n}{n-1} y^n = y^n (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots\ldots$ in infinitum) generetur, dx^2 differentio-differentiali d^2x, et in genere dx^m quanto infinite parvo $d^m x$ majus evadat necesse est: quam ob causam, si alterum alterumve cessare debet, siquidem ambo alius vel differentialis * vel quanti finiti ** coefficientes exstent, d^2x coram dx^2 evanescet. Nam proportio $dx^2 : d^2x = ny^n : n-1 = y^n (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots)$: 1, dummodo in $dx.dx : d^2x = dx : \frac{d^2x}{dx} = y^n (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots$ in infin.) : 1 mutetur, aequationem $\frac{d^2x}{dx} : dx = \frac{1}{y^n(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots)}$ reddit, unde quotus i. e. rationis denominator $= 0$, itaque $dx^2 - d^2x = dx^2$, eamque ob causam $dx^2 \pm d^2x = dx^2$, ergo in genere $dx^m \pm d^m x = dx^m$, atque $dx^m \pm d^{m+r}x = dx^m$ sequitur. Id quod nonsolum ex divisione $\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots \text{ in infinitum}}$, dummodo $n = 1$ ponatur, sed

* V. c. $dx^m dy$, $d^m xdy$.

** V. e. a^2bdx^2, $\frac{a^2b}{c} d^2x$ etc.

etiam ex ratione $\frac{d^2x}{dx} : dx = 0 : dx = d^2x : dx^2$, ſcilicet valorem quoti $\frac{d^2x}{dx}$ qui ſupra §. 7. jam occurrit, in dividendi diviſorisque locum ſubſtituendo ſatis apparet. Itaque in calculo infinitesimali lex generalis, omnia ſuperiorum ordinum vel graduum differentialia coram differentialibus inferioribus homogeneis, quae ab eadem functione x^n originem trahunt, quaſi coram fracturis evaneſcere majoribus, ex rationum geometricarum transformatione probatur.

§. 9.

Ex eo quod ſupra dictum eſt, facile quoque multiplicis $dx\,dy$ coram xdy et ydx vis dijudicari poterit. Eſt enim $dx\,dy = \frac{1}{\infty x} \cdot \frac{1}{\infty y} = \frac{1}{xy.\infty^2}$; contra $xdy = \frac{1}{\infty y}x$, et $ydx = \frac{1}{\infty x}y$, ergo $dx\,dy : xdy = \frac{1}{xy.\infty^2} : \frac{1}{\infty y}x$, atque $dx\,dy : ydx = \frac{1}{xy.\infty^2} : \frac{1}{\infty x}y$. Ex quo $\frac{dxdy}{xdy} = \frac{dx}{x} = \frac{1}{\infty x} = 0$, et $\frac{dxdy}{ydx} = \frac{dy}{y} = \frac{1}{\infty y} = 0$, itaque $xdy \pm dxdy = xdy$ et $ydx \pm dxdy = ydx$ facillime rationes geometricas in arithmeticas transformando concluditur. Si vero $dx\,dy + dx^m + d^nx$, vel $dx\,dy + dy^m + d^ny$ ejusque generis occurrunt ſummae, vis et graduum et differentio-differentialium coram differentiali $dx\,dy$ facile ex lege generaliore, cujus mentionem ſupra jam fecimus, determinari poterit; nec ullus quanta infinite parva dx^m, d^nx, vel dy^m, d^ny auferre haeſitabit;

quoniam, si dx^m, $d^n x$, dy^m, $d^n y$ adsunt, vel rationes $dx : dx^m$, $dx : d^n x$ vel $dy : dy^m$, $dy : d^n y$ exstant, atque tum dy tum dx non nisi *coefficientis* locum tenet, itaque vicissim quodlibet differentiale simplex vim suam originalem obtinet. Ceterum quod rationes $dx^{m+r} : d^m x$, vel $dx^m : d^{m-r} x$ adtinet, quae quidem raro occurrunt, facillime ex differentialium atque differentio-differentialium natura dijudicari, et *valores differentiarum* rationum suarum arithmeticarum determinari possunt. Nam substituendo y^n in quanti variabilis x locum $dx^m : d^{m-r} x = n^m y^{mn-m} dy : n(n-1) \ldots (n+1+r-m) y^{n+r-m} dy^{m-r}$ generabitur; quo facto, dummodo r sit numerus integer, alteriusque partis termini proportionis pariter per dy^{m-r} dividantur; $dx^m : d^{m-r} x = n^m y^{mn-m} dy^r : n(n-1) \ldots (n+1+r-m) y^{n+r-m}$, quae est ratio quanti infinite decrescentis ad quantum finitum, eamque ob causam $dx^m : d^{m-r} x = dy^r : n^{1-m}(m-1) \ldots (n+1+r-m) y^{n+r-mn} = \left(\frac{1}{\infty}\right)^r : z = \frac{1}{z.\infty^r} = 0$, itaque $d^{m-r}x - dx^m = d^{m-r}x$, atque $d^{m-r}x + dx^m = d^{m-r}x$ apparebunt. Pari quoque modo per aequationem $\frac{dx^{m+r}}{d^m x} = \frac{n^{m+r} y^{mn+nr-m-r} dy^{m+r}}{n(n-1) \ldots (n+1-m) y^{n-m} dy^m} = n^{m+r-1}(n-1)^{-1} \ldots (n+1-m) y^{n(m-1)+r(n-1)} dy^r = n^{m+r-1}(n-1)^{-1} \ldots (n+1-m) y^{n(m-1)+r(n-1)} \left(\frac{1}{\infty}\right)^r = 0$, valor differentiae rationis arithmeticae $d^m x - dx^{m+r} = d^m x$, atque $d^m x + dx^{m+r} = d^m x$ invenitur. Ex quo differentialia prima coram differentio-differentialibus nonnullis, *quae minoribus quam illa gaudent exponentibus*, eliminanda esse jam satis perspicitur. Si vero quis dubitet, annon dx^n vel $d^m x$ coram dy^{n-r} seu coram $d^{m-r} y$ evanescat, nihil

aliud animadvertendum erit, quam quod quanta infinite decrescentia dx et dy, id est $\frac{1}{\infty x}$ et $\frac{1}{\infty y}$ omnino heterogenea sint, nec invicem alia quantitate interveniente comparari possint. Quam ob rem hujus modi quanta heterogenea alterum coram altero tamdiu remanebit, donec mensura quaedam aderit, cujus ope metiri et alterum in alterius locum substituere possimus.

§. 10.

His constitutis ad notiones quasdam revertamur, quae quamquam saepius in calculo infinitesimali occurrunt, non satis tamen peritis dubias imo contradictorias videri solent.

1. Primo quod notiones ∞, 2∞, $m\infty$, $\frac{1}{2}\infty$, $\frac{1}{n}\infty$, ∞^2, ∞^3, ∞^4, ∞^5, ∞^m, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, $\infty^{\frac{1}{n}}$ etc. attinet, omnes fere calculi infinitesimalis periti omnino diversas esse contendunt.* Id quod facili negotio dijudicari potest, dummodo summam ($+1+1+1+\ldots$ in infinitum) in signi ∞ locum substitui signumque ∞ cujuslibet quantitatis x coefficientis infinite crescentis locum tenere posse meminerimus;** quo facto $\infty = \infty x = x\,(1+1+1+\ldots$ in infin.); $2\infty = 2x.\infty = 2x\,(1+1+1+\ldots$ in infin.); $\frac{1}{2}\infty = \frac{1}{2}x.\infty = \frac{1}{2}x\,(1+1+1+\ldots$ in infinit.); $\frac{1}{n}\infty = \frac{1}{n}x.\infty = \frac{1}{n}x\,(1+1+1+\ldots$ in infinit.); itaque $\infty^2 = x^2.\infty = x^2\,(1+1+1+\ldots$ in infinit.); $\infty^m = x^m.\infty = x^m\,(1+1+1+1+\ldots$ in infinit.); $\infty^{\frac{1}{n}} = \infty\,(\sqrt[n]{x}) = x^{\frac{1}{n}}\,(1+1+1+1+\ldots$ in infinit.) etc. ponen-

* Leipz. Magaz. für reine u. ang. Math. St. III. S. 420. 1786.
** Conf. §. 6.

ponendum erit. Quorum veritas ut ſatis appareat non niſi unum quid animadvertendum eſt, quemque ſcilicet numerum infinitum, v. c. $2 + 2 + 2 + \ldots$ etc. etc. quotcunque gradus aſcendat, uti $(2 + 2 + 2 + \ldots \text{etc.})^2 = 4 + 4 + 4 + 4 + \ldots$ in infinit. $+ 8 + 8 + 8 + \ldots$ in infinit. $+ 4 + 4 + 4 + \ldots$ etc. in infinit., in ſeriem $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ in infinitum, quae praecedentis aèquât ſummam, diſſolvi poſſe. Eſt autem $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ in infinit.$)^m$ nil niſi $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ in infinitum; ideoque cum $\sqrt{\infty} = \sqrt[3]{\infty} = \sqrt[m]{\infty}$, et $\infty^2 = \infty^3 = \infty^4$ etc. atque $(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ in infinitum$)$ et ∞ aequales ſint, ſignificatio quidem ∞^m *per ſe ſpectata* nihil aliud eſt quam ∞; ac res omnino ſic ſe habet, ut *unitatis* vel aſcenſus ad gradus altiores, vel reductio ad radicem, quibus *nihil aliud quam unitas ipſa* effici poteſt. Nihilominus tamen, dum circa factorem ∞ verſamur, graduum diverſorum hujus quanti infiniti aeque ac unitatis exponentes nullo in computo negligere licet, ne argumentationes in calculo falſiſſimas concludantur; id quod facillime perſpicietur, dummodo ad formulas trigonometriae analyticae * aliarumque diſciplinarum mathematicarum reſpiciamus. Praeterea ſignificationes ∞, $\frac{1}{n}\infty$, ∞^m, $\infty^{\frac{m}{n}}$ etc. non per ſe, ſed

* V. c. $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2 = 1^2 - (\sin x)^2 = r^2 - (\sin x)^2$; pariter ſi α quibusdam in formulis integralibus $= -1$ ponendum eſt, $\alpha^2 \int x\, dx = + \int x\, dx$ $\alpha^3 \int x\, dx$ vero $= - \int x\, dx$ erit etc.

ut quantorum finitorum x, y, z coefficientes ſpectatas, re vera a ſe invicem abhorrere, quisque facile intelliget. Fingamus enim lineas infinite creſcentes duas, ita ut altera in quolibet momento temporis incrementum $\frac{1}{2}$ x, altera vero incrementum x capiat; quod cum fiat, prior ad ſpatium eundem finitum excedendum, duplo temporis, quod poſterior eumdem in finem conſumit, quanto egebit. Itaque harum incrementa quoad ſpatium in ratione $\frac{1}{2} : 1$, vel quoad tempus in ratione inverſa, $1 : \frac{1}{2}$ erunt. Cum vero incrementorum quantitas omnino menſuram, qua partim lineas metiri poſſumus infinitas, praebeat, quanta $\frac{1}{2}$ x. ∞ et x. ∞ in ratione $\frac{1}{2} : 1$, itaque ∞ et ∞^m, ſcilicet ∞x et ∞x^m in ratione $x : x^m$ ſint, atque quantum unum ∞x^m alterum ∞x, quatenus ambo non ut perfecta ſed ut infinite *incrementa diverſa* capientia cogitantur, in omne tempus ſuperet neceſſe eſt. Quare nulla involvitur contradictio, ſi mathematici diſcrimen inter ſignificationes $\frac{1}{n}\infty$, ∞, $m\infty$, ∞^m, $\infty^{\frac{1}{n}}$ etc. quoad eorum vim et valorem eſſe contendunt, ſiquidem hae ſignificationes non per ſe, id eſt ut ($1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ in infinit.) ſed ut quantorum finitorum quorumdam, unitate majorum, coefficientes ſpectentur. Ex quo

2. deinde ſequitur, omnes in errore verſari, qui quanta infinita ad gradum altiorem quam tertium evehi non poſſe contendunt. Nam ∞^{3+r} nil eſt aliud quam $\infty x^{3+r} = x^{3+r}(1+1+1+1+$

. . . . in infinitum) atque id, quod dicunt, numerorum infini-
orum gradum tertium jam totum implere ſpatium infinitum, non
equitur; quoniam permulti multiplices, imo qui factores tres et
lures continent, exempli gratia cotangens duplex, quae coeffi-
iente 2, atque coſinu et coſecante factoribus efficitur, neque
ubum neque quadratum ſed ſolam lineam conſtituunt. Haec au-
em res hoc loco mittenda eſt, *quoniam vir illuſtris A. G. Kaeſt-
er* eam in geometriae ſuae propoſitione 66 fuſius tractavit. De-
ique

. 3. quod differentialium atque differentio- differentialium na-
uram adtinet, hic iterum enuntiamus, *vera eſſe quanta*, ſcili-
et fracturae, quae a numeris finitis incipiunt, ſed per fluxum in-
icis continuum ita mutantur, ut praeter Zero quotum id eſt ra-
onis geometricae denominatorem alium reddere non poſſint,
e quo, ut ſupra jam evidenter demonſtratum eſt, cum rationis
rithmeticae qualitas, tum differentiae $x - dx = x$ etc. vis et valor
endet. Nam in hoc ſtatu x vim quanti infinite creſcentis habet,
uoniam fractura $\frac{1}{x}$ infinite decreſcit itaque infinities ſuperatur;
ntra ea dx quanti finiti locum tenet (vel tenere fingitur): quam
o caufam differentia *infinita* atque infinito quanto x aequalis
adat neceſſe eſt. Quod quidem per ſolam lineae infinite cre-
entis contemplationem, quae revera quamvis in exordio quan-
m aliquod finitum amittens, infinita tamen eſſe non deſinit, nec

praeter locum puncti incipientis nihil mutat, rite probari posset, nisi calculus ipse differentiam $x - dx = x$ cum summa $x + dx = x$ etc. ob quotum vel rationis denominatorem $\frac{dx}{x} = 0$ *extorqueret.* Itaque si qui sunt, qui calculi infinitesimalis fundamentum in eliminatione differentialium coram quantis finitis etc. ponere velint, satis persuasi erunt, non eam ob causam, quod omnia, tum differentialia tum differentio-differentialia nihila sint absoluta, sed *propter unicum quotum vel rationis geometricae denominatorem* $\frac{dx}{x} = 0$ etc. *eliminationes locum habere*, easque neutiquam arbitrarias esse, sed eadem legum arithmeticarum necessitudine niti, quae radicem $\sqrt[2n]{-a}$ quantum impossibile et multiplicem $-b \times -b = -\sqrt[2n]{a} \times -\sqrt[2n]{a} = + b^2 = + a$ esse jubet.

§. 11.

Reliquum esset ut eos refutemus, qui reducendo calculum infinitesimalem vel ad exhaustionis Archimedicae methodum ve ad propositiones mere geometricas optime mathesi prospecturos imo stirpem quasi de stolone liberaturos esse putant. Cum autem nemo sane hanc opinionem fovebit perperam, nisi discrimen inte analysin finitorum et calculum infinitesimalem nesciat; originem tantum hujus algorithmi veram in mentem revocare liceat, i quod ad probandum *infiniti* et nomen et methodum sufficie Quare notandum est primum, calculum infinitesimalem inprim

d metiendas lineas curvas quaeque ad eas referenda ſunt, nec ion ad rem analyticam tangentium ſpectare. Quae quidem, ut aihi videtur, primum calculi differentialis anſam dederunt.* Res utem linearum curvarum tota in eo vertitur, ut arcus cujusdam artes lineolae rectae haberi poſſint; id quod fieri nequit, ſi curva rel ejus arcus in partes quasdam numerabiles, v. c. circuli circuius, ad finiendum diametri circuitusque rationem, in latera recta 96, 192, 384, 768, 1536 dividitur. Nam quousque progrediamur, dummodo diviſio ſit finita, vel inſitionem habeat, uti in exhauſtionis methodo *applicata*, arcuum et chordarum congruentiam non adtingemus, niſi diviſio modum excedat omnem, id eſt continue fluat, vel fracturam, cujus valor continue diminuitur, proferat. Quod ſi fit, arcus et fracturae ratio ipſa fluit, eique eſt conditio talis, ut in algorithmi vulgaris proportionibus ad ratiocinandum adhiberi nequeat, niſi calculi infiniteſimalis methodus interveniat, et ſubſtituendo mutationis formam ſtabilem in quanti variabilis locum, inſitionem rationum proportionis necessariam revocet. Quae quidem res exhauſtionis methodo omnino eſt aliena, quoniam haec rationes fluentes evitare omnes coacta, alicubi in dividendo ſubſiſtit, et propoſitionibus, quae neutiquam axiomata vocari merent,** innitens, ſeveritati geometri-

* Conf. *Leibnitii* oper. omn. ſtudio. *Dutens* editor. Tom. III. pag. 116. ſeq.

** Vid. Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie etc. von *A. G. Kaeſtner*; Geom. 43 Satz, 4 Zuſatz; porro: Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wicht. math. Theor. von *J. Schulz* etc. pag. 227.

cae satisfacere simulat. Vt autem paucis verbis determinetur, an calculo infinitesimali possint carere nec ne, nunc demum nihil nisi ad quaestionem respondendum erit, utrum neque in calculo neque in ceteris matheseos disciplinis rationes fluentes id est continuo variabiles occurrant? Nam omnes hae, si quae sint, rationes, alium quam calculum poscunt inferiorem, qui quidem non nisi circa rationes constantes versatur. Est autem earum tanta multitudo, dummodo ad phoronomiam inprimisque ad motum qui lapsu fertur libero respectum habeamus, ut neque mechanica sublimior terrestris neque coelestis vel astronomia physica perfici potuisset, si algorithmo algebraico non ampliorem philosophi novissent. Ex quo sequitur, calculum infinitesimalem non solum ratiocinandi methodum supervacaneam non esse, sed etiam ab ulla, quae argumentis melioribus certioribusque niti simulat, nunquam alia summotum iri.

Emendanda.

ag 5. verſu 8, loco *teminum* legatur *terminum*.

ag. 10. v. 13, l. $\dfrac{(b+2)\left(\frac{bn}{b+2} - (1+b+2\right.}{b+2}$ leg.

$$\frac{(b+2)\left(\frac{bn}{b+2} - 1\right)+b+2}{b+2}.$$

g, 18. v. 7, l. $(n-m)y^{1-}dy$ leg. $(n-m)\,y^{-1}dy$.

bid. v. 12, l. $\frac{n-m}{n}x^{1-}dx$ leg. $\frac{n-m}{n}x^{-1}dx$.

De
Calculi Infinitesimalis
argumento mere analytico.
Pars prior,
quae methodos differentialium et eruendorum et eliminandorum praecipuas examinat, atque inter has functionum analyticarum theoriae dat principatum.

Dissertatio mathematica,
quam auctoritate
Amplissimi Philosophorum Ordinis
pro receptione in eundem
publice defendet auctor

Ernestus Fridericus Wrede
Pomeranus,
Philos. Doct. et Lib. Art. Mag. Math. P. O. nec non Societatis Scrutatorum Berolinensis, Societatis Oeconomicae Potsdamiensis, Societatis Medicinalis Parisiensis sodalis atque Societatis Literarum German. Regiomontanae sodalis honorarius:

Respondente
Christiano Friderico Lentz, Pomerano
Theolog. Cand.
Contra Opponentes
Carolum Leopoldum Büttner, Regiomontanum
Theolog. Cand.
Carolum Guilielmum Schaedlich, Regiomontanum
Theolog. Cand.
Anno MDCCCVIII. Die 5 Septemb.
Horis locoque solitis.

Regiomonti,
Literis Hartungianis.

tiplicari nec dividi, nec ad gradum quemdam deſideratum evehi poteſt. Alii contra differentialia quantitates eſſe haud negant, eaque omni dabili minora contendunt. Illi quidem quaeſtioni, cur differentialia non ſemper numeros, quibus factorum nomine alligantur, finitos auferunt, id quod in quolibet caculo per Zero abſolutum fiat neceſſe eſt, minime ſatisfaciunt; hi vero, qui x + dx = x etc., licet quantitatis dx major quam Zero exſtiterit valor, iterumque ddx vel d^n x minus adhuc quam dx eſſe contendunt, quamvis jam dx minus omni dabili ſumſerunt, itaque ſimul negant quod ajunt, in contradictionibus verſari videntur. Igitur an hi vel illi ab omnis matheſeos axiomatibus et calculi generalis propoſitionibus fundamentalibus magis recedant, hoc loco breviter dijudicandum erit.

§. 6.

I. Jam incipiamus a methodo eorum, qui quidem differentialia quantitates eſſe veras contendunt, in partes autem diverſas diſcedunt.

1. Methodus rationum primarum et ultimarum, qua vir praeclariſſimus J. *Newton* in libro ſuo, cui nomen eſt Principiorum, uſus eſt, quaeque in lege continuitatis *, qua corpora resque mutabiles adſtrictae ſunt, et in facultate quanta infinite dividendi

* Traité du calcul differentiel et du calcul integral par S. F. *Lacroix* praefat. in verſione Grüſoniana pag. XXXIV. Confer. quoque Reflexions ſur la metaphyſique du Calc. inf. par M. *Carnot.*

nititur, quasi aetate major primum locum tenebit. Ad quam illustrandam curva quaedam, ut ellipsis, cujus axis major $=$ a, parameter $=$ p, et abscissa $=$ x est, optime inserviet. Quod cum ita sit, omnino dupliciter ejus ordinata y $=$ o erit, primum si abscissa x $=$ o, dein x $=$ a ponitur. Est enim $y = \sqrt{(px - \frac{px^2}{a})}$, ex quo, scilicet substituendo vel x $=$ o, vel x $=$ a, utique y $=$ o sequitur. Cum autem nil per saltum fieri possit, et omnis quantitas variabilis lege continuitatis vel crescere vel decrescere oporteat, duo rationis linearum coordinatarum x et y vel incipientis, vel desinentis erunt status, in quibus *nullum* quidem *discrimen definitum* inter abscissam et axem majorem, nihilominus tamen abscissae x ad ordinatam y *ratio vera* exstabit. Quod quidem discrimen, cum hisce conditionibus metiri nullo possimus modo, indiscernibile est. Itaque si abscissa nondum extensive comparabilis, id est ad comparationem alicujus mensurae neutiquam apta, charactere *d*x signatur, differentia a — *d*x non finienda erit. Tali quoque modo rationis x : y desinentis ultimus erit status, in quo neque *d*x neque y revera metiri, id est definite exprimi potest, ita ut ultimum minimumve incrementum *d*x, quod lege continuitatis adstrictum abscissam x axi majori a aequalem reddit, iterum prorsus *indiscernibile*, et nulla cum mensura, quaecunque adhibeatur, comparabile, nullam quoque differentiam a — x *finitam* efficiat. Itaque differentia definite non enuntianda a — x, *quoad calculi operationes* $=$ o, id est a $=$ x, eamque ob causam x + *dx* $=$ a $=$ x ponenda erit. Primum enim *d*x est *complementum* immense parvum, quod variabili x facultatem dat, cum axe a congruendi, quam ob causam x + *dx* $=$ a sit necesse est; deinde differen-

$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$, $\frac{x^n - x^n}{x - x} = \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$, ergo $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(x^3) = 3x^2 dx$, et in genere $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$ erit, id quod ſine dubio cum algorithmi infiniteſimalis differentialibus congruit.

§. 10.

2. Ab hac, cujus mentionem fecimus, methodus, qua nuper Gallus quidam, cui nomen erat *Ensheim*,* ſicut quondam Anglicus non obſcurus, cognomine *Landen*, ſimiliter uſus eſt, parum differt. Sit enim m numerus et poſitivus et integer, $\frac{y^m - 1}{y - 1} = y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots y^{m-m}$ erit, et aequationis pars altera non minus quam m terminos habebit. Quam ob rem, ſiquidem $y = 1$ ponatur, ex ſerie $y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + 1$, ob terminorum numerum m, ſumma $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = m$ colligetur. Hujus propoſitionis ope, dummodo dy per $\dot{y}(\dot{y} - 1)$ et $d(y^m)$ per $\dot{y}^m(\dot{y}^m - 1)$ ſignificari liceat, functio $\frac{d(y^m)}{dy} = \frac{y^m(y^m - 1)}{y(y - 1)} = \frac{y^m}{y} \times \frac{(y^m - 1)}{(y - 1)}$ in ſeriem $\frac{y^m}{y}(y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots + y + 1)$ mutari poteſt. Quo facto, ſi $\dot{y} = 1$ ponitur, $\frac{y^m(y^m - 1)}{y(y - 1)} = y^{m-1}(m)$ id eſt $\frac{d(y^m)}{dy} = my^{m-1}$,

* Recherches ſur le calcul differentiel et integral par le citoyen *Ensheim*. a Paris an VII. 4.

itaque $d\,(y^m) = my^{m-1}\,dy$ erit; quod quidem differentiale per calculum ipsum infinitesimalem inveniri non nequit.

§. 11.

Nullam sane adferret utilitatem, si praeter has, quarum jam facta est mentio, alias adhuc algorithmi differentialis principia deducendi methodos, quarum permultae inveniri possunt, enumerare vellem. Quam ob rem id quod alterius auctores in altera reprehendunt, breviter exponam.

1. Ji, qui calculi infinitesimalis principium ex ratione o : o deducere conati sunt, nonsolum methodum rationum primarum et ultimarum, sed etiam limitum et functionum analyticarum, quemadmodum a viris praeclaris *Lagrange* et *Lacroix* adhibita est, vituperant. Contendunt enim, contradictionem involvere, si differentialia quantitates habeantur verae, nihilominus tamen quantitates finitae nec augeri nec diminui per eas queant. Quam contradictionem viri *Lagrange* et *Lacroix* dum evitare voluerint, illis neutiquam satisfecerunt; nam alterum differerentialium loco methodo exhaustionis Archimedica, spuriis nitente axiomatibus, usum esse,* alterum vero nonnullorum mathematicorum modo **

---

* Sehr leichte und kurze Entw. etc. auct. Jo. *Schulzio*. pag. 227. seq.

** Eodem loco. pag. 214 et 215.

usque ad rationem ſpecioſam $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} dx + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} dx^2 + \ldots$ etc. progredi videatur, ut jure ſeriei terminos, qui primum nx^{n-1} ſequuntur abjicere poſſit (§. 7.), et hujus operationis *neceſſitas* minime patet; nihilominus tamen calculo cyphrarum longe potior eſt, quoniam argumentum calculi differentialis non ex ratione omnino vana o : o, ſed ex calculo differentiarum ducit, qui ſolus fuit algorithmi differentialis principium unicum atque verum. Huc reſpiciens inprimis laudanda eſt omnibus, qui diligunt analyſin infinitorum, functionum analyticarum theoria, qua vir illuſtriſſimus *Lacroix* in docendo calculum infiniteſimalem uſus eſt. Nam quamvis non ſatis peritis ea, quae ſcripſit in libro ſuo, cui nomen eſt; Traité du calcul differentiel et du calcul integral etc. (Pariſ. 1797. 4) non ſufficere videantur, ad intelligendum argumentum eliminandi differentialia, quae non ſunt ejusdem infimi ordinis ſimul cum eorum coefficientibus; provectioribus tamen ejusmodi quantitates ſemper abeſſe vel abjici poſſe ſatis apparebit, quoniam calculi infiniteſimalis in proportionibus quantitatis variabilis locum ſignificatio ſeu formula legis variationis tenet, ex qua, ſi quartus eſt numerus proportionalis, functio ipſa, id eſt quantitas quaeſita variabilis colligitur. Quae quidem functio ut inveniatur, non opus eſt differentia differentiationis tota, ſed primo tantum ejus termino,

quem ſupra *characteriſticum* appellavimus. Id quod quisque, qui diligenter calculum didicit differentiarum, facile perſpiciet, eamque ob cauſam mathematicorum eliminandi quantitates quasdam conſuetudinem non objurgabit, dummodo hoc ac computum decurtandum et neceſſe et utile eſſe ſibi perſuadere poſſit. Oſtendemus autem hujus diſſertationis in parte quae ſequetur altera, hanc mathematicorum operationem neutiquam eſſe *conſuetudinem arbitrariam* ſed *legem calculi neceſſariam*, quae ex ipſis algorithmi et principiis et operationibus generalioribus originem trahit.

Emendanda.

Pag. 4. Verſu 1, loco: perſuaſerunt legatur: perſuaſerint.

Pag. 8. V. 19, l. putant leg. putent.

Pag. 14. v. 6, l. $ndx\ (x + dx)^{n-1}$ leg. $ndx\ (x + dx)^{n-1} - nx^{n-1}$ $dx = \ldots$ etc.

Pag. 15. v. 22, l. conantur leg. conentur.

ſignificationem differentialium in conſenſione ſola et in arbitraria conſuetudine* poſuiſſe dicunt.

2. Contra ipſi, qui calculum differentialem in ratione o : o nixum putant, minime rem ab omni contradictione vindicaverunt. Nam α opinionem quod adtinet eorum, qui ſignis o : o vim et valorem diverſum tribuendo legibus calculi omnimodo ſatisfeciſſe ſibi perſuaſerunt, in errore verſantur, quippe qui per rationem o : o aliquid ſignificent, quod *comparari* poteſt, quoniam $\frac{o}{o} = \frac{m}{n}$ id eſt fracturae vel verae vel ſpuriae aequale eſſe debet, eamque ob cauſam, quamquam non aperte, occulte tamen quantitatis nomine gaudet. Igitur ratio o : o a ratione $x : x^1$ vel x : y vel 1 : n. 1 etc. neutiquam abhorret, et ſane diſcrimen eſt fallax, quod inter o : o et m. 1 : n. 1 fingunt. Si vero o et o ſunt quantitates, uti dx et dy, quaeſtio reſtat eadem, quo jure ſcilicet $x + dx = x$, $y + dy = y$ etc. ponere poſſimus:

β. De ceteris, qui calculum infiniteſimalem ex ratione o : o id eſt nihili abſoluti ad nihilum deducere volunt, nonſolum eadem valet conſequentia, ſed magis etiam ſunt reprehendendi, quippe qui matheſis totius operationem principalem non aliam quam deductionem rationum omnium ex ratione generaliſſima o : o, id eſt nihili abſoluti ad nihil, eſſe contendant.** Omnes enim ſi

* Traité du calcul differentiel et du calcul integral par S. F. *Lacroix*, à Paris an V. chap. I. 9. (in 4to.)

** Joh. *Schulz* ſehr leichte und kurze Entwickelung etc. pag. 217.

rationes et formulas generales ex o : o deducere velint, ratio o : o principium nonsolum calculi sed etiam omnis geometriae sit necesse esset. Nemo autem, quotiescunque mentem ad considerandam rationem o : o reflectat, quidquam ex ea colliget, quoniam et $\frac{o}{o}$, et $o \times o$, et $o \div o$, et $o - o$, et o^n et $o^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{o}$ nil nisi $= o$ esse potest. Quae calculi quidem operationes, dum analysis et finitorum et infinitorum naturam conficiunt, considerationem rationis o : o vanam et inanem esse, et in calculo quoque nil ex nihilo fieri posse, satis probant. Subest igitur fraus et petitio principii, si quis, quem nihili seu Zero absoluti et additionem et subtractionem et multiplicationem et divisionem omnino vanam esse non praeterit, eo quem nonnullis in libris* invenimus modo, ex ratione o : o, cujus terminis in mente numeri praefiguntur diversi, ** quantitatem finitam deducere velit. Quaerendum enim est, quam ob rem *numeri praefixi* ad colligenda ea, quae non nisi calculi inveniri possunt infinitesimalis ope, *soli* non sufficiunt; et quale tunc interest discrimen inter calculum vulgarem et sublimiorem, quum rationes 1. o : 2. o et 1 : 2, m. o : n. o et m : n eaedem sint necesse esset, siquidem signum o nullam vel augendi vel diminuendi vel auferendi vim habeat. Quod quidem dum contendunt, contradictionibus, quas evitare arbitrabantur, vel maximis ipsi obviam veniunt; nam primum ex propositionibus*** o = o,

* Ibidem pag. 197. §. 23.

** Eodem loco pag. 209. 218; item, Anfangsgr. der reinen Mechanik etc. von Joh. *Schulz* Königsb. 1804; pag. 123.

*** Sehr leichte und kurze Entwick. etc. von Joh. *Schulz* pag. 196.

tia a — x ob exiguitatem incrementorum continuorum omnem elabitur menſuram, quare abſciſſa x non jam ab axe a diſcerni itaque a — x = o poni poterit; denique ex a — x = o facillime a = x = x + *d*x argumentando concluditur. Cum autem quaevis ratio, cujus continuo pariter termini creſcunt vel decreſcunt, ultima id eſt *d*x: *d*y haberi poſſit, ubique differentia *immenſe* parva a — x = o cogitari, ideoque x + *d*x = a = x poni poteſt. Quod ſi fiat, *nullus valor* quantitatis *d*x indicandus vel effabilis erit, ideoque *in computando* coram quantitatibus a et x res eſt nullius momenti. Nihilominus tamen ratio *d*x : *d*y eamdem habet vim, ac x : y, quoniam x et y cum incipientes tum deſinentes nil ſunt, niſi *d*x et *d*y, quorum in locum cyphrae alligatae $\frac{o}{o}$, ut ſignum rationis incipientis et deſinentis ſubſtitui ſolent. Ex quo demum argumentando concludunt, quantitates quidem *d*x et *d*y quanta nonſolum conſtantia ſed etiam variabilia finita, et multiplicando et dividendo mutare, id eſt vel diminuere, vel amplificare, non autem addendo augere, vel ſubtrahendo diminuere poſſe, ita ut *diſcernibilis* aut *definita* quaedam differentia, vel quantitas *menſuram admittens* exſtaret. Quare factores quidem *d*x, *d*y etc. in calculo retinent, addenda vero hujus generis et ſubtrahenda mittunt. Ceterum terminos in aequationibus diverſorum ordinum differentialibus affectos quod adtinet, pariter ac methodi ſequentis adſeclae in eliminando agunt.

§. 7.

2. Methodus limitum, qua primus inter omnes vir praeclarus *d'Alembert* uſus eſt, quaeque haud multum a ſuperiore ab-

horret, plurimorum recentiorum imo illustrissimorum Analystarum adsensum tulit. *Limitis* autem tribuit nomen cuilibet quantitati, quam altera vel crescens vel decrescens aequare nedum excedere nequit, quamquam fieri potest, ut ei paullatim approximet. Ita, ut hoc memorem, numerus 2 limes est seriei infinite crescentis $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, quem nunquam aequabit, id quod ex divisione $\frac{2}{2-1}$ satis apparet. Pari modo quaevis functio x nonsolum per seriem infinitam exprimi sed etiam, vel incrementis vel decrementis captis, ita mutari potest, ut quantitatem quamdam quae mutationis limes appellatur, excedere nequeat. Fingamus enim functionem $x = y$, quo facto, si x in $x + k$ mutatur, ex methodo coefficientium indeterminatarum $x + k = y + p\,k + q\,k^2 + r\,k^3$ etc. duarum vero x et $x + k$ conditionum differentia $u = p\,k + q\,k^2 + r\,k^3$ etc. erit. Ex quo sequitur $\frac{u}{k} = p + q\,k + r\,k^2 + \ldots$; et positis u et $k = 0$, pars altera quidem hujus aequationis evanescit, alterius vero terminus p, ut functionis x mutandae et rationis $\frac{u}{k} = \frac{0}{0}$ limes remanet. Si denuo p sumitur functio variabilis x, et haec iterum in $x + k$ mutatur, $x + k$ erit $p + p^1 k + q^1 k^2 + r^1 k^3 + \ldots$ et differentia $u^1 = p^1\,k + q^1 k^2 + r^1\,k^3 + \ldots$ itaque rationis $\frac{u^1}{k} = \frac{0}{0}$ limes $= p^1$ exsistet. Jam perspiciendum est, quantitates p et p^1 in coefficientium differentialium $n x^{n-1}$ et $n\,(n-1)\,x^{n-2}$ locum substitui posse; quo facto aequationes differentiales cujusvis ordinis v. c. $dy = n x^{n-1}\,dx +$

§. 1.

Quamquam inter omnes, qui Mathesi diligenter occubuerunt satis constat, calculi infinitesimalis fundamentum in *calculo differentiarum** (Differenzen-Rechnung) cui nomen quoque theoriae functionum interdum fuit analyticarum**, positum esse; tamen permulti fuere, qui mathesis sublimioris rem analyticam non nisi meditatione supervacanea sensus vocabuli *infiniti*, et quasi metaphysica calculi infinitesimalis quadam, de contradictionibus positis

* Vid. 1) G. G. *Leibnitius* ad Abbat. *Contium*, in op. omn. Tom. III. pag. XXXVI. Colon. Allobrog. 1789.

2) Methodus incrementorum directa et inversa, auctore Brook *Taylore*. Lond. 1715.

3) Methodus differentialis etc. auct. Jacobo *Stirling*. Lond. 1730.

4) Leonh. *Euleri* institut. calc. infin. Ticini 1787. 4.

5) Traité de Calcul differ. et integr. de M. *Bossut*. à Par. an VI.

** Theorie des fonctions analytiques etc. par. J. L. *Lagrange*. Paris an V. (germanice translata Berol. 1798.)

vindicari posse sibi persuaserunt. Sed nemini fere, quam sibi ipsi quisque eorum satisfecisse videtur, quoniam alter alterum reprehendit, dum eum vel acumina, quae propositionum mere mathematicarum locum tenent, vel difficultates et tenebras, quae per enodationem ipsam perperam, et per finitiones notionum valde ambiguas theorematibus calculi infinitesimalis primis obductae sunt, protulisse fatur. Equidem credo, calculo infinitesimali non opus esse metaphysica alienigena, ad probandum sibi nomen esse omnino congruum, seque non nisi ex propositionibus pure mathematicis evidentissimisque originem trahere. Sufficient enim algorithmus generalis ipse, ejusque axiomata, ad methodi calculi infinitesimalis veritatem enucleandam, siquidem eo, quo *Leibnitius* illustrissimus ejus auctor usus est modo indagetur. Id quod hoc in libello fusius demonstrare conatus ero.

§. 2.

Calculi infinitesimalis naturam et usum quod adtinet, a ceteris algorithmi algebraici operationibus perpaucis tantum in rebus abhorrere nemo nescit. Nam si excipis methodum terminos quosdam in aequationibns differentialibus eliminandi, vel quasi inutiles abjiciendi, nihil in eo nobis occurrit, quod in algorithmo algebraico non inveniamus. Scilicet proportiones vel ex rationibus aequalibus vel ex factoribus divisis, quorum multiplices invicem substitui possunt, facimus; inde aequationes et varias per substitutiones formulae generales deducuntur. Ex quo facile perspici potest, calculum infinitesimalem, quamvis præsertim ad ea quæ circa quantitates variabiles versantur problemata spectat, ibi nihilominus

tamen adhiberi posse, ubi calculo inferiore utimur, siquidem rationibus aut proportionibus aequationibusve quantitates variabiles insint. Quam ob rem calculus infinitesimalis nonsolum theoriae curvarum, sicut mechanicae sublimiori et astronomiae, porro physicae generali et ipsi, ut rei satis periti jamdudum non frustra tentaverunt, chemiae, sed etiam, si placet, geometriae elementari optime inservit. Nam omnia hujus disciplinae theoremata nonsolum per analysin finitorum sed etiam infinitorum enucleari possunt. Id quod perpauca quae sequuntur exempla illustrabunt.

§. 3.

Dato triangulo rectiangulo A, cujus altitudo $= a$, basis $= b$, pars altitudinis desuper abscissa $= x$ ejusque ordinata $= y$, ita ut $a : b = x : y$ sit; incrementa infinite parva dx et dy itidem erunt proportionalia. Quam ob rem trapezii, cujus altitudo $= dx$ et basis $= y + dy$ est, area duobus factoribus $dx\ (y + dy) = ydx + dx\ dy$ efficitur. Cum autem quantitas infinities infinite parva $dx\ dy$ coram facto ydx evanescat, trianguli A non aliud elementum quam ydx remanet. Ex proportione $a : b = x : y$ non solum $\frac{b}{a}\ xdx = ydx$ sed etiam $\int ydx = \frac{bx^2}{2a}$ sequitur. Quæ quidem formula generalis et ad inveniendum quodlibet segmentum vel $\frac{1}{2}\,xy$, vel $\frac{1}{2}\ (a-x)\ (b + y)$ et ad dividendum triangulum A in partes complures a vertice incipientes vel aequales vel parallelas inserviet. Cum vero $x = a$ ponatur, $\frac{bx^2}{2a} = \frac{1}{2}\ ab$ producitur;

id quod etiam geometria elementaris ad metiendum aream triangulorum proponit. Ceterum formula $\frac{bx^2}{2a}$ eſt generaliſſima, quoniam quodvis triangulum ſcalenum in duo rectiangula dividi poteſt.

Itidem calculi infiniteſimalis ope trapezii, triangulo rectiangulo incluſi ejusque baſi inſiſtentis, aream metiemur. Ponamus enim latus hujus trapezii ſuperum $= y$, altitudinem $= a - x$, et baſin $= b$; quo facto $d\,(a-x) = -dx$, itaque $-dx\,(y+dy) = -ydx$ trapezii elementum erit. Fuit autem ſupra $ydx = \frac{bx}{a}dx$ quam ob rem $-ydx = -\frac{bx}{a}dx$ et $\int -ydx = C - \frac{bx^2}{2a}$ ſit neceſſe eſt. Ad inveniendum conſtantis C valorem aream $= 0$ ponamus, quoniam nunc quoque $a - x = 0$, ergo $x = a$ erit. Subſtituendo $C - \frac{bx^2}{2a} = C - \frac{1}{2}ab$, et ponendo hanc aequationem $= 0$, ex $C - \frac{1}{2}ab = 0$ conſtantis C valor $= \frac{1}{2}ab$, itaque integrale plenum $\int -ydx = \frac{1}{2}ab - \frac{bx^2}{2a} = \frac{a^2b - bx^2}{2a}$ ſequitur.

Si hujus generis trapezium extra triangulum rectiangulum daretur, nonſolum latus a ſed etiam abſciſſa x innota eſſet; quae quidem ex ratione ambarum baſium, ſcilicet $b > y$, ad datam differentiam $u = a - x$, deduci poſſent. Nam ex proportione $b - y : b = a - x : a$, i. e. $b - y : b = u : a$, in genere $\frac{bu}{b-y} = a$ et $\frac{bu}{b-y} - u = \frac{uy}{b-y} = x$ facillime concluderetur, quoniam u, ſeu

$\frac{n(n-1)}{1.\ 2.} x^{n-2}\, dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}\, dx^3 + \ldots\ldots$ porro

$ddy = n(n-1)\, x^{n-2}\, dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2} x^{n-3}\, dx^3 + \text{etc.}$

etc. in conspectum venient, ex quibus rationum differentialium $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{0}{0}$ limites nx^{n-1} et $n(n-1)\, x^{n-2}$ itaque formulae differentiales $dy = nx^{n-1}\, dx$, $ddy = n(n-1)\, x^{n-2}\, dx^2$ etc. generabuntur, quae finem quasi determinant, quousque functionis x mutatio progredi potest. Denique dicunt, differentiationem quantitatum variabilium ad nihil aliud, nisi ad mutationis limitem quaerendum spectare; quam ob causam calculi infinitesimalis rei analyticae methodum limitum omnimodo satisfacere contendunt.

§. 8.

3. Methodus functionum analyticarum, qua inprimis vir praeclarus *Lagrange* ad inveniendum calculi infinitesimalis principium usus est, quaeque in eo consistit, ut dx etc. non nisi locum teneat signi indicativi seu auxiliarii, ad deducendum a primitivis ceu genitricibus functiones secundarias, quarum quidem prior semper est characteristica, seu serici *terminus characteristicus*, cujus ope nonsolum omnes reliqui termini in infinitum, sed etiam ipsae ex quibus nascuntur functiones primariae possunt inveniri. Exempli gratia, si loco functionis x^n functio $(x + dx)^n$ ponitur, series generabitur $x^n + nx^{n-1}\, dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}\, dx^2 + \ldots\ldots$ etc. cujus terminus primus x^n ipsa est functio genitrix; reliqui vero termini

ſunt functiones deductae. A termino ſeriei characteriſtico $n^{n-1}\,dx$ nonſolum ad functionem genitricem x^n redire, ſed etiam ad omnes functiones deductas, quae vel characteriſticam in eadem ſerie ſequuntur, ut $\frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}\,dx^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}\,dx^3$ etc. vel originem ab ea trahentes novam conſtituunt ſeriem, ut $ndx.\ (x + dx)^{n-1} = ndx \left[x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2}\,dx + \frac{(n-1)(n-\ )}{1.\ 2} x^{n-3}\,dx^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}\,dx^3 + \ldots\ldots \right] - nx^{n-1}\,dx = n(n-1)\,x^{n-2}\,dx^2 + \ldots$ etc. progredi poſſumus. Hic autem progreſſus nil niſi differentiatio prima, ſecunda etc., ſicut reditus ad functionem genitricem ipſa eſt integratio. Quam ob rem jam unus ex quadam ſerie terminus, qui differentiale primum, ſecundum, tertium etc. vocatur, et ad repraeſentandum totam ſeriem ejusque legem vel naturam exponendum, et ad reſtituendum functionem genitricem ſufficit; ita ut mathematicorum ſit mos, terminos omnes in ſeriebus calculi infiniteſimalis characteriſticum ſequentes abjiciendi, quod quidem eo facilius fieri poteſt, quo magis calculus infiniteſimalis non niſi circa leges functionum mutandarum inveſtigandas verſatur, et quantitates re vera augendas non curat. Ex quo ſequitur, calculum infiniteſimalem nihil eſſe, niſi methodum functionum analyticarum, qua mathematici ad decurtandum operationes analytico-arithmeticas in geometriam ſublimiorem ſpectantes, utuntur. Id quod quisque non neſcit, qui mathematicorum recentiorum, inprimisque virorum praeclariſſimorum *Lagrange* et *Lacroix* ſcripta perlegit. Quae quidem deductio maxime calculi infiniteſimalis principiis conſentanea videtur,

:t $dx = 2x\,dx = 3x^2\,dx = d\,(x^m) = d^n\,(x) = y dx + x dy$ $= \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{dy}{y} = o$, utique argumentando $\int dx = \int 2x dx$ $= \int 3\,x^2\,dx = \int d\,(x^m) = \int d^n\,(x) = \int\,(y dx + x dy) =$ $\int \left(\frac{y dx - x dy}{y^2}\right) = \int \frac{dy}{y} = x$ concludendum erit, et omne quod imulant inter differentialia discrimen,* argumentis perspicuis rorsus carebit. Deinde simulac differentialia dx, dx^m, $d^n x$ etc. ihila sunt absoluta, non difficilis quidem est argumentatio, haec Zero absoluta e serie quantitatum finitarum eliminari *posse*; miime vero hujus eliminationis *necessitas* perspici potest, semperque lubium erit, an differentialia et primi et secundi et tertii ordinis *omnia*, dum simul adsunt in serie, locum suum retineant nec ne. d quod calculo cypharum nullo, sed calculo tantum differentiali nere analytico demonstrari potest. Calculus igitur infinitesimalis raecurrere, et partem laboris ante suscipere coactus fuit, ut poteri, qui cyphrarum eum appellant calculum, in aggregatione lifferentialium cujusvis ordinis quid sibi sit faciendum sapiant. Praeterea, dum in ratione o : o nituntur, nec ullo probare possunt nodo, terminum quemlibet in serie vel functione per differentiale ujusvis ordinis multiplicatum non auferri; id quod fiat necesse sset, siquidem cuiusvis ordinis differentiale Zero absoluto aequale onatur.

---

* Ibidem pag. 197.

Aufert enim quilibet factor $=$ o quantitatem, quaecunque ſit, in quam ducitur, nec ullo modo calculi inferioris ope reſtitui poteſt; quam ob rem quisque terminus cui $a\,dx$, $2ax\,dx$, $3ax^2\,dx$, $nab^m\,x^{n-1}\,dx$ et ſimilis eſt forma, in calculo differentiali ſimpliciter evaneſcat neceſſe eſſet. Quodſi contendant nonnulli,* multiplices $a\,dx$, $2ax\,dx$ etc. $=$ o eſſe, rationem non reddent ex qua termini, qui factores $dx = 0$, $dx^n = 0$, $d^2x = 0$, $d^n x =$ o habent, in functionibus differentialibus partim retinendi, partim eliminandi ſunt. Itaque haec methodus, quae fundamentum totius calculi differentialis in Zero abſoluto et in ratione o : o ponit, nil niſi calculum proponeret prorſus inanem, qui abſente calculo infiniteſimali Leibnitiano nec ullum differentiationis problema rite poſſet tractare, quoniam non alio quam arbitrio duce ſemper et ubique in dubio verſaretur an hoc illudve Zero abſolutum eſſet abjiciendum. Quod cum ita ſit, nemo ſane calculum cyphrarum porro defendet, dicendo calculum infiniteſimalem re vera circa problemata, quibus et factores et diviſores $=$ o inſunt, e. g. fracturae haud ignotae $\frac{0}{0}$ et functioni $\frac{x^0}{0}$, verſari. Has enim quod adtinet formulas, nil eſſe niſi problemata, quae calculus infiniteſimalis et rite dijudicare et fidenter ſolvere ſolus poteſt, ſatis conſtat. Scilicet functionem $\frac{x^0}{0}$ logarihtmo functionis X naturali aequalem, itaque, ut hoc memorem, $\int 2x\,dx$

* Joh. *Schulz* . . . Entwick. etc. pag. 195. §. 22.

...-1, nunquam vero $x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x^0$ ...-1 nascitur. Ex quo satis apparet, functionem $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ quidem ...erminum summatorium seriei $x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots$ ...on autem seriei mutatae $x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots$ ideoque ...aloris nx^{n-1} significationem esse falsam, quae sine dubio sub hac ...orma correctione per calculum eget infinitesimalem, eamque ob ...ausam *problematis nudi* locum tenet. Cum autem nulla doc...trina umquam a problematibus, sed a notionibus generalioribus ...t ab axiomatibus incipiat, eo magis problema $\frac{x^n - x^n}{x - x} = \frac{0}{0}$ scien...iae, quae tam est sublimis, quam calculus infinitesimalis, princi...pium esse nequit. Porro constat, mathesin adplicatam rarissime ...circa talia decrementa, qualia sunt $x - x$ et $x^n - x^n$, vel circa ...ejusmodi rationes $x^n - x^n : x - x$ versari, sed potius et incre...mentis et decrementis, quae plurimum non per saltum sed ad ...continuitatis legem oriuntur, praesertim in motu corporum, qui ...lapsu fertur, uti. Quare calculi infinitesimalis naturam omnimodo ...oppugnat, ejus fundamentum in decremento $x^n - x^n$ ponere, ...quippe quod neutiquam principium sit, a quo mens humana in ...deducendo calculo infinitesimali incipere potest. Quid enim, ...quotiescunque a priori contempletur, ex ratione $x^n - x^n$: ...$x - x = 0 : 0$ sequitur? Omnimodo ratio fuisset inanis, nec ...umquam ex ea differentialia $nx^{n-1}dx$, $n(n-1)x^{n-2}dx^2$, n ...$(n-1)(n-2)\ldots(n+1-r)x^{n-r}dx^r$, $d^2\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ...$= -x^2 dx^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$ et alia ejusdem generis plura, rite con...fidenterque deducere didicissent, nisi calculo ipso infinitesimali

ducti functionem $x - {}^{\prime}x$ pro quantitate dx, ceu in genere functionem $x^n - x^n$ pro quantitate $d(x^n)$ substitui, differentialiaque nonsolum primi sed etiam secundi, atque tertii etc. ordinis inveniri posse, jam experti essent. Qua de re qui adhuc dubitat, functionem sumat $(n - n)\, x^{n-n-1}\, dx = (n - n)\, x^{-1}\, dx$, ex qua secundum eam, de qua hoc loco est sermo, methodum differentiale $\frac{dn\, dx}{x} = dn \,.\, d\,(\log \text{nat}\, x)$ nascatur necesse esset. Unde, quaero, se certiores facient; functionem $(n - n)\, x^{-1}\, dx = 0$, nec ullo modo differentiale quoddam esse; nisi theoremata et propositiones calculi differentialis Leibnitiani, qui in aliis principiis, quam in ratione vana $x^n - x^n : x - x$ fundatum est, adhibeant? Ceterum si quis ad hanc quaestionem respondere velit, dicendo, differentias tantum variabilium, minime vero quantorum constantium differentialia dare, atque differentiam quidem $x - x = dx$, non autem $n - n = dn$ esse; sine dubio mox animadvertet, in omni analysi et finitorum et infinitorum nonsolum $n - n$ sed etiam $x - x = 0$ esse, ideoque $x - x$ a residuo $n - n$ minime abhorrere; praetereaque, quod exponens n sit variabilis, uti y in x^y etc., nihil obstare. Ex quo sequeretur, $n - n$ non minus quam $x - x$ differentiale quoddam dare posse. Quum autem sit $n - n = x - x = 0$, et calculus differentialis verus (i. e. Leibnitianus) functiones $2\,(2 - 1)\,(2 - 2)\, x^{-1}\, dx^3$, $(n - n)\, x^{-1}\, dx$, $m\,(m - 1)\,(m - 2) \,.\,.\,.\,.\, (m - m)\, x^{-1}\, dx^{m+1}$ ejusque generis alia

nper abjicere jubeat; calculus cyphrarum indirectus, dum nctiones, quarum hoc loco mentionem fecimus, differentialia ra-esse ex principio agnoscere non nequit suo, primum in eo ccat, quod algorithmi infinitesimalis regulam, scilicet functiones, ae factoribus $2 - 2$, $m - m$, $n - n$ etc. adfectae sunt, abiendi,* manifesto perseveranterque oppugnat; deinde quod nne discrimen inter differentialia, quae tunc occurrent, et vera spuria, irritum reddit.

§. 13.

ββ. Id quod jam supra diximus de methodo eorum, qui lculum differentialem ex ratione $x_n - x^n : x - x$ deducere coati sunt, de methodo quoque haud aliena Ensheimiana dicenum esset. Nam significatio $\frac{y^m (y^m - 1)}{y (y - 1)}$ nil est nisi terminus mmatorius seriei $\frac{y^m}{y} (y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots + y^{m-m})$ simulatque $= 1$ ponatur, seriei summa jam erit $= m$, cui terminus sumatorius $\frac{y^m}{y^n} \left(\frac{1 - 1}{1 - 1} \right) = 0$ minime respondebit. Quam ob cau-

* Hoc faciendum erit toties, quoties valor cognitus non adest, qui formulas inutiles eversasque restituendas esse indicat.

ſam corrigendus erit; quod quidem rite per calculum infiniteſimalem fieri poteſt.

Sed ne quid ſupervacui faciam, lectori benevolo explicationem eorum, quae jam ſignificavi, quaeque facile cognoſci ex analogia poſſunt, uberiorem tradam. Itaque mihi, quid ſentiam hiſce de methodis omnibus, breviter exponere liceat. Jam ſatis apparet, methodum eorum, qui calculum differentialem ex ratione $x^n - x^n : x - x = o : o$ deducere volunt, principii loco problema nudum proponere, quod abſente calculo infiniteſimali Leibnitiano ſolvi nequit; praetereaque calculum, quem conſtituere conata eſt differentialem, ob factores $dx = dy = dx^n = dy^n = d^m x = d^m y = o$, qui contra Zero abſoluti naturam nullum quidem terminum auferre debent, nihilominus tamen quosdam eorum, calculum differentialem Leibnitianum imitando, auferunt, contradictionibus vel maximis implicitum reddere: eamque ob cauſam neque poſtulationibus, quas ipſa res adfert, ſatisfacere, neque methodo limitum ſeu rationum extremarum anteferendam eſſe.

Illae igitur methodi, quas calculi cyphrarum fautores accuſarunt, adeo non ſpernendae ſunt, ut quemque, qui calculi infiniteſimalis veritatem perſpicere ſtudet, eorum, qui limitum ſeu rationum extremarum, vel functionum analyticarum uſi ſunt methodo, ſequi partes oporteat. Nam quamvis et methodus limitum

$$(1 + x^{-1})^{-2} = C + \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3(x+1) + \frac{3(x+1)^0}{0} +$$

$$\frac{1}{x+1} = C + \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3(x+1) + 3 \log(x+1) +$$

$\frac{1}{x+1}$ esse nemo non nescit. Quod autem problema secundum, d est fracturam $\frac{0}{0}$ adtinet, saepius, dum terminis summatoriis in eriebus summandis utimur, obviam nobis venit. Si vero termius summatorius in fracturam $\frac{0}{0}$ mutatur, nil aliud est nisi docunentum, quod amplius uti non possit. Quam ob rem toties, quoies hanc speciem sumit, corrigendus erit, ut cum valore alterius artis aequationis congruat. Igitur est opinio falsa, fracturam $\frac{0}{0}$ valorem quemdam numeris finitis assignabilem Zeroque absoluto najorem prae se ferre; quoniam $\frac{0}{0}$ nil nisi inanitatem termini sumnatorii mutati significat. Id quod exemplo potest illustrari, quo isi sumus. In serie, quam dicunt geometricam, $a + ax + ax^2$ $+ ax^3 + \ldots + ax^{n-1} = s$, terminus summatorius est $\frac{ax^n - a}{x - 1}$ d quod facile probari potest. Si quantitas $x = 1$ ponitur, series 1 $a + a + a + a + \ldots = s$, terminus vero summatorius 1 $\frac{0}{0}$ mutatur. Quam ob causam, siquidem terminus summatorius is teneat suum, seriei $a + a + a + \ldots$ summa $= s = na$ $= 0$ fit necesse esset. Quod utique, quicunque n et a sint nume-; contradictionem involveret. Vt igitur terminus emendetur immatorius, calculus adhibendus est infinitesimalis, cujus ope s $= \frac{d\,(ax^n - a)}{d\,(x - 1)} = na\,x^{n-1} = na$, dummodo x iterum $= 1$ po-

natur, facillime colligitur. Ex quo jam fatis perfpici poteft, calculum inferiorem per calculum fublimiorem a contradictione vindicari, et formulas omnino falfas in ftatum veritatis reftitui poffe. Id quod profecto non fieret, fi calculus effet cyphrarum, quoniam neque algorithmus vulgaris neque calculus, qui ex ratione $0:0$ originem trahit, terminum vel a factore vel a divifore $= 0$ liberandi facultatem habet. Itaque ut paucis dicam verbis, calculus cyphrarum nunquam, id quod per algorithmum infinitefimalem fieri poteft, efficiet.

§. 12.

γ. Superfunt adhuc, qui calculum infinitefimalem occulte in calculum cyphrarum vertunt. Quare pro primo functionem $\frac{x^n - x^n}{x - x}$ pofteaque functionem $\frac{y^m (y^m - 1)}{y (y - 1)}$ dijudicare liceat.

αα. Jam apparet, functionem $\frac{x^n - x^n}{x - x}$ ex $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ natam calculi infinitefimalis fundamentum eam ob caufam effe non poffe, quoniam eft problema verum, ad calculi infinitefimalis forum pertinens, et quidem fpecies termini cujusdam fummatorii, qui feriei $x^{n-1} + x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 + \ldots\ldots + x^{n-n} y^{n-1}$ indicat fummam, antequam y in x et y^n in x^n mutatur; quo facto non amplius cum ea congruit. Etenim ex $\frac{x^n - x^n}{x - x}$ nihil aliud nifi

cum inclytus ejus auctor *Leibnitius* non prius quam ipſe theoriam de ſeriebus a viro celeberrimo *Walliſio* expoſitam adſecutus erat, eum conſtituiſſet.

§. 9.

II. Methodus quae ſequitur eſt eorum, qui quidem in genere calculum infiniteſimalem non niſi calculum cyphrarum eſſe contendunt, nihilo minus tamen duas in partes diſcedunt, quarum altera, *Leonh. Eulero* duce, differentialia *nihila relativa*, altera vero *nihila abſoluta* habet. Prior opinio in eo nititur, quod differentialia cujusvis ordinis in ſeriebus calculi infiniteſimalis eliminari quidem, nihilominus tamen factorum et diviſorum locum tenere, ſicut ad altiores quoque gradus evehi et radices reddere poſſint. Ceterum ex aequatione $a.\ o = b.\ o$, ex qua naſcitur proportio $a:b = o:o$, ſic argumentantur: ſi $a = 4b$, alterum Zero majus altero, et quidem quater tantum ſit neceſſe eſt. Itaque finitionem differentialium a contradictione vindicaſſe arbitrantur. Altera vero pars quodvis differentiale nil niſi Zero abſolutum, et algorithmum infiniteſimalem, propter rationem $o:o$ generaliſſimam, calculum cyphrarum, id eſt ratiocinationem ex nihilo veram eſſe contendit.* Sunt porro mathematici nonnulli, qui occulte ſaltem et indirecte calculum infiniteſimalem ex ratione $o:o$ deducere conantur, dum ad inveniendum ejus principium formis qui-

* Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigſten mathem. Theorien von *Joh. Schulz.* Königsberg. 1803. pag. 195. §. 22 ſeq.

busdam functionum ſingularibus utuntur. Hûc imprimis pertinet: 1. methodus a *Nicolao Morville* in ſeculo nuper elapſo extremo divulgata,* iterumque a *Carolo Chriſt. Langsdorf* adhibita,** quae differentialia $x - x = dx = 0$, $x^2 - x^2 = d(x^2) = 0$, $x^n - x^n = d(x_n) = 0$, ex functione $\frac{x_n - y_n}{x - y}$ originem trahere nobis perſuadere ſtuduit. Dividendo ſcilicet $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ ſeries $x^{n-1} + x^{n-2} y + x^{n-3} y^2 + \ldots x^{n-n} y^{n-1}$ producitur, ex qua, pro valoribus $2, 3, 4, 5 \ldots = n$, primum $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$, deinde $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$ et ſic porro naſcitur. Si vero x pro y ponitur, nonſolum $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = 2x$, ſed etiam $\frac{x^3 - x^3}{x - x} = 3x^2$ et in genere $\frac{x^n - x^n}{x - x} = nx^{n-1}$, itaque, ſiquidem ut ſupra $x^n - x^n = d(x^n)$ ponatur, $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$, $\frac{x^3 - x^3}{x - x} =$

---

* Phyſikaliſch chemiſche naturhiſtoriſche und mathematiſche Abhandlungen aus der neuen Sammlung der Schriften der kön. dän. Geſ. d. Wiſſ. überſetzt von D. P. *Scheel.* u. C. F. *Degen.* 1. B. 1 Abth. S. 82. Kopenhagen 1798. 8.

** Neue und gründl. Darſtell. der Princip. der Differentialr. von *Carl Chriſt. Langsdorf.* Heidelberg 1807. 8. (latine ſimul et germanice.)

altitudo trapezii, quovis in casu data erit. Ex quo significationis (expressionis vulgo,) quae supra fuit enucleata valor $\frac{a^2b - bx^2}{2a}$

$$= b\left[\left(\frac{bu}{b-y}\right)^2 - \left(\frac{uy}{b-y}\right)^2\right] : \frac{2bu}{b-y} = \tfrac{1}{2}u\left[\frac{b^2-y^2}{b-y}\right] = \tfrac{1}{2}u$$

$$\left[\frac{(b+y)(b-y)}{b-y}\right] = u\left(\frac{b+y}{2}\right)$$ sequitur, qui aequalis est eo, quem geometria elementaris praebet.

§. 4.

Cum ex his paucis jam satis appareat exemplis, calculum infinitesimalem ubique maxima cum utilitate adhiberi posse; nemini sane non interesse potest, methodum ejus, quatenus a calculo vulgari abhorret, ab omnibus, quorum infra mentio fiet, opprobriis vindicari. Nonnullis quidem placuit, propositiones hujus calculi fundamentales ita probare, ut argumentarentur, eas omnimodo veras esse, quoniam nullo tempore falsis ex praemissis verum quidquam deduci possit. Quod quidem, quatenus, ut dicunt, a posteriori argumentandum est, lubenter concedimus; verumtamen ad perspiciendum principia cognitionis syntheticae generalia, a quibus originem trahunt propositiones calculi infinitesimalis characteristicae, seu conditiones, quibus differentialia sequiorum coram differentialibus priorum ordinum, haec vero coram quantitatibus finitis et infinite crescentibus evanescunt, non sufficit. Est enim quaerendum, quo jure calculus infinitesimalis et summam $x + dx = x$ et differentiam $x - dx = x$ ponere, seu in quavis functione

differentiali in feriem infinitam diffoluta, uti $x^n + nx^{n-1}\, dx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}\, dx^2 + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} \frac{(n-2)}{3} x^{n-3}\, dx^3 + \frac{n\ (n-1)}{1.\ 2.} \frac{(n-2)}{3} \frac{(n-3)}{4} x^{n-4}\, dx^4 + \ldots\ldots - x^n = nx^{n-1}\, dx + \frac{n\ (n-1)}{1.\ 2.} x^{n-2}\, dx^2 + \ldots\ldots\ldots$, omnes praeter primum abjicere terminos poffit, ita ut nil nifi $nx^{n-1}\, dx$ reftet. Quod quidem non probandum effet, fi velimus calculi vulgaris notionibus ejusque principiis niti; ex quibus conftat, quamvis aequationem effe falfam, fiquidem ab una tantum parte vel crescat vel decrescat. Eft enim quaevis quantitas fibi ipfi aequalis, itaque $x = x$, et $x + dx > x$, feu $x - dx < x$, nifi $dx = 0$ ponatur. Quam ob rem ad quaeftionem primariam, cur differentialia dx, $d^n x$ etc. ratione *additionis* et *fubtractionis* valorem $= 0$ habere oporteat, quamquam ratione *multiplicationis*, *divifionis* et *dignitatum* vel *graduum* nunquam eum $= 0$ ponere liceat, adfatim erit refpondendum.

§. 5.

Equidem priusquam ad quaeftionem praecedentem ipfe refpondere conabor, breviter diverfas doctorum fententias de differentialium natura vel narrabo, vel examinabo. Sunt enim nonnulli, qui putant, differentialia quantitates non effe, quamquam et invicem et cum aliis quantitatibus comparari poffunt, praetereaque et multiplicationem et divifionem et dignitates admittunt; id quod verae quantitatis naturam efficit, eamque a Cyphra, id eft a Zero feu nihilo abfoluto discernit, quod neque augeri neque diminui, nec mul-

Sechsunddreißigster

JAHRES-BERICHT

des niederösterreichischen

Landes-Real- und Ober-Gymnasiums

in

HORN.

Veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres 1907—1908.

INHALT:

Zur Einführung der Infinitesimalrechnung.

Von Dr. Franz Zimmermann.

Horn 1908.

Im Verlage des n.-ö. Landes-Real- und Ober-Gymnasiums in Horn.

Druck von F. Berger in Horn.

Zur Einführung
der
Infinitesimalrechnung.

Von

Dr. Franz Zimmermann.

Als im Sommersemester 1907 an die hiesige Lehranstalt eine Anfrage des hohen n.-ö. Landesschulrates, betreffend die Einführung der Differential- und Integralrechnung nach den Intentionen des Min.-Erl. vom 23. April 1907, Z. 4748 herabgelangte, wurde die Einführung dieser Rechnungsart vorläufig abgelehnt.

Der Grund hiefür lag neben manchen lokalen Verhältnissen hauptsächlich in der Schwierigkeit der zeitlichen Einreihung dieser Kapitel in den Lehrstoff. Hängt ja doch von derselben sowohl die gründliche Erfassung dieser Disziplin als auch die ersprießliche Verwendung derselben ab. Das hiefür nächstliegende Gebiet ist unstreitig die Mechanik, in welcher jeder Lehrer den Begriff des Differentialquotienten bei Erklärung der Beschleunigung, der Ableitung der beschleunigten Bewegung usw. ungerne vermißt und zu gekünstelten elementaren Methoden, die beim Schüler mitunter Mißtrauen erregen, greifen muß. Demnach sollte mit der Differential- und Integralrechnung bereits gegen Ende des VI. Jahres oder doch mit Beginn der VII. Klasse angefangen werden.

Da erhebt sich jedoch die Frage, ob der Schüler in diesem Zeitpunkte bereits die nötigen Vorkenntnisse hat, um diesen Erklärungen mit Verständnis folgen zu können. Ist nicht vielmehr die Kenntnis der analytischen Geometrie Vorbedingung, um an eine anschauliche Entwicklung des Differentialquotienten denken zu können? Daß die Einführung desselben nur anschaulich, auf geometrischer Grundlage, erfolgen kann, ist eine pädagogische Forderung, denn jeder Schüler wird einer Disziplin, für die ihm wegen Abstraktheit des Stoffes das richtige Verständnis mangelt, jedes Interesse versagen. Wollte man jedoch mit der Vermittlung der Infinitesimalrechnung warten, bis die analytische Geometrie absolviert ist, so käme man in eine Zeit, welche nur mehr ein flüchtiges Streifen dieser Kapitel gestatten würde, geschweige, daß sich eine ausführlichere Anwendung geben ließe.

Um aus diesen Schwierigkeiten einen Ausweg zu finden, griff der Verfasser zum Experiment. Von der Nützlichkeit und Notwendigkeit durchdrungen, hielt ich es für eine dankenswerte Aufgabe, den Versuch eines wöchentlich zweistündigen privaten Kurses zu wagen, durch welchen festgestellt werden sollte, auf welchen Vorkenntnissen aufbauend sich eine Vermittlung dieser Kenntnisse ermöglicht.

Um zu entscheiden, ob die analytische Geometrie unbedingte Vorausetzung sei, nahm ich in meinem Kurs sowohl Schüler der VIII. sowie VII. Klasse auf. Im Verlauf ergab sich, daß ein Unter-

schied in der Erfassung des Vortrages nach diesen beiden Kategorien sich nicht ergab.

Freilich ohne alle Vorbildung waren die Schüler der VII. Klasse nicht. Die graphische Darstellung der komplexen Zahlen, sowie deren Addition und Subtraktion auf Grund der in der IV. Klasse im Mechanikunterrichte erworbenen Kenntnis der Vektoren, eine gelegentliche Erklärung des Funktionsbegriffes, die graphische Darstellung der Winkelfunktionen, sowie von Funktionen ersten und zweiten Grades, welche den Schülern im Vorjahr übermittelt worden waren, genügten vollauf, um eine anschauliche Einführung des Differentialquotienten zu ermöglichen. Es konnten in kurzer Zeit als Anwendung der neuen Kenntnisse Tangentenkonstruktion in bestimmten Punkten einer gegebenen Kurve, sowie Maximums- und Minimumsbestimmungen bei vollem Verständnis der Teilnehmer aus der VII. Klasse vorgenommen werden.

Es ist somit nur der Funktionsbegriff sowie die Kenntnis der graphischen Darstellung derselben zum Verständnis der Infinitesimalrechnung nötig.

Gelegenheit zur Einführung und weiteren Durchbildung des Funktionsbegriffes ist aber im Lehrstoff der V. und VI. Klasse zu wiederholten Malen gegeben. So kann derselbe entweder als Einleitung zur Lehre von den Proportionen und der Auflösung linearer Gleichungen als gesondertes Kapitel vorangehen oder bei diesen selbst behandelt werden.

Es wird sich sogar bestens empfehlen, die graphische Darstellung von linearen Gleichungen hier einzuführen und die geometrische Deutung der gemeinsamen Wurzeln vorzunehmen, da ja die Methoden der Auflösung von der IV. Klasse her bekannt und bei dem geringen Umfang des Lehrstoffes in dieser Klasse auch genügend durchgeübt sind. Ihre Wiederholung ohne Hinzukommen von irgend etwas Neuem wird bei dem Schüler kein weiteres Interesse erwecken, sondern insbesondere der Textaufgaben wegen als Last empfunden.

So sehr es auch für die Übung des logischen Denkens wünschenswert wäre, möglichst viele Ansatzgleichungen von den Schülern auflösen zu lassen, so ergibt sich doch die Erfahrung, daß besonders schwächere Schüler hierin sich nur den Ansatz von typischen Aufgaben einlernen und bei Aufgaben, die etwas anders gestaltet sind, versagen. Bekannt ist ja, um nur ein Beispiel herauszugreifen, daß Schüler die Aufgabe, wobei verschiedene Röhren ein Gefäß in bestimmten Zeiten füllen, aufzulösen vermögen, nachdem solche Beispiele öfter durchgearbeitet wurden, jedoch die ganz gleichen Aufgaben, wobei mehrere Arbeiter in gewissen Zeiten eine Arbeit vollenden oder eine verschiedene Anzahl von Personen auf bestimmte Zeiten mit einem Vorrat verproviantiert sind, ratlos gegenüberstehen.

Durch Einführung des Funktionsbegriffes und der graphischen Darstellung werden auch in diesen Kapiteln neue und für die Folgezeit nützliche Kenntnisse vermittelt.

Weiters kann und soll die graphische Darstellung geübt werden bei der Exponentialfunktion, den komplexen Zahlen, den quadratischen Gleichungen mit zwei Unbekannten, der Winkelfuntionen usw.

Es wird dadurch nicht nur eine Verbindung des arithmetischen und geometrischen Lehrstoffes hergestellt und derselbe durch Anschaulichkeit interessanter gemacht, sowie der analytischen Geometrie vorgearbeitet, sondern man hat den unschätzbaren Vorteil, an die Einführung der Infinitesimalrechnung schreiten zu können zu einer Zeit, wo noch nicht analytische Geometrie betrieben wird.

Bei entsprechender Reduzierung des Lehrstoffes in der V. und und VI. Klasse wird man diesen Zeitpunkt im zweiten Semester der VI. Klasse oder bei Beginn der VII. Klasse erreicht haben. Damit ist aber auch eine nutzbringende Anwendung derselben in der Mechanik und analytischen Geometrie gesichert.

* * *

Kein Lehrer der Physik wird es sich entgehen lassen, als geradezu klassisches Beispiel einer wissenschaftlichen Fiktion den Begriff des Trägheitsmomentes zu entwickeln. Wer jedoch den vollen praktischen Gewinn daraus ziehen und Aufgaben über die lebendige Kraft rotierender, sowie über die Schwingungsdauer pendelnder Körper lösen will, sieht sich genötigt, die Infinitesimalrechnung um Rat zu fragen.

Da die Berechnung des Trägheitsmomentes der gebräuchlichsten Flächen und Körper nur die Kenntnis der einfachsten Integralformeln verlangt, so kann dieselbe nach Einführung der Differential- und Integralrechnung in dem geplanten Umfang in den Lehrplan der Mittelschulen von den Schülern anstandslos durchgeführt werden.

Ich habe dieselben deshalb auch mit meinen Kursteilnehmern als Übungsbeispiele für die bestimmte Integration gewählt. Außerdem bietet sich der Vorteil, daß eine und dieselbe Aufgabe auf verschiedene Weise ihrer Lösung zugeführt werden kann, was den Schüler von der Brauchbarkeit der Rechnungsart als auch von der Richtigkeit der gewonnenen Resultate zu überzeugen imstande ist. Die Quadratur der Flächen, sowie die Kubatur von Rotationskörper wurden im Bedarfsfalle eingeflochten, falls sie den Schülern unbekannt oder dem Gedächtnisse nicht gegenwärtig war.

Ich werde nach einigen Vorbemerkungen die Aufgaben so folgen lassen, wie sie im Kurse zur Behandlung gelangten. Auch die vollständige Durchführung soll beibehalten werden, um in den Schülern des Gymnasiums, welche das Programm sich erwerben, das Interesse für die einzuführende Rechnungsart zu erwecken. Dadurch, glaube ich, kann der Einführung selbst vorgearbeitet werden, was ja der bei Abfassung dieses Programms verfolgte Zweck ist.

Begriff des Trägheitmomentes.

Wenn ein Massenpunkt m um eine Achse im Abstande r mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich bewegt, so hat er dabei eine Geschwindigkeit $v = r\omega$ und eine kinetische Energie $E = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$. Die gleiche Energie würde ein Punkt von der Masse $m r^2$ im Abstande 1 von der Achse besitzen. Jene stellvertretende ideale Masse $m r^2$ nennen wir das Trägheitsmoment des Massenpunktes m in der Entfernung r.

Dreht sich jedoch ein starrer Körper um eine Achse, so können wir uns denselben aufgelöst denken in seine unendlich vielen Massenpunkte $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ welche in den bezüglichen Abständen $r_1\, r_2\, r_3 \ldots$ um die gemeinschaftliche Achse mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit sich bewegen, da sie mit einander starr verbunden sind. Ihre bezüglichen Geschwindigkeiten sind demnach

$$v_1 = r_1 \omega, \; v_2 = r_2 \omega, \; v_3 = r_3 \omega \ldots .$$

Die bei der Rotation entwickelte Gesamtenergie ist daher

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots) \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2. \end{aligned}$$

Es würde daher eine Masse von $\Sigma m r^2$ Masseneinheiten im Abstande 1 von der Drehachse die gleiche Energie entwickeln, wie die um die Achse diffus angeordnete Masse Σm bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω. Wir denken uns gleichsam jeden Massenpunkt m_s aus der Entfernung r_s in die Entfernung 1 von der Drehachse verschoben, wodurch sich gewissermaßen seine Masse m_s in die ideale Masse $m_S r_S^2$ verwandelt.

Diese ideale Masse $\Sigma m r^2 = \mathfrak{T}$ nennen wir das Trägheitsmoment.

Allgemeine Berechnung des Trägheitsmomentes.

Es sei NQWP eine ebene geschlossene Figur (Fig. 1), ferner AA′ eine feste Achse, um die sich die Figur dreht. $NN_1 = n$ sei die Entfernung des nächsten Punktes der Begrenzungslinie von der Achse und $WW_1 = w$ die des weitesten Punktes. Teilen wir nun $WR = w - n$ in zahllose Teile und ziehen durch die Teilungspunkte Paral ele zur Achse AA′, so zerfällt die ganze Figur in unzählig viele unendlich dünne Streifen, die wir als Rechtecke ansehen können. Ist uns die Gleichung der Begrenzungslinie in bezug auf ein Koordinatensystem, wobei die Rotationsachse die Y-Achse ist, gegeben, so ist der Flächeninhalt eines solchen Streifens $PP_1\, QQ_1$ von der Breite dx

und der Länge y gleich $df = ydx$. Würde dieser Streifen in der Entfernung $W_1 S = x$ allein um die Achse rotieren, so wäre sein Trägheitsmoment, wenn die Flächendichte σ ist,

$$d\mathfrak{T} = \sigma \, . \, y dx \, . \, x^2.$$

Es ist das auch gleichzeitig die Zunahme des ganzen Trägheitsmomentes, wenn die rotierende Fläche NP_1Q_1 auf NPQ, also um den Streifen PP_1QQ_1 wächst, wenn also $W_1S = x$ um $ST = dx$ zunimmt.

Das Trägheitsmoment der ganzen Fläche bekommen wir daher, wenn wir die Trägheitsmomente aller dieser unzählig vielen unendlich dünnen Streifen oder was dasselbe ist, wenn wir alle diese Änderungen des Trägheitsmomentes addieren, wenn x von $NN_1 = n$ bis $WW_1 = w$ zunimmt. Es ist das Trägheitsmoment daher gleich dem bestimmten Integral des Ausdruckes $\sigma y x^2 dx$ zwischen den Grenzen n und w.

$$\mathfrak{T} = \int_n^w \sigma y x^2 dx.$$

In speziellen Fällen muß die algebraische Abhängigkeit der Veränderlichen y von x bekannt sein, das y also durch das x ausgedrückt werden können.

Spezielle Aufgaben.

1. Es ist das Trägheitsmoment eines Rechteckes ABCD mit den Seiten $AB = a$ und $BC = b$ zu berechnen, wenn die Achse durch die Seite AD hindurch geht.

Auflösung: Wir legen durch AD die Y-Achse und durch AB die X-Achse des Koordinatensystems und ziehen Parallele zu AD (Fig. 2). Ein solcher Streifen in der Entfernung $AP_1 = x$ ist ein Rechteck mit den Seiten $P_1Q_1 = b$ und $P_1P = dx$, hat den Flächeninhalt $df = bdx$ und die Masse $dm = \sigma b dx$, daher das Trägheitsmoment

$$d\mathfrak{T} = \sigma b dx \, . \, x^2.$$

Das x nimmt alle Werte von $x = 0$ bis $x = a$ an.

Daher das Trägheitsmoment der ganzen Fläche:

$$\mathfrak{T} = \int_0^a \sigma b x^2 dx = \sigma b \left| \frac{x^3}{3} \right._0^a = \frac{\sigma b a^3}{3} = M \frac{a^2}{3} \text{ da } M = ab\sigma \text{ ist.}$$

2. Es ist das Trägheitsmoment eines Rechteckes ABCD mit den Seiten $AB = a$ und $BC = b$ zu berechnen, wenn die Achse durch den Schwerpunkt S und parallel zur Seite BC geht.

Auflösung: Wir legen die X-Achse durch die Seite AB und die Y-Achse durch die Drehachse und verfahren wie oben. Das x durchläuft jetzt die Werte von $x = -\frac{a}{2}$ bis $x = +\frac{a}{2}$.

$$\text{Daher } \mathfrak{T} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sigma b x^2 dx = \sigma b \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \sigma b \left[\frac{1}{3}\frac{a^3}{8} - \left(-\frac{1}{3}\frac{a^3}{8}\right)\right] =$$

$$= \frac{a^3 b \sigma}{12} = M \frac{a^2}{12}.$$

Bemerkung: Die Mechanik lehrt, daß, wenn ein Körper um eine Achse, welche nicht durch den Schwerpunkt hindurch geht, sondern von demselben eine Entfernung a hat, rotiert, das entwickelte Trägheitsmoment $\mathfrak{T}_a$ gleich ist dem Trägheitsmoment $\mathfrak{T}_S$ bezüglich des Schwerpunktes vermehrt um das Produkt $M a^2$.

Die Entfernung der beiden betrachteten Achsen ist $\frac{a}{2}$.

$\mathfrak{T}_{AD} = \mathfrak{T}_s + \frac{a^2}{4} M$. Setzen wir $\mathfrak{T}_{AD} = M \frac{a^2}{3}$ und $\mathfrak{T}_S = M \frac{a^2}{12}$ in die Gleichung ein, so folgt die Identität $M \frac{a^2}{3} = M \frac{a^2}{12} + M \frac{a^2}{4}$.

Ist eines dieser Trägheitsmomente bekannt, so findet man hieraus leicht das andere.

Diese Regel ist oft praktisch, wenn die Integration bei einem Trägheitsmoment umständlich ist.

3. Es ist das Trägheitsmoment eines Dreieckes ABC mit der Seite $AB = c$ und der Höhe $DC = h_3$ zu bestimmen, wenn die Achse durch die Seite AB hindurch geht (Fig. 3).

Auflösung. Wir legen durch die Seite AB die Y-Achse und durch DC die X-Achse des Koordinatensystems. Der unendlich dünne Streifen P_1Q_1PQ mit $P_1Q_1 = y$ und der Breite dx hat ein Trägheitsmoment $d\mathfrak{T} = \sigma y dx \,.\, x^2$. Das x durchläuft die Werte von $x = 0$ bis $x = h_3$, daher

$$\mathfrak{T} = \int_0^{h_3} \sigma y x^2 dx.$$

Es ist nun $AB : P_1Q_1 = DC : EC = DC : (DC - DE)$

oder $c : y = h_3 : (h_3 - x)$

daraus $y = \frac{c}{h_3}(h_3 - x)$,

$$\text{also } \mathfrak{T} = \int_0^{h_3} \frac{\sigma c}{h_3}(h_3 - x)\,x^2 dx = \frac{c\sigma}{h_3}\int_0^{h_3}(h_3 x^2 - x^3)\,dx =$$

$$= \frac{c\sigma}{h_3}\Bigg|_0^{h_3} h_3 \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = \frac{c h_3^3 \sigma}{12}$$

$$= M\frac{h_3^2}{6} \text{ weil } M = \sigma\frac{c h_3}{2} \text{ ist.}$$

4. Es ist das Trägheitsmoment eines Dreieckes ABC mit der Seite $AB = c$ und der Höhe h_3 zu berechnen, wenn die Achse MN durch den Schwerpunkt S und parallel zu AB geht (Fig. 3).

Auflösung: Wir verlegen das Koordinatensystem wieder in gewohnter Weise in den Punkt S.

$$AB : P_1Q_1 = DC : EC = DC : (GC - GE)$$

$$\text{oder } c : y = h_3 : \left(\frac{2}{3}h_3 - x\right)$$

$$\text{daraus } y = \frac{c}{h_3}\left(\frac{2}{3}h_3 \quad x\right);$$ das x durchläuft die Werte von

$$x = -\frac{h_3}{3} \text{ bis } x = +\frac{2}{3}h_3$$

$$\text{daher } \mathfrak{T} = \int_{-\frac{h_3}{3}}^{+\frac{2h_3}{3}} \frac{\sigma c}{h_3}\left(\frac{2}{3}h_3 - x\right)x^2\,dx = \frac{\sigma c}{h_3}\Bigg|_{-\frac{h_3}{3}}^{\frac{2h_3}{3}} \frac{2h_3}{3}\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} = \frac{\sigma c h_3^3}{36} = M\frac{h_3^2}{18}$$

Bemerkung: Die Auswertung dieses Integrals ist ziemlich umständlich. Wir bekommen das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes leichter auf dem Umwege über die vorige Aufgabe.

Es ist $\mathfrak{T}_{AB} = \mathfrak{T}_s + Ma^2$ also im speziellen Falle hier $a = \frac{1}{3}h_3$

$$\mathfrak{T}_S = \mathfrak{T}_{AB} - Ma^2 = M\frac{h_3^2}{6} - M\frac{h_3^2}{9} = M\frac{h_3^2}{18}$$

5. Es ist das Trägheitsmoment eines Dreieckes ABC mit der Seite $AB = c$ und der Höhe h_3 zu berechnen, wenn die Achse M_1N_1 durch die Spitze C geht und zu AB parallel ist (Fig. 3).

Auflösung: Es ist das Koordinatensystem nach C zu verlegen, die X-Achse falle mit der Richtung C nach D zusammen, die Y-Achse mit der Drehachse.

Dann ist $AB : P_1Q_1 = DC : EC$

$$c : y \quad = h_3 : x \text{ also } y = \frac{c}{h_3}x$$

$$\text{daher } \mathfrak{T} = \int_0^{h_3} \sigma y x^2 \, dx = \int_0^{h_3} \frac{c\sigma}{h_3} x^3 \, dx = \frac{c\sigma h_3^3}{4} = M \frac{h_3^2}{2}$$

Bemerkung: Es ist dieses Trägheitsmoment, wie ersichtlich, am schnellsten gefunden und wird daher zur Berechnung der vorhergehenden mit Vorteil angewendet.

$$\text{z. B. } \mathfrak{T}_S = \mathfrak{T}_c - \frac{4 h_3^2}{9} M = M \frac{h_3^2}{2} - \frac{4}{9} h_3^2 M = M \frac{h_3^2}{18}$$

$$\text{und } \mathfrak{T}_{AB} = \mathfrak{T}_S + \frac{h_3^2}{9} M = M \frac{h_3^2}{18} + M \frac{h_3^2}{9} = M \frac{h_3^2}{6}$$

6. Das Trägheitsmoment eines Quadrates soll berechnet werden, wenn die Achse mit der Diagonale zusammenfällt.

Auflösung: Die Achse teilt das Quadrat in zwei Dreiecke mit der Grundlinie $a\sqrt{2}$ und der Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. (Siehe Aufgabe 3.)

$$\mathfrak{T} = 2 \frac{c\sigma}{12} h_3^3 = \frac{\sigma}{6} a \sqrt{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a\sigma}{6} \sqrt{2} \cdot \frac{2 a^3 \sqrt{2}}{8} = \frac{a^4 \sigma}{12} = M \frac{a^2}{12}$$

7. Es soll das Trägheitsmoment eines regulären Sechseckes berechnet werden, wenn die Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte hindurchgeht.

Auflösung: Zu beiden Seiten der Achse liegen je drei gleichseitige Dreiecke, von den 2 ein Trägheitsmoment nach Aufgabe 3 und eines ein solches nach Aufgabe 5 besitzen.

$$\mathfrak{T} = 2 \left[\frac{2}{12} c h_3^3 + \frac{1}{4} c h_3^3\right] = \frac{5}{6} c h_3^3 \qquad h_3 = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \quad c = a$$

$$= \frac{5}{6} a \frac{a^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{8} = \frac{5}{16} a^4 \sqrt{3} = \frac{5}{24} M a^2$$

8. Es soll das Trägheitsmoment eines Trapezes ABCD mit den Parallelseiten $AB = a$, $CD = b$ und der Höhe h berechnet werden, wenn die Achse durch AB hindurchgeht (Fig. 4).

Auflösung: Zieht man durch D eine Parallele zum Schenkel BC, so erhält man ein Dreieck mit der Basis a—b und der Höhe h. Es folgt wie beim Dreieck die Proportion: $AF : ED = PR : SD$

$$(a - b) : h = (y - b) : (h - x) \text{ daraus } y = \frac{a-b}{h} (h - x) + b$$

$$\mathfrak{T}_{AB} = \sigma \int_0^h \left[\frac{a-b}{h} (h - x) + b\right] x^2 \, dx = \sigma \Big|_0^h \frac{a-b}{h} \left(h \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) +$$

$$+ b \frac{x^3}{3} = h^3 \frac{a + 3b}{12}$$

Bemerkung:
Wird $b = 0$, so haben wir ein Dreieck nach Aufgabe 3

$$\mathfrak{T}_{AB} = \frac{a h^3}{12} = M \frac{h^2}{6}$$

Wird $a = 0$, so haben wir ein Dreieck nach Aufgabe 5

$$\mathfrak{T}_A = h^3 \frac{3b}{12} = \frac{b h^3}{4} = M \frac{h^2}{2}$$

Wird $a = b$, so haben wir ein Parallelogramm nach Aufgabe 1

$$\mathfrak{T}_{AB} = h^3 \frac{a + 3a}{12} = \frac{a h^3}{3} = M \frac{h^2}{3}$$

9. Es soll das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe berechnet werden, wenn die Achse durch den Mittelpunkt geht und auf der Fläche senkrecht steht (Fig. 5).

Auflösung: Wir ziehen von O aus unendlich viele Kreise, wodurch die Fläche in unendlich viele unendlich dünne Kreisringe zerfällt. Der Flächeninhalt eines solchen Ringes mit dem inneren Radius $OR = \rho$ und der Breite $RR_1 = d\rho$ kann dem eines Rechteckes gleichgesetzt werden mit den Seiten $2\rho\pi$ und $d\rho$, ist also gleich $2\rho\pi d\rho$. Sein Trägheitsmoment ist dann $d\mathfrak{T} = 2\rho\pi\sigma d\rho \,.\, \rho^2$. Da ρ von 0 bis r wächst, so ist

$$\mathfrak{T} = \int_0^r 2\pi\sigma\rho^3 d\rho = 2\pi\sigma \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_0^r = \frac{\pi\sigma r^4}{2} = M \frac{r^2}{2}$$

10. Es soll das Trägheitsmoment eines Kreisringes mit den Radien r und R berechnet werden, wenn die Achse durch den Mittelpunkt geht und auf der Fläche normal steht.

Auflösung: Das ρ nimmt jetzt alle Werte von r bis R an.

$$\mathfrak{T} = \int_r^R 2\rho\pi\sigma d\rho \,.\, \rho^2 = 2\pi\sigma \left| \frac{\rho^4}{4} \right|_r^R = \frac{\pi\sigma}{2} (R^4 - r^4)$$

$$= \frac{\pi\sigma}{2} (R^2 - r^2)(R^2 + r^2) = M \,.\, \frac{R^2 + r^2}{2}$$

11. Es soll das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe berechnet werden, wenn die Drehachse durch den Mittelpunkt geht und in der Ebene des Kreises liegt (Fig. 5).

Auflösung: Ein Streifen $P P_1 Q Q_1$ parallel zur Rotationsachse hat den Flächeninhalt $df = 2y dx$, die Masse $dm = 2y\sigma dx$, somit ein Trägheitsmoment

$$d\mathfrak{T} = 2\sigma y x^2 dx$$

da das x alle Werte von $x = -r$ bis $x = +r$ durchläuft, so ist

$$\mathfrak{T} = \int_{-r}^{+r} 2\,\sigma\, y\, x^2\, dx = 2\,\sigma \int_{-r}^{+r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\,\sigma \int_{-r}^{+r} \frac{r^2 x^2 - x^4}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

Es ist aber ganz allgemein:

$$\int \frac{A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}} =$$

$$= (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \sqrt{a x^2 + 2 b x + c} + K \int \frac{dx}{\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}}$$

wobei a_3, a_2, a_1, a_0 und K vorläufig noch unbekannte Koeffizienten sind, die aber eindeutig und auf eine leicht im Gedächtnis zu behaltende Form bestimmt werden können.

Wir differenzieren die Gleichung:

$$\frac{A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}} = (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \frac{a x + b}{\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}} +$$

$$+ (3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1) \sqrt{a x^2 + 2 b x + c} + K \frac{1}{\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}}$$

Wir multiplizieren die ganze Gleichung mit dem Nenner $\sqrt{a x^2 + 2 b x + c}$ und führen die angezeigten Operationen aus. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir die gleichen Potenzen von x untereinander.

$$\begin{aligned} A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = {} & a a_3 x^4 + a a_2 x^3 + a a_1 x^2 + a a_0 x \\ & \qquad\quad + b a_3 x^3 + b a_2 x^2 + b a_1 x + b a_0 \\ & 3 a a_3 x^4 + 2 a a_2 x^3 + a a_1 x^2 \\ & \qquad\quad + 6 b a_3 x^3 + 4 b a_2 x^2 + 2 b a_1 x \\ & \qquad\qquad\qquad + 3 c a_3 x^2 + 2 c a_2 x + a_1 c \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + K \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten sind einander gleich zu setzen

$$\begin{aligned} A_4 &= 4 a a_3 \\ A_3 &= 3 a a_2 + 7 b a_3 \\ A_2 &= 2 a a_1 + 5 b a_2 + 3 c a_3 \\ A_1 &= a a_0 + 3 b a_1 + 2 c a_2 \\ A_0 &= b a_0 + c a_1 + K \end{aligned}$$

oder etwas übersichtlicher

$$\begin{array}{lllll} & \underline{\;a\;} & \underline{\;b\;} & \underline{\;c\;} & \\ A_4 = & 4 a_3 & & & \\ A_3 = & 3 a_2 & + 7 a_3 & & \\ A_2 = & 2 a_1 & + 5 a_2 & + 3 a_3 & \\ A_1 = & a_0 & + 3 a_1 & + 2 a_2 & \\ A_0 = & & a_0 & + a_1 & + K \end{array}$$

wobei a, b, c über den Kolonnen bedeuten, daß jedes unterhalb stehende Glied damit multipliziert werden muß.

In unserem speziellen Falle ist $A_4 = -1$, $A_3 = 0$, $A_2 = r^2$, $A_1 = 0$, $A_0 = 0$, $a = -1$, $b = 0$, $c = r^2$, daher lautet das Schema

$$\begin{array}{lll} \underline{-1} & \underline{0} & \underline{r^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
-1 = 4a_3 & \text{also} & a_3 = \frac{1}{4} \\
0 = 3a_2 + 7a_3 & & a_2 = 0 \\
r^2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 & & a_1 = -\frac{1}{8}r^2 \\
0 = a_0 + 3a_1 + 2a_2 & & a_0 = 0 \\
0 = a_0 + a_1 + K & & K = \frac{r^4}{8}
\end{array}$$

daher

$$\mathfrak{T} = \int_{-r}^{+r} 2\sigma \frac{r^2x^2 - x^4}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\sigma \Big|_{-r}^{+r} \left(\frac{x^3}{4} - \frac{r^2}{8}x\right)\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^4}{8} \arcsin\frac{x}{r} =$$

$$= 2\sigma\frac{r^4}{8}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{r^4\pi\sigma}{4} = M\frac{r^2}{4}$$

12. Es soll das Trägheitsmoment einer Ellipse berechnet werden, wenn die Drehachse mit der kleinen Achse $2b$ zusammenfällt.

Auflösung: Es ist ganz analog der Aufgabe 11

$$d\mathfrak{T} = 2y\sigma dx \,.\, x^2 = 2\sigma x^2 \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{2b\sigma}{a}\frac{a^2x^2 - x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

und

$$\mathfrak{T} = \int_{-a}^{+a} \frac{2b\sigma}{a}\frac{a^2x^2 - x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \frac{2b\sigma}{a}\Big|_{-a}^{+a}\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{a^2}{8}x\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4}\arcsin\frac{x}{a}$$

$$= \frac{2b\sigma}{a} \cdot \frac{a^4}{8}\pi = \frac{a^3b\pi\sigma}{4} = M\frac{a^2}{4}, \text{ da } M = ab\pi\sigma \text{ ist.}$$

13. Es soll das Trägheitsmoment eines Parabelsegmentes berechnet werden, wenn die Rotationsachse mit der Y-Achse zusammenfällt (Fig. 6).

Auflösung: Ein unendlich dünner Streifen PP_1QQ_1 in der Entfernung $OR = x$ hat den Flächeninhalt $2y\,dx$, die Masse $dm = 2y\,dx\,.\,\sigma$ und das Trägheitsmoment $d\mathfrak{T} = 2y\sigma x^2 dx$

Das x durchläuft alle Werte von $x = 0$ bis $x = x_0$, dem die Begrenzungsordinate y_0 entspricht.

$$\mathfrak{T} = 2\sigma\int_0^{x_0} y x^2 dx = 2\sigma\sqrt{2p}\int_0^{x_0} x^{5/2}dx = 2\sigma\sqrt{2p}\Big|_0^{x_0}\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{4}{7}\sigma\sqrt{2px_0}\,.\,x_0^3 = \frac{4}{7}x_0^3y_0\sigma = \frac{3}{7}Mx_0^2, \text{ da } M = \frac{4}{3}x_0y_0\,.\,\sigma \text{ ist}$$

oder wenn wir nach y integrieren, so kommt

$$\mathfrak{T} = 2\sigma\int_0^{y_0} y\frac{y}{p}dy \cdot \frac{y^4}{4p^2} = \frac{\sigma}{2p^3}\left|\frac{y^7}{7}\right|_0^{y_0} = \frac{y_0^7\sigma}{14p^3} = \frac{y_0}{7}\cdot\frac{y_0^6\sigma}{2p^3} = \frac{y_0}{7}\sigma\frac{8p^3x_0^3}{2p^3} = \frac{4}{7}x_0^3y_0\sigma$$

$$= \frac{3}{7}M x_0^2$$

14. Es soll das Trägheitsmoment eines Parabelsegmentes berechnet werden, wenn dasselbe um die X-Achse rotiert (Fig. 6).

Auflösung: Ein unendlich dünner Streifen $U U_1 V V_1$ parallel zur X-Achse in der Entfernung $RT = y$ hat den Flächeninhalt $df = (x_0 - x)\,dy$, die Masse $dm = \sigma(x_0 - x)\,dy$ und das Trägheitsmoment $d\mathfrak{T} = \sigma\,(x_0 - x)\,y^2\,dy$.

Das Trägheitsmoment des ganzen Segmentes ist somit

$$\mathfrak{T} = 2\sigma\int_0^{y_0}\left(x_0 - \frac{y^2}{2p}\right)y^2\,dy = 2\sigma\left(\frac{x_0\,y_0^3}{3} - \frac{y_0^5}{10p}\right) = 2\sigma\,y_0^3\left(\frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{15}\sigma\,x_0\,y_0^3 = M\frac{y_0^2}{5}$$

15. Es soll das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedes mit den Seiten a, b, c berechnet werden, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt parallel zur Seite c hindurchgeht (Fig. 7).

Auflösung: Wir teilen die Seite $AB = a$ in unendlich viele Teile und legen parallel zur Seitenfläche mit den Kanten $BC = b$ und $BB_1 = c$ Ebenen durch die Teilungspunkte. Dadurch erhalten wir lauter unendlich dünne Lamellen, welche Rechtecke mit den Seiten b und c darstellen. In Aufgabe 2 haben wir das Trägheitsmoment eines solchen berechnet. Wenn die Seite $BC = b$ durch die Achse MM_1, welche zur Seite c parallel läuft, halbiert wird, so ist das diesbezügliche Trägheitsmoment

$$t = M\frac{b^2}{12} = \frac{\sigma\,b^3\,c}{12}$$

Befindet sich jedoch diese Lamelle in der Entfernung $OT = x$ von der gemeinschaftlichen Drehachse, so ist nach dem erwähnten Satz aus der Mechanik das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse gleich

$$d\mathfrak{T} = M\frac{b^2}{12} + M x^2 = b\,c\,\sigma\,dx\frac{b^2}{12} + b\,c\,\sigma\,dx\,.\,x^2$$

daher

$$\mathfrak{T} = b\,c\,\sigma \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(\frac{b^2}{12} + x^2\right) dx = b\,c\,\sigma \left(\frac{b^2}{12} a + \frac{a^3}{12}\right)$$

$$= a\,b\,c\,\sigma \frac{a^2 + b^2}{12} = M \frac{a^2 + b^2}{12}$$

16. Es soll das Trägheitsmoment eines Zylinders (R, h) beberechnet werden, wenn die Rotationsachse mit der Zylinderachse zusammenfällt.

Auflösungen:

a) Wir denken uns den Zylinder bestehend aus unendlich vielen in einander geschachtelten unendlich dünnen Hohlzylindern. Dann ist das Volumen eines solchen $dV = 2r\pi\,dr\,.\,h$, die Masse $dm = 2r\pi\,dr\,h\,.\,\rho$, wenn wir unter ρ die Raumdichte verstehen, und das Trägheitsmoment in seiner Entfernung r gleich

$$d\mathfrak{T} = 2r\pi\,dr\,.\,h\,.\,\rho\,.\,r^2$$

r durchläuft alle Werte von $r = o$ bis $r = R$, daher

$$\mathfrak{T} = 2\rho\pi h \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{R^4 \pi h \rho}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

b) Wir denken uns den Zylinder bestehend aus unendlich vielen auf einander gelegten Kreisscheiben. Das Trägheitsmoment einer solchen haben wir berechnet als

$$t = m \frac{R^2}{2} \text{ oder } d\mathfrak{T} = R^2 \pi \rho\,dz\,.\,\frac{R^2}{2} = \frac{R^4 \pi \rho}{2}\,dz.$$

z nimmt alle Werte von $z = o$ bis $z = h$ an, daher

$$\mathfrak{T} = \int\limits_0^h \frac{R^4 \pi \rho}{2}\,dz = \frac{R^4 \pi \rho\,h}{2} = M \frac{R^2}{2}$$

c) Wir denken uns den Zylinder bestehend aus unendlich vielen, unendlich dünnen Lamellen von rechteckiger Form, bei welchen die eine Seite h konstant, die andere Seite $2y$ variabel ist. Betrachten wir im Abstande x von der Achse eine solche Lamelle, so hat sie bezüglich ihrer eigenen Symmetrale nach Aufgabe 2 ein Trägheitsmoment $t = 2yh\rho\,dx \frac{4y^2}{12} = \frac{2}{3} h\rho y^3\,dx$, bezüglich der Zylinderachse nach dem Satz aus der Mechanik

$$d\mathfrak{T} = \frac{2}{3} h\rho y^3\,dx + 2yh\rho\,dx\,.\,x^2$$

Das x nimmt alle Werte von $x = -R$ bis $x = +R$ an, daher

$$\mathfrak{T} = \int_{-R}^{+R} \left(\frac{2\rho h}{3} y^3 + 2\rho h y x^2\right) dx = 2\rho h \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\left(\frac{R^2 - x^2}{3} + x^2\right) dx =$$

$$= \frac{2}{3}\rho h \int_{-R}^{+R} \frac{-2x^4 + R^2 x^2 + R^4}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \frac{2}{3}\rho h \left| \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{R^2}{4}x\right)\sqrt{R^2 - x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3R^4}{4} \arcsin\frac{x}{R} \right|_{-R}^{+R}$$

$$= \frac{2}{3}\rho h \cdot \frac{3R^4}{4}\pi = \frac{R^4 \pi h \rho}{2} = M\frac{R^2}{2}$$

17. Es soll das Trägheitsmoment eines Zylinders berechnet werden, wenn die Rotationsachse durch den Schwerpunkt geht und auf der Zylinderachse senkrecht steht.

Auflösung: Wir denken uns den Zylinder durch Schnitte normal zur Zylinderachse in lauter dünne Lamellen von der Form einer Kreisscheibe zerlegt. Das Trägheitsmoment einer solchen haben wir in Aufgabe 11 berechnet als

$$t = M\frac{R^2}{4} = \frac{R^4 \pi \rho}{4} d\,x$$

Bezüglich der Rotationsachse ist sein Trägheitsmoment nach dem mehrerwähnten Satz aus der Mechanik

$$d\mathfrak{T} = \frac{R^4 \pi \rho}{4} dx + R^2 \pi \rho\, d x \,.\, x^2$$

Das x nimmt alle Werte von $x = -\frac{h}{2}$ bis $x = +\frac{h}{2}$ an, daher

$$\mathfrak{T} = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{R^4 \pi \rho}{4} + R^2 \pi \rho x^2\right) dx = R^2 \pi \rho \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{R^2}{4} + x^2\right) dx = R^2 \pi \rho \left| \frac{R^2}{4} x + \frac{x^3}{3} \right|_{-h/2}^{+h/2}$$

$$= R^2 \pi \rho \left(\frac{R^2}{4} h + \frac{h^3}{12}\right) = R^2 \pi \rho h \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

18. Es soll das Trägheitsmoment eines Zylinders berechnet werden, wenn die Rotationsachse durch den einen Grundkreis geht und auf der Zylinderachse senkrecht steht.

Auflösungen:

a) Analog der vorigen Aufgabe; es ändern sich nur die Integrationsgrenzen, da x alle Werte von $x = 0$ bis $x = h$ durchläuft, so folgt

$$\mathfrak{T}=\int_0^h\left(\frac{R^4\pi\rho}{4}+R^2\pi\rho\,.\,x^2\right)dx=R^2\pi\rho\int_0^h\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx=R^2\pi\rho\left(\frac{R^2}{4}h+\frac{h^3}{3}\right)$$

$$=R^2\pi h\rho\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)=M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$$

b) Nach dem Satz aus der Mechanik unter Zuhilfenahme des Resultates der Aufgabe 17 folgt

$$\mathfrak{T}=M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)+M\frac{h^2}{4}=M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3}\right)$$

19. Es soll das Trägheitsmoment eines Schwungradkranzes (r_1 r_2) berechnet werden.

Auflösung: Analog der Aufgabe 16 ist

$$\mathfrak{T}=\int_{r_1}^{r_2}2r\pi dr\,.\,h\,.\,\rho r^2=2\pi\rho h\int_{r_1}^{r_2}r^3dr=2\rho\pi h\frac{r_2^4-r_1^4}{4}=\frac{\pi\rho h}{2}(r_2^2-r_1^2)(r_2^2+r_1^2)$$

$$=\frac{M}{2}(r_1^2+r_2^2)$$

Wenn wir die ungenauere Fiktion machen, daß wir uns die ganze Masse in der Mittellinie konzentriert denken, so folgt:

$$\mathfrak{T}'=\pi\rho h(r_2^2-r_1^2)\frac{(r_2+r_1)^2}{4}=\frac{M}{4}(r_2+r_1)^2$$

Bilden wir die Differenz der beiden, so bekommen wir den durch die ungenaue Annahme gemachten Fehler

$$F=\mathfrak{T}-\mathfrak{T}'=M\left(\frac{r_1^2}{2}+\frac{r_2^2}{2}-\frac{r_2^2}{4}-\frac{r_1\,r_2}{2}-\frac{r_1^2}{4}\right)=\frac{M}{4}(r_2-r_1)^2$$

Berechnen wir nun, welches der Grad der Genauigkeit ist, so müssen wir beide ins Verhältnis setzen. Wir bekommen dann

$$\frac{F}{\mathfrak{T}}=\frac{M}{4}(r_2-r_1)^2\frac{2}{M(r_1^2+r_2^2)}=\frac{1}{2}\frac{(r_2-r_1)^2}{r_1^2+r_3^2}\text{ oder}$$

$$F=\frac{(r_2-r_1)^2}{2(r_1^2+r_2^2)}\mathfrak{T}$$

Dieser Fehler wird umso kleiner, je weniger r_2 und r_1 sich unterscheiden.

Nehmen wir beispielsweise $r_2=250$ cm und $r_1=230$ cm, so ist

$$F=\frac{20^2}{2(250^2+230^2)}\mathfrak{T}=\frac{1}{577}\mathfrak{T}=0{\cdot}00174\,\mathfrak{T}\text{ also }1{\cdot}7\,‰.$$

Das ist somit eine für praktische Zwecke hinreichende Annäherung an den wahren Wert.

Ist jedoch der Unterschied der beiden Radien groß, wie etwa bei einem Mühlstein, so ist der Fehler ein beträchtlicher, der 30 % und noch mehr betragen kann.

z. B. $r_2 = 100$ cm $r_1 = 20$ cm

$$F = \frac{80^2}{2\,(100^2 + 20^2)}\,\mathfrak{T} = 0{\cdot}3077\,\mathfrak{T} \text{ also } 30{\cdot}77\ \%.$$

20. Es soll das Trägheitsmoment eines Kegels berechnet werden, wenn die Rotationsachse mit der Achse desselben zusammenfällt (Fig. 8).

Auflösungen:

a) Wir denken uns den Kegel zusammengesetzt aus unendlich vielen unendlich dünnen zylindrischen Lamellen, vom inneren Radius x, der Höhe y und der Dicke dx.

Es ist dann das Volumen $dV = 2\pi x\,dx\,.\,y$, die Masse $dm = \rho\,.\,2\pi x\,dx\,.\,y$ und das Trägheitsmoment $d\mathfrak{T} = 2\pi\rho y x^3 dx$.

Es besteht nun die Proportion

$$O B : O_1 B_1 = O C : O_1 C \text{ oder } r : x = h : (h - y)$$

$$\text{also } y = \frac{h}{r}(r - x)$$

Das x nimmt alle Werte von $x = 0$ bis $x = r$ an, daher

$$\mathfrak{T} = \int_0^r 2\pi\rho\frac{h}{r}(r - x)\,x^3 dx = \frac{2\pi h\rho}{r}\int_0^r (r x^3 - x^4)\,dx = \frac{2\pi\rho h}{r}\Big|_0^r r\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} =$$

$$= \frac{r^4\pi h\rho}{10} = \frac{3}{10} M r^2$$

b) Wir denken uns den Kegel bestehend aus lauter unendlich dünnen Kreisscheiben mit dem Radius x und der Dicke dy. Nach Aufgabe 9 ist das Trägheitsmoment hiefür

$$d\mathfrak{T} = M\frac{R^2}{2} = \frac{x^4\pi\rho}{2}dy \text{ also, da } x = \frac{r}{h}(h - y) \text{ ist,}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h x^4 dy = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h \frac{r^4}{h^4}(h - y)^4 dy = \frac{\pi\rho r^4}{2h^4}\int_0^h (h - y)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi\rho r^4}{2h^4}\Big|_0^h - \frac{(h - y)^5}{5} = \frac{\pi\rho r^4}{2h^4}\cdot\frac{h^5}{5} = \frac{r^4\pi h\rho}{10} = \frac{3}{10} M r^2$$

21. Es soll das Trägheitsmoment eines Kegels berechnet werden, wenn die Achse durch die Spitze geht und auf der Achse des Kegels normal steht.

Auflösung: Wir teilen die Achse in unendlich viele Teile und legen durch die Teilungspunkte Ebenen, welche auf die Achse des Kegels normal sind. Dadurch entstehen unendlich dünne Kreislamellen mit dem Radius y und der Dicke dx. Mit Verwendung des erwähnten Satzes der Mechanik finden wir das Trägheitsmoment bezüglich der Achse als

$$d\mathfrak{T} = \left(\frac{y^4 \pi \rho}{4} + y^2 \pi \rho x^2\right) dx, \text{ da } y : r = x : h \text{ und } y = \frac{r}{h} x$$

ist,

$$\mathfrak{T} = \int_0^h \left(\frac{r^4 x^4}{4 h^4} \pi \rho + \frac{r^2 \pi \rho}{h^2} x^4\right) dx = \frac{r^4 \pi \rho h}{20} + \frac{r^2 \pi \rho h^3}{5} =$$

$$= \frac{r^2 \pi h \rho}{5} \left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$$

$$= \frac{3}{5} M \left(\frac{r^2}{4} + h^2\right).$$

22. Es soll das Trägheitsmoment eines Kegels berechnet werden, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht und zur Achse senkrecht steht.

Auflösungen:

a) Mit Zuhilfenahme des soeben gewonnenen Resultates und des Satzes aus der Mechanik folgt

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{5} M \left(\frac{r^2}{4} + h^2\right) - M \frac{9}{16} h^2 = \frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right)$$

da der Schwerpunkt den Abstand $\frac{3}{4}$ h von der Spitze hat.

b) Wir legen durch den Schwerpunkt das Koordinatensystem so, daß die X-Achse mit der Achse des Kegels und die Y-Achse mit der Drehachse zusammenfällt. Den Kegel denken wir uns wieder bestehend aus lauter Kreisscheiben mit dem variablen Radius y und der Dicke dx.

Aus der Proportion

$$r : y = h : \left(\frac{3}{4} h + x\right) \quad \text{folgt} \quad y = \frac{r}{h}\left(\frac{3}{4} h + x\right) = \frac{r}{4h} (3 h + 4 x).$$

Es ist dann analog, wie schon zu wiederholten Malen angedeutet:

$$\mathfrak{T} = \int_{-\frac{3}{4}h}^{\frac{h}{4}} \left(\frac{y^4 \pi \rho}{4} + y^2 \pi \rho x^2\right) dx = \int_{-\frac{3}{4}h}^{\frac{h}{4}} \left[\frac{\pi \rho}{4} \frac{r^4}{h^4} \left(\frac{3}{4} h + x\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \pi \rho \frac{r^2}{16 h^2} (9 h^2 x^2 + 24 h x^3 + 16 x^4)\right] dx$$

$$=\frac{\pi\rho r^4}{4h^4}\left|\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}h+x\right)^5\right|_{-\frac{3}{4}h}^{\frac{h}{4}}+\frac{\pi\rho r^2}{16h^2}\left|3h^2x^3+6hx^4+\frac{16}{5}x^5\right|_{-\frac{3}{4}h}^{\frac{h}{4}}$$

$$=\frac{\pi\rho r^4}{4h^4}\cdot\frac{h^5}{5}+\frac{\pi\rho r^2}{80h^2}\left|15h^2x^3+30hx^4+16x^5\right|_{-\frac{3}{4}h}^{+\frac{h}{4}}$$

$$=\frac{\pi\rho r^4}{4h^4}\cdot\frac{h^5}{5}+\frac{\pi\rho r^2}{80h^2}\left[15h^2\left(\frac{h^3}{4^3}+\frac{3^3h^3}{4^3}\right)+30h\left(\frac{h^4}{4^4}-\frac{3^4h^4}{4^4}\right)+\right.$$
$$\left.+16\left(\frac{h^5}{4^5}+\frac{3^5h^5}{4^5}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi\rho r^4h}{20}+\frac{\pi\rho r^2}{80h^2}h^5=\frac{r^2\pi h\rho}{20}\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right)=\frac{3}{20}M\left(r^2+\frac{h^2}{4}\right).$$

Wie man sieht ist die Auswertung dieses Integrals ziemlich mühsam und ist der Umweg über die Spitze vorzuziehen.

23. Es soll das Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius R bezüglich eines Durchmessers als Achse berechnet werden.

Auflösungen:

a) Wir legen durch die Kugel normal zur Achse Ebenen. Dadurch zerfallt sie in lauter unendlich dünne Kreisscheiben mit dem variablen Halbmesser y und der Dicke dx. Das Trägheitsmoment einer solchen mit dem Zentralabstand x ist gleich (Aufgabe 9) ist $d\mathfrak{T}=\frac{y^4\pi\rho}{2}dx$. Das Trägheitsmoment der Kugel bekommen wir, wenn wir diese alle addieren zwischen $x=-r$ und $x=+r$.

$$\mathfrak{T}=\int_{-r}^{+r}\frac{y^4\pi\rho}{2}dx=\frac{\pi\rho}{2}\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)^2\,dy=\frac{\pi\rho}{2}\int_{-r}^{+r}(r^4-2r^2x^2+x^4)\,dx=$$

$$=\frac{\pi\rho}{2}\left|r^4x-\frac{2}{3}r^2x^3+\frac{x^5}{5}\right|_{+r}^{-r}=\frac{8}{15}r^5\pi\rho=\frac{2}{5}Mr^2$$

b) Wir legen durch die Kugel Ebenen, die mit der Ebene, welche die Achse enthält, parallel sind, wodurch wir wieder unendlich viele Kreisscheiben mit dem Radius x und der Dicke dy bekommen. Das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe bezüglich einer

in der Ebene derselben liegenden, durch den Mittelpunkt gehenden Achse ist nach Aufgabe 10

$$t = \frac{x^4 \pi \rho}{4}$$

und bezüglich der Rotationsachse

$$d\mathfrak{T} = \frac{x^4 \pi \rho}{4} dy + x^2 \pi \rho \, . \, y^2 dy$$

daher

$$\mathfrak{T} = \int_{-r}^{+r} \frac{\pi \rho}{4} (r^4 - 2 r^2 y^2 + y^4) \, dy + \pi \rho \int_{-r}^{+r} (r^2 y^2 - y^4) \, dy =$$

$$= \frac{\pi \rho}{4} \int_{-r}^{+r} (r^4 + 2 r^2 y^2 - 3 y^4) \, dy = \frac{\pi \rho}{4} \Big|_{-r}^{+r} r^4 y + \frac{2}{3} r^2 y^3 - \frac{3}{5} y^5 =$$

$$= \frac{8}{15} r^5 \pi \rho = \frac{2}{5} M r^2$$

c) Wir schreiben der Kugel unendlich viele Zylinder mit der gleichen Achse, dem variablen Radius x und der Höhe 2y ein. Dadurch erscheint die Kugel zusammengesetzt aus lauter Hohlzylindern vom Volumen $dV = 2\pi x \, dx \, . \, 2y = 4\pi x \, y dx$. Das Trägheitsmoment eines solchen ist $d\mathfrak{T} = 4 \rho \pi x \, y \, dx \, . \, x^2$, daher das der ganzen Kugel:

$$\mathfrak{T} = \int_0^r 4 \rho \pi x^3 y \, dx = 4 \rho \pi \int_0^r x^3 \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4 \rho \pi \int_0^r \frac{r^2 x^3 - x^5}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

Es ist aber

$$\int \frac{r^2 x^3 - x^5}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = (a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \sqrt{r^2 - x^2} +$$

$$+ K \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\underline{-1} \qquad \underline{0} \qquad \underline{r^2}$$

$$\begin{array}{lll}
-1 = 5 a_4 & \text{daraus} & a_4 = \frac{1}{5} \\
0 = 4 a_3 + 9 a_4 & & a_3 = 0 \\
r^2 = 3 a_2 + 7 a_3 + 4 a_4 & & a_2 = -\frac{r^4}{15} \\
0 = 2 a_1 + 5 a_2 + 3 a_3 & & a_1 = 0 \\
0 = a_0 + 3 a_1 + 2 a_2 & & a_0 = -\frac{2}{15} r^2 \\
0 = a_0 + a_1 + K & & K = 0
\end{array}$$

also

$$\int \frac{r^2 x^3 - x^5}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \left(\frac{1}{5} x^4 - \frac{r^2}{15} x^2 - \frac{2}{15} r^4\right) \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\mathfrak{T} = 4 \rho \pi \Big|_0^r \left(\frac{1}{5} x^4 - \frac{r^2}{15} x^2 - \frac{2}{15} r^4\right) \sqrt{r^2 - x^2} = 4 \rho \pi . \frac{2}{15} r^5 =$$

$$= \frac{8}{15} r^5 \pi \rho = M \frac{2}{5} r^2$$

24. Es soll das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoides (2a, 2b, 2b) berechnet werden, wenn die Rotationsachse mit der Achse 2a zusammenfällt.

Auflösungen:

a) Wir denken uns den Körper bestehend aus zylindrischen Lamellen mit dem Radius y und der Höhe 2x

dann ist $$d\mathfrak{T} = 2 y \pi dy . \sigma . 2x . y^2$$

und

$$\mathfrak{T} = \int_0^b \frac{4 \sigma \pi a}{b} \frac{y^3 b^2 - y^5}{\sqrt{b^2 - y^2}} dy = \frac{4 a \pi \sigma}{b} \Big|_0^b \left(\frac{1}{5} y^4 - \frac{b^2}{15} y^2 - \frac{2}{15} b^4\right) \sqrt{b^2 - y^2}$$

$$= \frac{4 a \pi \sigma}{b} \cdot \frac{2}{15} b^5 = \frac{8}{15} a b^4 \pi \sigma = \frac{2}{5} M b^2$$

Es ist aber das Volumen dieses Rotationsellipsoides

$$V = \int_{-a}^{+a} y^2 \pi . dx = \frac{b^2}{a^2} \pi \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2 \pi}{a^2} \Big|_{-a}^{+a} a^2 x - \frac{x^3}{3} = \frac{4}{3} a b^2 \pi$$

somit auch

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{5} M b^2$$

b) Wir denken uns den Körper bestehend aus Kreisscheiben mit dem veränderlichen Radius y (Siehe Aufgabe 9).

$$\mathfrak{T} = \int_{-a}^{+a} \frac{y^4 \pi \sigma}{2} dx = \frac{b^4 \pi \sigma}{2 a^4} \int_{-a}^{+a} (a^4 - 2 a^2 x^2 + x^4) dx$$

$$= \frac{b^4 \pi \sigma}{2 a^4} \Big|_{-a}^{+a} a^4 x - \frac{2}{3} a^2 x^3 + \frac{x^5}{5} = \frac{b^4 \pi \sigma}{2 a^4} \frac{16}{15} a^5 = \frac{8}{15} a b^4 \pi \sigma = \frac{2}{5} M b^2$$

25. Es soll das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoides (2a, 2b, 2b) berechnet werden, wenn die Drehachse mit der Achse 2b zusammenfällt.

Auflösung: Wir denken uns den Körper bestehend aus lauter Kreisscheiben mit dem Radius y und der Dicke dx. Eine solche hat bezüglich ihrer eigenen Achse nach Aufgabe 10 ein Trägheitsmoment

$$d\mathfrak{T} = \frac{y^4 \pi \sigma}{4} dx$$

Nach dem oft erwähnten Satz aus der Mechanik ist das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe bezüglich der Drehachse

$$d\mathfrak{T} = \frac{y^4 \pi \sigma}{4} dx + y^2 \pi \sigma x^2 dx$$

daher

$$\mathfrak{T} = \int_{-a}^{+a} \frac{\pi \sigma b^4}{4 a^4} (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) dx + \frac{\pi \sigma b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 x^2 - x^4) dx =$$

$$= \frac{b^4 \pi \sigma}{4 a^4} \left| a^4 x - \frac{2}{3} a^2 x^3 + \frac{x^5}{5} \right|_{-a}^{+a} + \frac{\pi \sigma b^2}{a^2} \left| a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right|_{-a}^{+a} = \frac{4 a b^2 \pi \sigma}{3} \frac{b^2 + a^2}{5}$$

$$= \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$$

26. Es soll das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides berechnet werden, wenn die Drehachse mit der X-Achse zusammenfällt.

Auflösungen:

a) Wir denken uns das Rotationsparaboloid zusammengesetzt aus lauter Kreisscheiben mit dem Radius y. Nach Aufgabe 9 ist dafür

$$d\mathfrak{T} = \frac{y^4 \pi \sigma dx}{2}$$

daher

$$\mathfrak{T} = \int_0^{x_0} \frac{y^4 \pi \sigma}{2} dx = \int_0^{x_0} \frac{4 p^2 x^2 \pi \sigma}{2} dx = 2 \pi p^2 \sigma \frac{x_0^3}{3} = p \pi x_0^2 \sigma \frac{2}{3} p x_0$$

$$= p \pi x_0^2 \sigma \frac{y_0^2}{3} = M \frac{y_0^2}{3}$$

Das Volumen des Rotationsparaboloides ist nämlich

$$\mathfrak{T} = \int_0^{x_0} y^2 \pi dx = \int_0^{x_0} 2 p \pi x dx = p \pi x_0^2$$

b) Wir denken uns das Rotationsparaboloid bestehend aus zylindrischen Lamellen mit dem Radius y und der Höhe $x_0 - x$, sowie der Dicke dy.

Dann ist $dV = 2\,y\,\pi\,dy\,(x_0 - x)$ und

$d\mathfrak{T} = 2\,y\,\pi\,(x_0 - x)\,\sigma\,dy\,.\,y^2$

$$\mathfrak{T} = 2\pi\sigma\int_0^{y_0}\left(x_0 - \frac{y^2}{2p}\right)y^3\,dy = 2\,\pi\,\sigma\,\Big|_0^{y_0}\, x_0\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{12p} = \frac{2}{3}\,p^2\,\pi\,x_0^3\,\sigma =$$

$$= p\,\pi\,x_0^2\,\cdot\,\frac{2\,p\,x_0}{3} = M\,\frac{y_0^2}{3}$$

Aufgaben über die lebendige Kraft.

Durch die vorstehende Berechnung des Trägheitsmomentes der verschiedenen Körper haben wir auch schon die Aufgaben über die lebendige Kraft rotierender Körper gelöst.

Wir haben die Fiktion gemacht, daß wir die um die Achse diffus angeordnete Masse uns durch die ideale Masse $\mathfrak{T} = \Sigma\, m\, r^2$ im Abstande 1 ersetzt dachten. Ist die Winkelgeschwindigkeit oder die Geschwindigkeit eines Massenpunktes in der Entfernung 1 von der Drehachse ω, so ist

$$L = \mathfrak{T}\,\frac{\omega^2}{2}$$

Für einen Punkt im Abstand 1 ist aber
der Weg während einer Umdrehung $= 2\,\pi$
„ „ „ „ Minute $= 2\,\pi\,.\,n$
„ „ „ „ Sekunde $= \dfrac{2\,\pi\,n}{60} = \omega$

daher $\omega = \dfrac{\pi\,n}{30}$, wobei n die Zahl der Umdrehungen in der Minute oder die Tourenzahl bedeutet.

Somit

$$L = \frac{n^2\,\pi^2}{1800}\,\mathfrak{T}$$

Sind Geschwindigkeit in Meter und Masse in Kilogrammen gegeben, so gibt uns der Ausdruck die lebendige Kraft in Meterkilogrammen.

I. Es soll die lebendige Kraft berechnet werden, die einem homogenen Vollzylinder bei seiner Rotation um die Zylinderachse innewohnt. (Aufgabe 16).

$$L = \frac{n^2\,\pi^2}{1800}\,\mathfrak{T} = \frac{\pi^2\,n^2}{1800}\,\frac{r^4\,\pi\,\sigma\,h}{2\,g} = \frac{r^4\,\pi^3\,\sigma\,h\,n^2}{3600\,g}$$

wenn σ das spezifische Gewicht und g die Erdbeschleunigung bedeutet.

Wenn wir jedoch statt der Winkelgeschwindigkeit ω die größte der auftretenden Geschwindigkeiten c (d. i. die desjenigen Punktes, welcher von der Achse am weitesten entfernt ist) einführen, so folgt

$$c = \frac{2 r \pi . n}{60} = \frac{r \pi . n}{30}$$

und

$$L = \frac{r^4 \pi^3 \sigma h n^2}{3600 g} = \frac{r^2 \pi h \sigma}{4 g} \frac{r^2 \pi^2 n^2}{900} = \frac{M}{4} c^2 \text{ Meterkilogramme}$$

II. Es soll die lebendige Kraft eines homogenen Vollzylinders berechnet werden, der um eine Achse, welche durch den Schwerpunkt geht und auf der Zylinderachse senkrecht steht, rotiert (Aufgabe 17).

$$L = \frac{R^2 \pi \sigma h}{2 g} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \frac{\pi^2 n^2}{900} = \frac{R^2 \pi^3 n^2 h \sigma}{1800 g} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \text{ Meterkilogramme}$$

III. Es soll das Arbeitsvermögen eines um seine Achse rotierenden Kegels berechnet werden (Aufgabe 9).

$$L = \frac{r^4 \pi h \sigma}{10 g} \cdot \frac{\pi^2 n^2}{1800} = \frac{r^2 \pi h \sigma}{20 g} \cdot c^2 = \frac{3}{20} M c^2 \quad \text{wobei } c = \frac{r \pi n}{30}$$

die Geschwindigkeit eines Peripheriepunktes der Basis des Kegels ist.

In ähnlicher Weise können die Werte für die lebendige Kraft von allen oben behandelten Körpern gefunden werden.

* * *

Durch die vorstehende Berechnung der Trägheitsmomente sind weiters alle Aufgaben über die Schwingungsdauer, reduzierte Pendellängen und Trägheitsradien ihrer Lösung zugeführt, weshalb ich glaube gerade in der Behandlung der Trägheitsmomente eine wirklich lohnenswerte Anwendung der Integralrechnung, welcher auch die Schüler ihr Interesse nicht versagen werden, erblicken zu können.

FIG.1

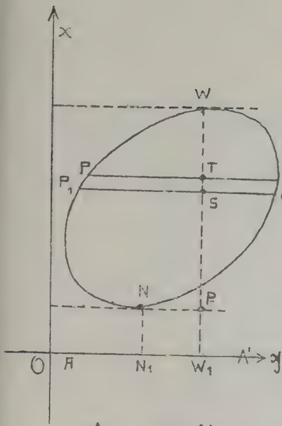


FIG.2

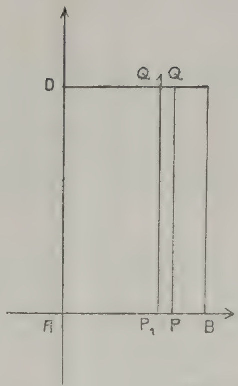


FIG.3

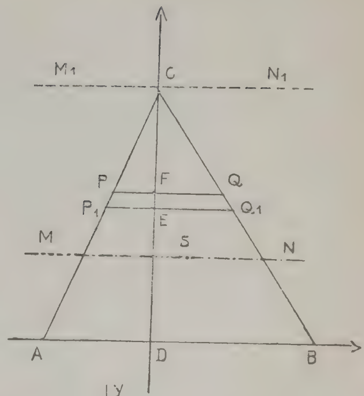


FIG.4.

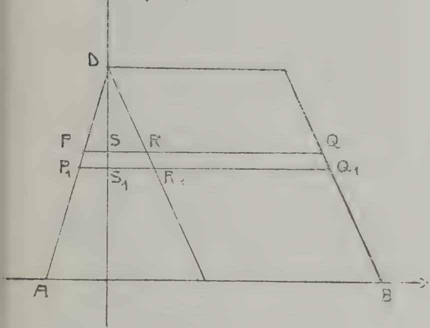


FIG.5

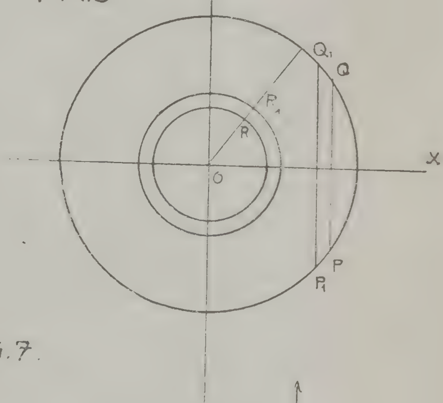


FIG.6.

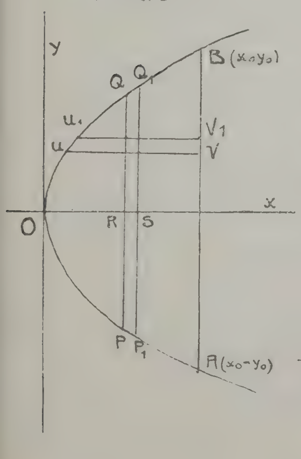


FIG.7.

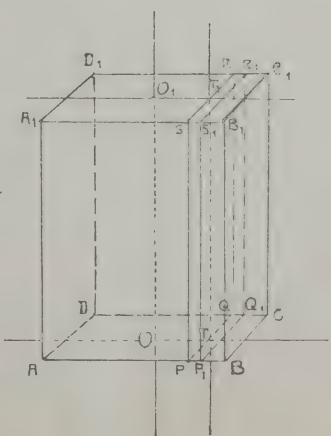
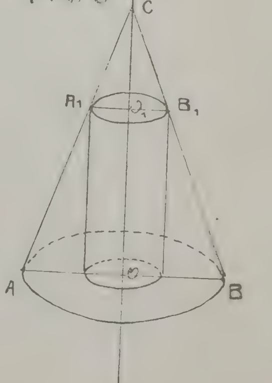


FIG 8



Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CVI. Abth. II. a. Mai 1897.

Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen

von

Konrad Zindler in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. Mai 1897.)

Die einzigen Werke über Integralrechnung, in denen ich den genannten Gegenstand behandelt finde, sind: Moigno-Lindelöf, »Leçons de calc. diff. et intégral«, T. IV (oder »Leçons de calc des variations«), Art. 11 (1861); Kronecker, Vorl. über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale (1894), 15. Vorl. Die dortigen Entwicklungen legen die Vorstellung zu Grunde, dass die Vielfachheit des Integrals mit der Zahl der Veränderlichen übereinstimme, und sind deshalb nicht unmittelbar auf den Fall anwendbar, wo ein zweifaches Integral über eine durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen gegebene Oberfläche zu erstrecken ist,[1] besonders wenn man die Art, wie das Oberflächenelement $d\sigma$ durch zwei unabhängige Veränderliche ausgedrückt ist, nicht weiter fixirt, was für gewisse physikalische Anwendungen[2] weder nothwendig, noch zweckmässig wäre. Darauf bezieht sich die folgende

---

[1] Auch die Untersuchungen von Bierens de Haan »Note sur la diff. et intégr. d'une intégr. m.« (Verslagen en Mededeelingen d. kongl. Ak. van Wetensch. to Amsterdam (2), V, 1871) und Chiò «Théorème relatif à la diff. d'une intégr. etc.« (Atti della R. Acc. Torino, VI, 1871) bewegen sich in ganz anderer Richtung.

[2] Das Studium der Abhandlung von Stokes »On the theory of diffraction« (Cambridge transact. Vol. IX, 1851) veranlasste mich vor etwa sieben Jahren, die Gleichungen I) und II) aufzustellen. Stokes verwendet in der genannten Abhandlung Resultate, die durch solche Differentiationen erhalten sind, ohne den Weg näher anzugeben.

Formel I), während II) die Differentiation eines Volumintegrals für Polarcoordinaten so gibt, wie es für manche Zwecke der Physik am bequemsten sein dürfte. Endlich gibt III) die Differentiation eines $k-1$-fachen Integrals, das sich über ein Gebiet erstreckt, das in einer k-fachen, ebenen Manigfaltigkeit ausgebreitet ist, und dort, sowie der Integrand, von einem Parameter abhängt.

Es sei t ein Parameter, r, ϑ, ψ drei Raumcoordinaten eines Punktes P, unter denen r den Abstand des Punktes von einem festen Punkte C bedeuten, ϑ und ψ die Richtung von C nach P in beliebiger Weise bestimmen sollen. Es werde über die einfache, geschlossene Oberfläche

$$r = F(\vartheta, \psi, t) = F_t \qquad \ldots 1)$$

das Integral

$$I(t) = \iint_{F_t} f(r, \vartheta, \psi, t)\, d\sigma \qquad \ldots 2)$$

erstreckt, wobei wir C im Innern der Fläche F_t annehmen. Um $\frac{dI}{dt}$ zu bilden, denken wir uns die in derselben Richtung von C ausgehenden Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ der beiden Flächen F_t und $F_{t+\tau}$ einander zugeordnet. Dann tritt im neuen Integral $I(t+\tau)$, wenn wir in üblicher Weise nur diejenigen Glieder anschreiben, die beim späteren Grenzübergang eine Rolle spielen,

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\tau + \frac{\partial f}{\partial r}\, dr$$

an Stelle des früheren f, wobei

$$dr = \frac{\partial F}{\partial t}\tau.$$

Es hat sich aber auch die Grösse des Oberflächenelementes geändert, und zwar kann dabei die Änderung, die von der Stellungsänderung des Elementes im Raume herrührt, ausser Betracht bleiben, weil die Entwicklung für den Winkel ν, den die Elemente $d\sigma$ une $d\sigma'$ bilden, als Function von τ im regulären

Falle, der solchen allgemeinen Betrachtungen allein zugänglich ist, mit der ersten Potenz von τ beginnen wird, und daher $\cos\nu$ mit $1-c\tau^2$. Man erhält also den vollständigen Coëfficienten von τ^1 in der Entwicklung von $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$, wenn man $d\sigma'$ als durch Parallelverschiebung hervorgegangen ansieht und bekommt in diesem Falle

$$d\sigma' = \left(1 + \frac{2}{r}\,dr\right) d\sigma = \left(1 + \frac{2}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\,\tau\right) d\sigma$$

und schliesslich

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial r} + 2\,\frac{f}{F}\right)\frac{\partial F}{\partial t}\right] d\sigma. \qquad \ldots\mathrm{I})$$

Ist jetzt $I(t)$ ein dreifaches Integral über einen von derselben Fläche 1) begrenzten Raum und dv das Volumelement, n die Richtung der äusseren Normalen von F_t, so ist

$$\frac{dI}{dt} = \iiint\limits_{F_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \iint\limits_{F_t} f\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\cos(n,r)\,d\sigma, \qquad \ldots\mathrm{II})$$

wie man sogleich einsieht, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\cos(n,r)\cdot\tau$$

das Differential der Dicke der zwischen den Flächen $F_{t+\tau}$ und F_t gelegenen Schicht ist, gemessen in der Richtung der Normalen.

An Stelle der Gleichung I) tritt die folgende I'), wenn man die Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ in der Richtung der Normalen von F einander zuordnet. Wird nämlich ein Hauptkrümmungshalbmesser von F positiv gezählt, wenn er auf der inneren Normalen, negativ, wenn er auf der äusseren liegt, und ist μ die mittlere Krümmung der Fläche F an der Stelle $d\sigma$, so ist bei obiger Zuordnung (s. z. B. Steiner, Ges. Werke, Bd. II, S. 176, »Über Parallelflächen«):

$$d\sigma' = (1+\mu)\,d\sigma.$$

Die Stellungsänderung der Elemente kann aus demselben Grunde wie früher unberücksichtigt bleiben. Also bekommt man:

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dt} + \mu f \right) d\sigma, \qquad \ldots \mathrm{I}')$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial n}$ die Ableitung von f nach der äusseren Normalen der Fläche F an der Stelle $d\sigma$ ist, $\frac{\partial n}{\partial t}$ die Geschwindigkeit, mit der sich das Element $d\sigma$ der beweglichen Fläche F in der Richtung der äusseren Normalen bewegt, wenn man den Parameter t als Zeitmaass betrachtet. Ist ein specielles Coordinatensystem gegeben, so sind μ und das mittlere Glied des Integranden in diesem System auszudrücken. An und für sich enthält jedoch die Gleichung I′) nichts mehr, was sich auf irgend ein Coordinatensystem bezieht; sie kann auf eine beliebige Zahl von Veränderlichen verallgemeinert werden:

Wenn durch eine Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots x_k, t) < 0 \qquad \ldots 3)$$

aus der k-fachen Mannigfaltigkeit $x_1, \ldots x_k$ ein Gebiet G abgegrenzt ist, so lassen sich auf die Begrenzung $\mathfrak{G}$ dieses Gebietes die wesentlichen Begriffe der Flächentheorie übertragen. Namentlich gibt es an jeder regulären Stelle P von $\mathfrak{G}$ $k-1$ auf einander und auf der Normalen n von $\mathfrak{G}$ in P senkrecht stehende Richtungen PP_i, deren benachbarte Normalen die Normale n in den Punkten M_i schneiden (s. z. B. Kronecker, »Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln«, Monatsber. der Berliner Akad., 1869, S. 688). Die Abstände PM_i heissen die Hauptkrümmungshalbmesser ρ_i. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ kann also für Grenzbetrachtungen als aus lauter rechtwinkligen Parallelotopen zusammengesetzt betrachtet werden. Ein solches ist durch die k Punkte

$$P, P_i (i = 1, 2, \ldots k-1)$$

bestimmt. Beim Übergang zu einer Nachbarmannigfaltigkeit $F(t+\tau) = 0$ verschiebt sich jeder dieser Punkte auf seiner

Normalen um dn (abgesehen von Grössen, die beim Grenzübergang wegfallen), wobei die Kanten des Parallelotops in den Verhältnissen

$$1 : \left(1 + \frac{dn}{\rho_i}\right)$$

wachsen. Die Volumina dv und dv' der Parallelotope stehen also (bis auf Grössen erster Ordnung) im Verhältnisse

$$1 : (1 + \mu . dn),$$

wobei

$$\mu = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_i}$$

die mittlere Krümmung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ ist. Dabei sind die ρ_i positiv zu zählen, wenn sie im Inneren des Gebietes G liegen, dn dagegen dann positiv, wenn es aus dem Gebiet G herausführt. Die Grössen $\frac{1}{\rho_i}$ berechnet man auf folgende Weise: Wenn λ_i eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0\,, & \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial F}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \lambda, & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_k}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist[1]

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2}}.$$

---

[1] A. a. O. S. 693. Kronecker schreibt diese Determinante

$$|F_{gh} - \lambda . \delta_{gh}| \quad (g, h = 0, 1, 2, \ldots k),$$

wobei insoferne ein Versehen in der Bezeichnung unterlaufen ist, als er Anfangs ausdrücklich erklärt, er wolle unter F_{00} die ursprüngliche Function

Ist also I ein $k-1$-faches Integral über $\mathfrak{G}$:

$$I = \int_{\mathfrak{G}} f(x_1 x_2 \ldots x_k, t)\, dv,$$

so erhält man auch hier:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dt} + \mu f \right) dv, \qquad \ldots \text{III)}$$

wobei $\frac{dn}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Parallelotop längs n bewegt.

Ist endlich I ein k-faches Integral über das Gebiet G mit dem Volumelement dw (der Fall, den Kronecker behandelt hat):

$$I = \int_G f\, dw,$$

so lehrt eine analoge Überlegung, wie bei II), dass ganz allgemein:

$$\frac{dI}{dt} = \int_G \frac{\partial f}{\partial t}\, dw + \int_{\mathfrak{G}} f \frac{dn}{dt}\, dv, \qquad \ldots \text{IV)}$$

wobei das erste Integral rechts ein k-faches, das zweite ein $k-1$-faches ist. Ist insbesondere das Gebiet G in der Form 3) gegeben, so ist

$$\frac{dn}{dt} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\left| \sqrt{\Sigma \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} \right)^2} \right|}$$

zu setzen, und man erhält Kronecker's Gleichung (a. a. O. S. 260, Gleichung [2*]).

(hier F) verstehen; ferner ist nach seiner Schreibweise $\delta_{00} = 1$. In der linken oberen Ecke muss aber statt $F-\lambda$ die Nulle stehen (s. für den Fall $k = 3$ Baltzer, Determinanten, §. 13, 6).

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

JAHRES-BERICHT

des

k. k. zweiten Ober-Gymnasiums

in

LEMBERG

für das Schul-Jahr 1879.

LEMBERG.
Verlag des k. k. II. Ober-Gymnasiums.
1879.

JAHRES-BERICHT

des

K. ZWEITEN OBER-GYMNASIUMS

in

LEMBERG

für das Schul-Jahr 1879.

LEMBERG.
Buchdruckerei des Stauropigianischen Instituts.
Geschäftsleiter Stefan Huczkowski.
1879.

INHALT.

Ueber den

TAYLOR'SCHEN LEHRSATZ IM ALLGEMEINEN,

nebst Angabe der wichtigsten Restformen.

andlung mit Zugrundlegung der Symbolik des Prof. Dr. **Lorenz Żmurko**).

§. 1.

Dem berühmten britischen Geometer **Brook Taylor** gelang es in m Werke „*Methodus incrementorum directa et inversa*," *Lond. 1715.* analytische Formel aufzustellen, nach welcher es möglich war, Veränderung einer Funktion in eine nach den positiven und gan- Potenzen der Veränderung der unabhängig veränderlichen Grösse ntwickeln. In seiner ursprünglichen Form umfasste das *Theorema orianum* nur Funktionen einer unabhängigen *Variablen.* Der Weg, ner **Brook Taylor** auf diese berühmte Formel geführt hat, stützte auf die aritmetischen Reihen höherer Ordnungen.

Die Tragweite dieses Lehrsatzes war anfangs nicht bedeutend, **Taylor** selbst seinen Lehrsatz für allgemein giltig hielt. Diese An- über die Allgemeingiltigkeit des Taylor'schen Lehrsatzes führte oft zu unrichtigen ja sogar widersinnigen Resultaten. Aus dem de fiengen namentlich die französischen Mathematiker an, diesen satz genau zu untersuchen und die Merkmale seiner Brauchbar- oder Unbrauchbarkeit aufzusuchen. Insbesondere handelte es sich lie Beurtheilung des Werthes derjenigen Glieder, welche bei der nirung der Anfangsglieder der Taylorischen Reihe als Endesglieder chlässigt werden. Es gelang den französischen Mathematikern die ne der vernachlässigten Endesglieder durch das sogenannte Ergän- sglied wenigstens in der Weise zu vertreten, dass dem letzteren zur Beurtheilung bequeme Form gegeben wurde.

Verschiedene Mathematiker haben verschiedene Wege zur Au chung des Ergänzungsgliedes eingeschlagen; keiner von ihnen ha doch, in wie weit es mir bekannt ist, den vom Entdecker selbst ei schlagenen Weg zur Hilfe genommen. Erst Prof. Dr. **Lorenz Żm** machte es in seinem Werke: „*Wykład matematyki na podstawie i o dowolnych kierunkach.*“ *Lwów 1864.* B. II. S. 563. Unser Bestr besteht nun darin, das zu unserem Zwecke aus den arithmetischen hen Nötige zusammenzustellen und die von Prof. Dr. **Lorenz Żm** gegebene Beweisart befolgend ausser den im genannten Werke S. (25); S. 569. (32); S. 570. (35) entwickelten Restformen noch die **Sturm** beizufügen.

§. 2.

Es sei das Schema

$$\left.\begin{array}{llllll} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & \ldots \\ \triangle U_0 & \triangle U_1 & \triangle U_2 & \triangle U_3 & \triangle U_4 & \ldots \\ \triangle^2 U_0 & \triangle^2 U_1 & \triangle^2 U_2 & \triangle^2 U_3 & \triangle^2 U_4 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \triangle^s U_0 & \triangle^s U_1 & \triangle^s U_2 & \triangle^s U_3 & \triangle^s U_4 & \ldots \end{array}\right\}$$

nach folgender Gleichung

$$\triangle^s U_m = \triangle^{s-1} U_{m+1} - \triangle^{s-1} U_m$$

gebaut. Aus der Gleichung (2) folgt, dass

$$\triangle^{s-1} U_{m+1} = \triangle^{s-1} U_m + \triangle^s U_m$$

Wenn man die in (3) ausgesprochene Eigenschaft des Schema befolgt, so gelangt man zu folgenden Relationen:

$$U_n = U_0 + \triangle U_0 + \triangle U_1 + \triangle U_2 + \ldots + \triangle U_{n-1}$$

$$\triangle^r U_m = \triangle^r U_0 + \triangle^{r+1} U_0 + \triangle^{r+1} U_1 + \triangle^{r+1} U_2 + \ldots + \triangle^{r+1} U_{m-1}$$

Wenn man in (5) r=1 und der Reihe nach m=0, 1, 2, ... n setzt, so erhält man folgende Relationen:

$$\triangle U_0 = \triangle U_0$$

$$\triangle U_1 = \triangle U_0 + \triangle^2 U_0$$

$$_2 = \triangle U_0 + \triangle^2 U_0 + \triangle^2 U_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$_{n-2} = \triangle U_0 + \triangle^2 U_0 + \triangle^2 U_1 + \ldots + \triangle^2 U_{n-4} + \triangle^2 U_{n-3}$$
$$_{n-1} = \triangle U_0 + \triangle^2 U_0 + \triangle^2 U_1 + \ldots + \triangle^2 U_{n-4} + \triangle^2 U_{n-3} + \triangle^2 U_{n-2}$$

Wenn man diese Gleichungen addirt und dabei die Relation (4) cksichtigt, so gelangt man zur folgenden Gleichung:

$$- U_0 = \binom{n}{1} \triangle U_0 + \binom{n-1}{1} \triangle^2 U_0 + \binom{n-2}{1} \triangle^2 U_1 + \ldots + \binom{2}{1} \triangle^2 U_{n-3} + \binom{1}{1} \triangle^2 U_{n-2} \qquad (6)$$

$$U_n - U_0 = \binom{n}{1} \triangle U_0 + E_2 \qquad (7)$$

$$E_2 = \binom{n-1}{1} \triangle^2 U_0 + \binom{n-2}{1} \triangle^2 U_1 + \ldots + \binom{2}{1} \triangle^2 U_{n-3} + \binom{1}{1} \triangle^2 U_{n-2} \qquad (8)$$

Wenn man auf dieselbe Art, wie oben in (5), der Reihe nach = 0, 1, 2, 3, . . . n—3, n—2, und r=2 setzt, so erhält man folle Gleichungen:

$$\triangle^2 U_0 = \triangle^2 U_0$$
$$\triangle^2 U_1 = \triangle^2 U_0 + \triangle^3 U_0$$
$$\triangle^2 U_2 = \triangle^2 U_0 + \triangle^3 U_0 + \triangle^3 U_1$$
$$\triangle^2 U_3 = \triangle^2 U_0 + \triangle^3 U_0 + \triangle^3 U_1 + \triangle^3 U_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\triangle^2 U_{n-3} = \triangle^2 U_0 + \triangle^3 U_0 + \triangle^3 U_1 + \triangle^3 U_2 + \ldots + \triangle^3 U_{n-5} + \triangle^3 U_{n-4}$$
$$\triangle^2 U_{n-2} = \triangle^2 U_1 + \triangle^3 U_0 + \triangle^3 U_1 + \triangle^3 U_2 + \ldots + \triangle^3 U_{n-5} + \triangle^3 U_{n-4} + \triangle^3 U_{n-3}$$

Diese Gleichungen, jede mit dem entsprechenden links stehenden tor multiplicirt, hierauf mit Berücksichtigung (8) und der Relation

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{2} + \ldots + \binom{m+n}{m} = \binom{m+n+1}{m+1} \qquad (9)^*$$

*) Sieh' *„Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach."* *wrzyniec Żmurko*. B. I. S. 129. (70).

addirt, geben folgende Relation:

$$E_2 = \binom{n}{2} \triangle^2 U_0 + \binom{n-1}{2} \triangle^3 U_0 + \binom{n-2}{2} D^3 U_1 + \ldots$$
$$+ \binom{3}{2} \triangle^3 U_{n-4} + \binom{2}{2} \triangle^3 U_{n-}$$

oder auch $\qquad E_2 = \binom{n}{2} \triangle^2 U_0 + E_3$

worin $E_3 = \binom{n-1}{2} \triangle^3 U_0 + \binom{n-2}{2} \triangle^3 U_1 + \ldots + \binom{2}{3} \triangle^3 U_{n-4}$
$$+ \binom{2}{2} \triangle^3 U_{n-3}$$

Um zu untersuchen, ob der Bau für jedes beliebige E_s die in E_2 und E_3 in Bezug auf $s = 2, 3$ zum Vorschein kommende gelmässigkeit besitzt, nehme man allgemein an

$$Es = \binom{n-1}{s-1} \triangle^s U_0 + \binom{n-2}{s-1} \triangle^s U_1 + \ldots + \binom{s}{s-1} \triangle^s U_{n-s-1}$$
$$+ \binom{s-1}{s-1} \triangle^s U_{n-s}$$

Auf Grund der Relation (5) erhält man folgende Gleichunge

$$\begin{array}{l|l}
\binom{n-1}{s-1} & \triangle^s U_0 = \triangle^s U_0 \\
\binom{n-2}{s-1} & \triangle^s U_1 = \triangle^s U_0 + \triangle^{s+1} U_0 \\
\binom{n-3}{s-1} & \triangle^s U_2 = \triangle^s U_0 + \triangle^{s+1} U_0 + \triangle^{s+1} U_1 \\
\binom{n-4}{s-1} & \triangle^s U_3 = \triangle^s U_0 + \triangle^{s+1} U_0 + \triangle^{s+1} U_1 + \triangle^{s+1} U_2 \\
\cdot & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\binom{s-1}{s} & \triangle^s U_{n-s-1} = \triangle^s U_0 + \triangle^{s+1} U_0 + \triangle^{s+1} U_1 + \triangle^{s+} \\
 & \qquad + \ldots + \triangle^{s+1} U_{n-s-3} + \triangle^{s+1} U_{n-s-} \\
\binom{s-1}{s-1} & \triangle^s U_{n-s} = \triangle^s U_0 + \triangle^{s+1} U_0 + \triangle^{s+1} U_1 + \triangle^{s+} \\
 & \quad + \ldots + \triangle^{s+1} U_{n-s-3} + \triangle^{s+1} U_{n-s-2} + \triangle^{s+1} U_{n-}
\end{array}$$

Diese Gleichungen, jede mit dem entsprechenden links stehe Faktor multiplicirt, hierauf mit Rücksicht auf die Relation (9) und addirt, geben folgende Gleichung:

$$E_s = \binom{n}{s} \triangle^s U_0 + E_{s+1}$$

worin E_{s+1} folgende Form hat

$$E_{s+1} = \binom{n-1}{s} \triangle^{s+1} U_0 + \binom{n-2}{s} \triangle^{s+1} U_1 + \ldots$$
$$+ \binom{s+1}{s} \triangle^{s+1} U_{n-s} + \binom{s}{s} \triangle^{s+1} U_{n-s+1}$$

Aus der Vergleichung der Relation (13) mit (11) ist ersicht dass die Relation (13) aus (11) auf dieselbe Art entsteht, wie 10 aus Es ist somit der regelmässige Bau des in der Rede stehenden druckes durch die Relation (11) sichergestellt.

Mit Hilfe der Relationen (7) und (13), indem man in (13) nach Reihe $s = 2, 3, 4, \ldots (r-1)$ setzt, gelangt man zum folgenden iema:

$$\begin{array}{lllll}
U_n & = & U_0 + \binom{n}{1} \triangle U_0 + E_2 \\
E_2 & = & \qquad \binom{n}{2} \triangle^3 U_0 + E_3 \\
E_3 & = & \qquad \binom{n}{3} \triangle^3 U_0 + E_4 \\
\cdot & & \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot & & \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot & & \qquad \qquad \cdot \qquad \cdot \\
E_{r-1} & = & \qquad \binom{n}{r-1} \triangle^{r-1} U_0 + E_r
\end{array}$$

Diese Gleichungen addirt geben

$$_n = U_0 + \binom{n}{1} \triangle U_0 + \binom{n}{2} \triangle^2 U_0 + \binom{n}{3} \triangle^3 U_0 + \ldots + \binom{n}{r-1} \triangle^{r-1} U_0 + E_r \tag{14}$$

rin

$$= \binom{n-1}{r-1} \triangle^r U_0 + \binom{n-2}{r-1} \triangle^r U_1 + \ldots + \binom{r-1}{r-1} \triangle^n U_{n-r} \tag{15}$$

§, 3.

Es sei

$$U_0 = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)$$

d es gehe U_μ in $U_{\mu+1}$ über, wenn jede von den *Variablen* um ein *crement* mehr bekommt. In dieser Bedeutung ist folgendes Schema verstehen:

$$\left.\begin{array}{l}
_0 = f(x_1, x_2, \ldots x_m) \\
_1 = f(x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; \ldots x_m + dx_m) \\
_2 = f(x_1 + 2dx_1, x_2 + 2dx_2, \ldots x_m + 2dx_m) \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
_{s-1} = f[x_1 + (s-1)\, dx_1, x_2 + (s-1)\, dx_2, \ldots \\
\qquad\qquad\qquad x_m + (s-1)\, dx_m] \\
J_s = f(x_1 + sdx_1, x_2 + sdx_2, \ldots x_m + sdx_m)
\end{array}\right\} \tag{16}$$

Aus dem Baue des vorliegenden Schema ist leicht einzusehen, ass die Differenz

$$\left.\begin{aligned} U_s - U_{s-1} = f\,\{&[x_1 + (s-1)dx_1 + dx_1],\ [x_2 + (s-1)dx_2 \\ &+ dx_2],\ \ldots\ [x_m + (s-1)dx_m + dx_m]\} \\ - f\,\{&[x_1 + (s-1)dx_1],\ [x_2 + (s-1dx_2],\ \ldots \\ &[x_m + (s-1)dx_m]\} \\ = dU_{s-1} \end{aligned}\right\} (1$$

als Totaldifferential anzusehen ist, wobei U_{s-1} als ursprüngliche u U_s als veränderte Funktion betrachtet werden muss.

Da $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, unabhängige *Variablen* sind, so steht uns frei die Veränderungen $dx_1, dx_2, dx_3, \ldots dx_m$ einem beliebig Gesetze zu unterwerfen. Setze man nun fest, dass

$$n dx_1 = h_1,\ n dx_2 = h_2,\ n dx_3 = h_3,\ \ldots\ n dx_m = h_m \qquad (1$$

wo $h_1, h_2, h_3, \ldots h_m$ endliche *Incremente* sind, so hat man unmitt bar aus (18)

$$dx_1 = \frac{h_1}{n},\ dx_2 = \frac{h_2}{n},\ dx_3 = \frac{h_3}{n},\ \ldots\ dx_m = \frac{h_m}{n} \qquad (1$$

das Totaldifferential von U ist bekanntlich

$$dU = \frac{dU}{dx_1} dx_1 + \frac{dU}{dx_2} dx_2 + \frac{dU}{dx_3} dx_3 + \ldots + \frac{dU}{dx_m} dx_m$$

$$= \left[\frac{d}{dx_1} dx_1 + \frac{d}{dx_2} dx_2 + \frac{d}{dx_3} dx_3 + \ldots + \frac{d}{dx_m} dx_m\right] U$$

Mit Rücksicht auf (19) kann man die unmittelbar vorhergehen Gleichung folgendermassen gestalten

$$dU + \frac{1}{n}\left[\frac{d}{dx_1} h_1 + \frac{d}{dx_2} h_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m} h_m\right] U = \frac{1}{n} DU$$

worin $$D = \frac{d}{dx_1} h_1 + \frac{d}{dx_2} h_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m} h_m \qquad (2$$

Das zweite Totaldifferential von U ist

$$d^2U = d\,(dU) = \frac{1}{n}\left[\frac{d}{dx_1} h_1 + \frac{d}{dx_2} h_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m}\right]$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{d}{dx_1} h_1 + \frac{d}{dx_2} h_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m} h_m\right] U =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[\frac{d}{dx_1} h_1 + \frac{d}{dx_2} h_2 + \ldots + \frac{d}{dx_m}\right]{}^2 U = \frac{1}{n^2} D^2U$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$\left.\begin{aligned} d^3U &= \frac{1}{n^3} D^3U \\ d^4U &= \frac{1}{n^4} D^4U \\ &\;\;\vdots \\ d^sU &= \frac{1}{n^s} D^sU \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Was man mit U gemacht hat, dasselbe lässt sich mit jeder der unktionen $U_0\ U_1\ U_2 \ldots U_m$ machen.

Nun bilde man folgendes Schema

$$\left.\begin{array}{cccccc} U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & \ldots \\ \frac{DU_0}{n}, & \frac{DU_1}{n}, & \frac{DU_2}{n}, & \frac{DU_3}{n}, & \frac{DU_4}{n} & \ldots \\ \frac{D^2U_0}{n^2}, & \frac{D^2U_1}{n^2}, & \frac{D^2U_2}{n^2}, & \frac{D^2U_3}{n^2}, & \frac{D^2U_4}{n^2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{D^sU_0}{n^s}, & \frac{D^sU_1}{n^s}, & \frac{D^sU_2}{n^s}, & \frac{D^sU_3}{n^s}, & \frac{D^sU_4}{n^s} & \ldots \end{array}\right\} \tag{22}$$

velches nach dem im (3) bereits angegebenen Gesetze gebaut ist.

Laut des im (16) beobachteten Bildungsgesetzes geht U_0 in U_n iber, wenn man U_0 n *Incremente* annehmen lässt. Es ist somit mit Berücksichtigung der Relationen (19), (22), (14) und (15), wenn man las erste Glied U statt U_0 schreibt

$$U_n = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_m + h_m) =$$

$$= U + \binom{n}{1}\frac{DU}{1!} + \binom{n}{2}\frac{D^2U}{2!} + \ldots + \binom{n}{r-1}\frac{D^{r-1}U}{(r-1)!} + E_r \tag{23}$$

$$\text{und } E_r = \left[\binom{n-1}{r-1} D^rU_0 + \binom{n-2}{r-1} D^rU_1 + \ldots + \binom{r-1}{r-1} D^rU_{n-1}\right]\frac{1}{n^r} \tag{24}$$

worin **n** sehr gross ist.

Um die *Coëfficienten* der im (23) enthaltenen Ausdrücke zu be-
stimmen, entwickele man das Symbol $\binom{n}{r}$ mit der Voraussetzung, da
$n = \infty$

$$\binom{n}{r}_{n=\infty} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,[n-(r-1)]}{r!}$$

In den Faktoren, welche den Zähler bilden, verschwinden 1, 2,
3, . . . (r—1) bei unendlich grossem n, daher

$$\binom{n}{r}_{n=\infty} = \frac{n^r}{r!} \qquad (25)$$

daraus
$$\frac{\binom{n}{r}}{n^r} = \frac{1}{r!} \qquad (26)$$

Auf Grund der Relation (26) nimmt der Ausdruck (23) für U
folgende Form an.

$$U_n = U + \frac{DU}{1!} + \frac{D^2U}{2!} + \frac{D^3U}{3!} + \ldots + \frac{D^{r-1}U}{(r-1)!} + E_r \quad (27)$$

Unter der Voraussetzung, dass $r = \infty$, d. h. dass U_n sich in ein
unendliche Reihe entwickeln lässt, kann man dem U_n auch folgend
symbolische Form geben:

$$U_n = e^D U \qquad (28)$$

Die in (27) und (28) entwickelten Relationen bilden den allge-
meinsten Ausdruck des Taylor'schen Lehrsatzes. Dieselbe zeigen di
Art an, wie man eine endliche Veränderung einer Funktion mittels
endlicher Veränderungen der unabhängigen *Variablen* und der Partial
Differentialquotienten dieser Funktion bestimmen kann.

§. 4.

Damit die mittelst des Taylor'schen Satzes zu bestimmende Funk-
tion einen endlichen Werth habe, muss jeder der successiven partielle
Differentialquotienten für alle zwischen den Grenzen $x_1\ x_2\ \ldots\ x_m$
und $x_1 + h_1,\ x_2 + h_2,\ \ldots\ x_m + h_m$ liegende *Incremente* einen end-
lichen und angebbaren Wert haben d. h. die Funktion sammt ihre
Differentialquotienten müssen stetige Funktionen sein, und E_r um s
mehr gegen die Nulle corvergiren, je grösser *r* wird.

Diese aus der Natur der Sache sich ergebende Bedingung bildet ıgleich Hauptmerkmale für die Brauchbarkeit des Taylor'schen Satzes.

Das Ergänzungsglied (24) besteht aus einer unendlich grossen nzahl von Gliedern; man muss daher demselben eine zur Beurtheiıng seines Wertes entsprechende Form geben.

a) In einem jeden Addenden der Relation (24) kommt als Faktor in Ausdruck von der Form $D^r U_{\Theta n}$ vor, worin Θ folgende echte Brüche $, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-r}{n}$ repräsentirt. Wenn das Ergänzungsglied eine endiche und bestimmte Grösse sein soll, so muss $D^r U_{\Theta n}$ für alle Werte on $\Theta = 0$ bis $\Theta = 1$ stetig sein. Unter diesen Differentialquotienten sind venigstens zwei, von denen der eine numerisch am grössten und der ındere am kleinsten ist. Bezeichne man den ersteren mit $D^r U_g$, den etzteren mit $D^r U_k$ und substituire in der Relation (24) durchgehends uerst mit $D^r U_g$ und dann $D^r U_k$ statt $D^r U_0$, $D^r U_1$, $D^r U_2$, . . . so ist eicht zu verstehen, dass

$$E_r < \frac{D^r U_g}{n^r}\left[\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \ldots + \binom{r-1}{r-1}\right]$$

oder mit Rücksicht auf (9)

$$E_r < \frac{D^r U_g}{n^r}\binom{n}{r}$$

und auf Grund der Relation (26)

$$E_r < \frac{D^r U_g}{r!} \tag{29}$$

Dieselbe Schussweise befolgend, erhält man

$$E_r > \frac{D^r U_k}{r!} \tag{30}$$

Aus (29) und (30) ergibt sich, dass

$$\frac{D^r U_g}{r!} > E_r > \frac{D^r U_k}{r!} \tag{31}$$

Der Ausdruck $D^r U_g$ und $D^r U_k$ lässt sich aus der oben genannten allgemeinen Form $D^r U_{\Theta n}$ ableiten, wenn man dem Θ den Wert $\frac{g}{n}$ und $\frac{k}{n}$ gibt. Es muss also ein gewisser Wert für Θ sein, welcher folgende Bedingung erfüllen muss

$$E_r = \frac{D^r U_{\Theta n}}{r!} \tag{32}$$

Der Ausdruck (32) lässt sich mit Rücksicht auf (16) in folgender Gestalt schreiben

$$E_r = \frac{D^r}{r!} f(x_1 + \Theta n dx_1,\ x_2 + \Theta n dx_2,\ \ldots\ x_m + \Theta n dx_m)$$

oder

$$E_r = \frac{D^r}{r!} f(x_1 + \Theta h_1,\ x_2 + \Theta h_2,\ \ldots\ x_m + \Theta h_m) \qquad (33)$$

Diese der Beurtheilung des Ergänzungsgliedes zugängliche Form hat *Lagrange* gegeben.

b) dem Ergänzungsgliede kann man noch eine andere Form geben. Da wir im Ausdrucke (24) vorausgesetzt haben, dass $n = \infty$, so ist es auf Grund (25) gestattet zu schreiben z. B. das Symbol

$$\binom{n-1}{r-1} = \frac{(n-1)^{r-1}}{(r-1)!}$$

wenn ausser dieser Voraussetzung noch die oberen Zahlen in den Symbolen von der Form $\binom{n}{m}$ die unteren in numerischer Beziehung unendlich übertreffen. Dies ist gerade hier der Fall, da diejenigen Glieder, in denen die obere Zahl der genannten Symbole eine endliche ist, in endlicher Anzahl vorkommen, somit eine endliche Summe geben, welche bei unendlich grossen Anfangsgliedern und dazu noch bei ihrer unendlich grossen Anzahl, ohne die Richtigkeit des Ergänzungsgliedes zu stören, vernachlässigt werden kann.

Auf Grund dieser Bemerkung erhält man

$$E_r = \frac{1}{n^r} D^r U_m \binom{n-1-m}{r-1}\Bigg|_{m=0}^{m=n-r} = \frac{1}{n^r} D^r U_m \frac{(n-1-m)^{r-1}}{(r-1)!}\Bigg|_{m=0}^{m=n-r}$$

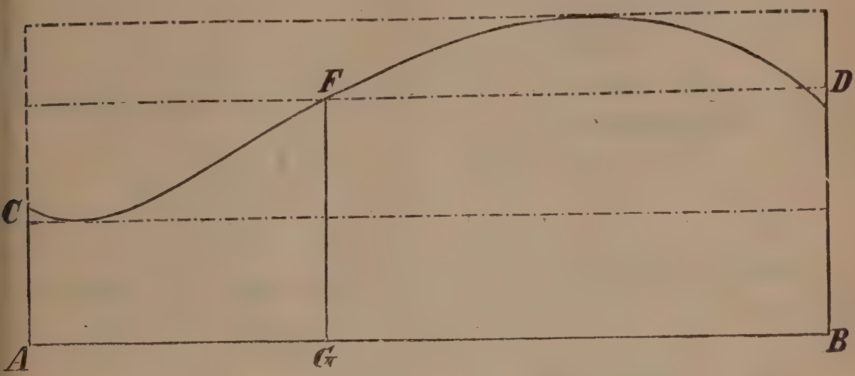
$$E_r = \frac{1}{n} D^r U_m \frac{\left(1-\frac{1+m}{n}\right)^{r-1}}{(r-1)!}\Bigg|_{m=0}^{m=n-r} = \frac{1}{n} D^r U_m \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1!}\Bigg|_{m=0}^{m=n-r} \qquad (34)$$

worin $\frac{1+m}{n} = \Theta$, und daraus $m = \Theta n - 1$. Substituire man im (34) für *m* den Wert $\Theta n - 1$, so ergibt sich folgende Relation:

$$E_r = \frac{1}{n} D^r U_{\Theta n-1} \frac{(1-\theta)^{r-1}}{(r-1)!}\left|\begin{array}{l} \Theta = \frac{1}{n} + 1 - \frac{r}{n}\Big|_{n=\infty} = 1 \\ \Theta = \frac{1}{n}\Big|_{n=\infty} = 0 \end{array}\right. \qquad (35)$$

Um die Summe aller in (35) enthaltenen Ausdrücke zu bestimmen, muss man Θ alle zwischen 0 und 1 liegende Werte durlaufen

ssen. Es sei AB = 1 in n gleiche Theile getheilt. In jedem Theingspunkte errichte man entsprechende Ordinate, die sich auf Grund es Θ Wertes aus dem Ausdrucke $D^r U_{\Theta n-1} \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!}$ ergibt. Verbinde an hierauf die Endpunkte aller Ordinaten, so entsteht auf diese Weise in Flächenraum ABDFC, dessen Inhalt den Wert für das in der Rede



stehende Ergänzungsglied darstellt. Dieser Flächenraum kann einem Rechtecke gleichgesetzt werden, dessen Basis AB = 1 und dessen Höhe die mittlere Ordinate $D^r U_{\Theta n-1} \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!} = FG$ ist (NB. für einen gut gewählten Wert Θ).

Das Ergänzungsglied ist somit

$$E_r = AB.\, FG = 1.\ FG = \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!}\ D^r U_{\Theta n-1}$$

oder
$$E_r = \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f\,[x_1 + (\Theta n-1)\,dx_1,\ x_2 + (\Theta n-1)\,dx_2,\ \ldots x_m + (\Theta n-1)\,dx_m]$$

$$E_r = \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f\,(x_1 + \Theta h_1 - dx_1,\ x_2 + \Theta h_2 - dx_2,\ \ldots x_m + \Theta h_m - dx_m)$$

Da aber $dx_1, dx_2, \ldots dx_m$ gegen $x_1 + \Theta h_1$, $x_2\ \Theta h_2, \ldots x_m + \Theta h_m$ vernachlässigbare Werte sind, so erhält man endlich die von *Cauchy* dem Ergänzungsgliede gegebene Form.

$$E_r = \frac{(1-\Theta)^{r-1}}{(r-1)!} D^r f\,(x_1 + \Theta h_1, + x_2 + \Theta h_2, \ldots, x_m + \Theta h_m) \quad (36)$$

c) Die dritte Form des Ergänzungsgliedes, die eben zu ermitteln ist, gehört dem *D'Alembert*.

Setze man in der Relation (35)

$$1 - \frac{1+m}{n} = z \tag{37}$$

so ist auch $\quad 1 - \frac{2+m}{n} = z - \frac{1}{n} = z + dz$

wo $\quad dz = -\frac{1}{n}$

Aus (37) hat man

$$m = n\,(1-z) - 1 \tag{38}$$

Um neue Grenzen für den Ausdruck (35) zu finden beachte man folgende Zusammenstellung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{wenn } m = 0 \text{ so ist } z = 1 - \frac{1}{n}\Big|_{n=\infty} = 1 \\ \;\;\text{„}\;\; m = 1 \;\;\text{„}\;\;\text{„}\;\; z = \frac{r-1}{n}\Big|_{n=\infty} = 0 \end{array}\right\} \tag{39}$$

Mit Rücksicht auf (37), (38) und (39) nimmt (35) folgende Gestalt an:

$$E_r = - dz\, D^r U_{n\,(1-z)-1} \frac{z^{r-1}}{(r-1)!}\Bigg|_{z=1}^{z=0}$$

oder
$$E_r = - \int_1^0 dz \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} D^r U_{n\,(1-z)-1} \tag{40}$$

Da aber in der Relation

$$U_{n\,(1-z)-1} = f\,[x_1 + n\,(1-z)\,dx_1 - dx_1, \ldots \\ x_m + n\,(1-z)\,dx_m - dx_m]$$

$-dx_1$, $-dx_2$, ... $-dx_m$ vernachlässigbare Werte sind, so ist $U_{n\,(1-z)-1} = f\,[x_1 + (1-z)\,h_1, \ldots x_m + (1-z)\,h_m]$

Auf Grund der letzten Relation erhält man aus (40)

$$E_r = - \int_1^0 dz \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} D^r\, f\,[x_1 + (1-z)\,h_1, \ldots x_m + (1-z)\,h_m]$$

Nach der Umkehrung der Grenzen hat man endlich die Relation

$$E_r = \int_0^1 dz \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} D^r\, f\,[x_1 + (1-z)\,h_1, \ldots x_m + (1-z)\,h_m] \tag{41}$$

welche *D'Alemberts* Restform heisst.

d) Wenn man im (27) die Reihe nur bis D^{r-2} entwickelt und die
mme aller übrigen Glieder mit E_{r-1} bezeichnet, so hat man

$$U_n = U + \frac{DU}{1!} + \frac{D^2U}{2!} + \ldots + \frac{D^{r-2}U}{(r-2)!} + E_{r-1} \tag{42}$$

laut (33)

$$E_{r-1} = \frac{D^{r-1}}{(r-1)!} f(x_1 + \Theta h_1, \ldots x_m + \Theta h_m)$$

Wenn man zu der linken Seite der Reihe (42) folgende identische
leichung

$$\frac{D^{r-1}U}{(r-1)!} - \frac{D^{r-1}}{(r-1)!} f(x_1, x_2, \ldots x_m) = 0$$

ldirt, so nimmt (42) folgende Gestalt an:

$$U_n = U + \frac{DU}{1!} + \frac{D^2U}{2!} + \ldots + \frac{D^{r-2}U}{(r-2)!} + \frac{D^{r-1}U}{(r-1)!}$$
$$+ \frac{D^{r-1}}{(r-1)!}[f(x_1 + \Theta h_1, \ldots x_m + \Theta h_m), - f(x_1, x_2, \ldots x_m)]$$

Aus der Vergleichung dieser Reihe mit (27) folgt, dass

$$E_r = \frac{D^{r-1}}{(r-1)!} f[x_1 + \Theta h_1, \ldots x_m + \Theta h_m) - f(x_1, x_2, \ldots x_m)] \tag{43}$$

Diese Restform hat *Sturm* gegeben.

Die Relationen (33), (36), (41), (43) stellen das Ergänzungsglied
ir beliebige Anzahl der *Variablen* in verschiedenen Formen dar. Sehr
infach gestalten sich diese Formen für eine *Variable*. Man erhält die-
elben, indem man beachtet, dass in dem Falle

$$D = \frac{d}{dx} h$$
$$U = f(x)$$
$$U_n = f(x + ndx) = f(x + h)$$
$$\frac{d^s f(x)}{dx^s} = f_s(x)$$

Man hat also

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f_1(x) + \frac{h^2}{2!} f_2(x) + \ldots + \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} f_{r-1}(x) + E_r \tag{44}$$

vorni

$$E_r = \frac{h^r}{r!} f_r(x + \Theta h) \tag{45}$$

$$E_r = \frac{(1-\Theta)^{r-1}h^r}{(r-1)!} f_r (x + \Theta h) \qquad (4$$

$$E_r = \frac{h^r}{r!} \int_0^1 dz\ z^{r-1}\ f_r [x + (1-z)\ h] \qquad (4$$

$$E_r = \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} [f_{r-1} (x + \Theta h) - f_{r-1} (x)] \qquad (4$$

Schlömilch und *Rouché* haben auch eine allgemeinere Form de Ergänzungsgliede aber nur für eine *Variable* gegeben, welche hier bl angeführt wird:

$$E_r = \frac{(1-\Theta)^{r-p}h^r}{p\,(r-1)!} f_r (x + \Theta h) \qquad (49)$$

Allgemeiner ist die Form (49) darum, weil dieselbe die Forme (45) und (46) als spezielle Fälle umfasst, denn für r=p und p=1 e hält man aus (49) beziehungsweise

$$E_r = \frac{h^r}{r(r-1)!} f_r (x + \Theta h) = \frac{h^r}{r!} f_r (x + \Theta h)$$

und $E_r = \dfrac{(1-\Theta)^{r-1}h^r}{(r-1)!} f_r (x + \Theta h)$

§. 5.

Nicht alle Funktionen lassen sich auf Grund des Taylor'sche Lehrsatzes in eine unendliche Reihe entwickeln. Es gibt Funktione deren nur r erste Differentialqnotienten die Bedingungen der Brauch barkeit der Taylor'schen Reihe erfüllen und der $(r+1)$te Differentia quotient für die zwischen gewissen Grenzen liegenden Werte unendlic wird. Bei solchen Funktionen hat der Taylor'sche Satz seine Gel tung nur für die Anfangsglieder bis zum r-ten Differentialquotiente inclusive.

Beispielweise nehme man folgende Funktion:

$$f(x) = (x-x_0)^\mu\ \varphi(x) + \psi(x) \qquad (5$$

wo μ ein positiver Bruch ist und die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ samm

---

*) Die Entwickelung dieser Restform siehe: „*Compendium der höhere Analysis von Dr. Oskar Schlömilch.*" B. I. §. 18 und 44.

en Differentialquotienten jeder Ordnung für alle zwischen x_0 und $+h$ inclusive liegende Werte endlich und stetig sind. Bezeichne man t m die grösste ganze in μ enthaltene Zahl so, dass

$$m < \mu < m + 1 \qquad (51)$$

d bestimme folgende succesive Differentialquotienten bis zur r-ten dnung:

$$x) = \mu (x - x_0)^{\mu - 1} \varphi(x) + (x - x_0)^{\mu} \varphi_1(x) + \psi_1(x)$$

$$x) = \mu (\mu - 1) (x - x_0)^{\mu - 2} \varphi(x) + 2\mu (x - x_0)^{\mu - 1} \varphi_1(x) + (x - x_0)^{\mu} \varphi_2(x) + \psi_2(x)$$

$$\vdots$$

$$x) = \mu (\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - r + 1)(x - x_0)^{\mu - r} \varphi(x) + \ldots + \psi_r(x)$$

r den Wert $x = x_0$ und solange $r < m$ hat man

$$f(x) = \psi(x)$$
$$f_1(x) = \psi_1(x)$$
$$f_2(x) = \psi_2(x)$$
$$\vdots$$
$$f_r(x) = \psi_r(x)$$

Ist nun $r > m$, sodann hat man z. B. für $r = m + 1$

$$_{m+1}(x) = \frac{\mu (\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - m)}{(x - x_0)^{1 - (\mu - m)}} \varphi(x) + \ldots$$

Mit Rücksicht auf die Voraussetzung (51) ist der erste rechtsste-ende Ausdruck in obiger Gleichung und hiemit auch $f_{m+1}(x)$ für $x = x_0$ nendlich gross. Daraus ergibt sich, dass der Taylor'sche Satz seine eltung verliert, sobald m die Bedingungen (51) nicht erfüllt.

Es muss noch bemerkt werden, dass der Taylor'sche Lehrsatz uch in dem Falle zu unrichtigen Resultaten führen muss, wenn man er Grundvariablen einen ausserhalb der Grenzwerte x_0 und $x_0 + h$ iegenden Wert gibt, da es sehr leicht eintreten kann, dass entweder lie Funktion selbst oder einer ihrer Differentialquotienten unendlich rscheint. Sobald die Funktion sammt allen Differentialquotienten in-erhalb bestimmter Grenzwerte für jede Grundvariable endlich und

stetig ist, kann der Taylor'sche Lehrsatz auf beliebige Anzahl v Gliedern ausgebreitet werden. Je mehr Glieder man in Rechnung nimm desto mehr nähert man sich dem wahren Werte $f(x+h)$, wo *h* e endliches *Increment* der Grundvariablen bedeutet. Wenn man aber d Taylor'schen Lehrsatz eine unendliche Anzahl von Gliedern annehme lässt so, dass im letzten Gliede der Faktor $f_{r=\infty}(x)$ erscheint, da hat diese Entwickelung zum Grenzwerte $f(x+h)$.

Unter der unmittelbar vorangehenden Voraussetzung erhält m die so genannte Taylor'sche Reihe.

Wenn die gegebene Funktion sammt allen Differentialquotiente zwischen x_0 und x_0+h endlich und stetig ist, lässt sich leicht zeige dass das Ergänzungsglied in jeder der angeführten Formen sich de Nullwerte nähert. Jede der Restformen ist ein Produkt aus zwei Fakt ren, von denen der erste $\frac{h^r}{r!}$ oder $\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}$ ist und der zweite so bescha fen ist, dass derselbe auf Grund der gemachten Voraussetzung ein endlichen Wert hat. Um zu zeigen, dass $\frac{h^r}{r!}$ oder $\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}$ für r = sich dem Nullwerte nähert, ziehe man folgende identische Gleichu zur Hilfe:

$$s\,(r-s+1) = \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{r+1}{2} - s\right)^2$$

Der Wert dieses Ausdruckes wächst, wenn man statt s alle zw schen 1 und $\frac{r}{2}$ liegende ganze Zahlen setzt.

Es ist somit:

$$1.r < 2\,(r-1) < 3\,(r-2)\;.\;.\;. < \tfrac{r}{2}\left(r-\tfrac{r+2}{2}\right)$$

oder

$$\begin{aligned}
1.r &= 1.r \\
2.(r-1) &> r \\
3.(r-2) &> r \\
4.(r-3) &> r \\
&\;\vdots \\
\tfrac{r}{2}\left(r-\tfrac{r+2}{2}\right) &> r
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$1.\;2.\;3.\;.\;.\;.\;\tfrac{r}{2}\left(\tfrac{r}{2}+1\right)\;.\;.\;.\;(r-3)\,(r-2)\,(r-1)\,r > r^{\frac{r}{2}}$$

oder $\quad r! > r^{\frac{r}{2}}$

Dividire man h^r zuerst durch $r!$ und dann durch
-, so erhält man $\frac{h^r}{r!} < \frac{h^r}{r^{\frac{r}{2}}}$ oder $\frac{h^r}{r!} < \left(\frac{h}{\sqrt{r}}\right)$

Da aber $\frac{h}{\sqrt{r}}$ für $r = \infty$ und für ein endliches h sich dem Null-
rte nähert, um so mehr lässt sich diess von $\left(\frac{h}{\sqrt{r}}\right)^2$ also auch von $\frac{h^r}{r!}$
gen.

Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass auch der Ausdruck $\frac{h^{r-1}}{(r-1)!}$ sich dem Nullwerte nähert, je grösser r wird. Das Ergänzungs-
ied, welches aus zwei Faktoren besteht, von denen der eine endlich
d der andere verschwindend klein ist, nähert sich auch dem Null-
rte d. h.

$$\lim E_{r=\infty} = 0$$

Wenn man eine Funktion, welche sammt ihren r ersten Differen-
alquotienten für jeden zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegenden Wert end-
ch und stetig ist, nach dem Taylor'schen Satze entwickelt und die
ntwickelung mit einem von Null verschiedenen Gliede schliesst, so
ähert sich das Verhältniss des Ergänzungsgliedes zum unmittelbar
orangehenden Gliede dem Nullwerte, wenn es auch h thut. Man er-
ält aus (44), wenn man $f(x) = U_0$ und $\frac{h^s}{s!} f_s(x) = U_s$ setzt

$$f(x + h) = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{r-1} + E_r$$
$$f(x + h) = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{r-2} + E_{r-1}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$E_r = E_{r-1} - U_{r-1}$$
$$\frac{E_r}{U_{r-1}} = \frac{E_{r-1} - U_{r-1}}{U_{r-1}}$$

Mit Rücksicht auf (45) und auf die obige Bezeichnung ist

$$\frac{E_r}{U_{r-1}} = \frac{f_{r-1}(x + \Theta h) - f_{r-1}(x)}{f_{r-1}(x)} \qquad (53)$$

Der Zähler des Ausdruckes (53) nähert sich auf Grund der Vor-
ussetzung dem Nullwerte mit dem abnehmenden h. Da aber der Nen-
er endlich ist, so ist

$$\lim \frac{E_r}{U_{r-1}} = 0$$

Um dem Taylor'schen Satze eine zur Entwickelung der Funktio-

nen bequeme Form zu geben, setze man in (44) . . . (48) und (4[illegible]
$x = \alpha$, und $h = x - \alpha$; dann hat man

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f_1(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f_2(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{r-1}}{(r-1)!} + E_r \tag{54}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= \frac{(x-\alpha)^r}{r!} f_r[\alpha + \Theta(x-\alpha)] \\
E_r &= \frac{(1-\Theta)^{r-1}(x-\alpha)^r}{(r-1)!} f_r[\alpha + \Theta(x-\alpha)] \\
E_r &= \frac{(x-\alpha)^r}{(r-1)!} \int_1^0 dz\, z^{r-1} f_r[\alpha + (1-z)(x-\alpha)] \\
E_r &= \frac{(x-\alpha)^{r-1}}{(r-1)!} [f_{r-1}[\alpha + \Theta(x-\alpha)] - f_{r-1}(\alpha)] \\
E_r &= \frac{(1-\Theta)^{r-p}(x-\alpha)^r}{p\,(r-1)!} f_r[\alpha + \Theta(x-\alpha)]
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Setzt man in den obigen Ausdrücken $\alpha = o$, wobei vorausgesetzt wird, dass dieser Wert für die *Variable* zwischen den Grenzen x_0 und $x_0 + h$ liegt, so erhält man:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f_1(0) + \frac{x^2}{2!} f_2(0) + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} f_{r-1}(0) + E_r \tag{56}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= \frac{x^r}{r!} f_r(\Theta x) \\
E_r &= \frac{(1-\Theta)^{r-1} x^r}{(r-1)!} f_r(\Theta x) \\
E_r &= \frac{x^r}{(r-1)!} \int_0^1 dz\, z^{r-1} f_r[(1-z)x] \\
E_r &= \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} [f_{r-1}(\Theta x) - f_{r-1}(0)] \\
E_r &= \frac{(1-\Theta)^{r-p} x^r}{p\,(r-1)!} f_r(\Theta x)
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Diese Form des Taylor'schen Satzes kommt von *Maclaurin*.

Sobald aber bei einer Funktion die im (52) ausgesprochene Be-
igung erfüllt ist, dann verwandelt sich (54) und (56) in eine unend-
he nach steigenden Potenzen des Binoms (x—a) und respective der
undvariablen geordnete convergente Reihe und zwar:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f_1(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f_2(\alpha) \\ &\qquad + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} f^3(\alpha) + \dots \\ (x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f_1(0) + \frac{x^r}{2!} f_2(0) + \frac{x^3}{3!} f_3(0) + \dots \end{aligned}\right\} (58)$$

Die Grösse Θ, von der man bis nun zu nur so viel weiss, dass
$< \Theta < 1$, lässt sich in engere Grenzen einschliessen, sobald die
nktion die Bedingungen (52) erfüllt. Schliesst man die unendliche
eihe (58) mit dem r-ten Gliede, so begeht man einen Fehler, dessen
rösse:

$$E_r = \frac{x^r}{r!} f_r(\Theta x)$$

Mit Rücksicht auf die zweite Reihe (58) ist:

$$\begin{aligned} (\Theta x) &= f_r(0) + \frac{\Theta x}{1!} f_{r+1}(0) + \frac{\Theta^2 x^2}{2!} f_{r+2}(0) + \dots \\ &\qquad + \frac{\Theta^n x^n}{n!} f_{r+n}(0) + \dots \end{aligned}$$

ie zweite Reihe (58) kann auch folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} (x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f_1(0) + \frac{x^2}{2!} f_2(0) + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} f_{r-1}(0) \\ &\quad + \frac{x^r}{r!} f_r(0) + \frac{x^{r+1}\Theta}{r!\ 1!} f_{r+1}(0) + \dots + \frac{x^{r+n}\Theta^n}{r!\ n!} f_{r+n}(0) + \dots \end{aligned}$$

Die letzte Entwickelung ist identisch mit:

$$\begin{aligned} (x) &= f(0) + \frac{x}{1!} f_1(0) + \frac{x^2}{2!} f_2(0) + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} f_{r-1}(0) \\ &\qquad + \frac{x^r}{r!} f_r(0) + \dots + \frac{x^{r+n}}{(r+n)!} f_{r+n}(0) + \dots \end{aligned}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{x^{r+n}\Theta^n}{r!\ n!} = \frac{x^{r+n}}{(r+n)!}$$

somit
$$\Theta^n = \frac{r!\ n!}{(r+n)!} = \frac{n!}{(r+1)\ (r+2)\ .\ .\ .\ (r+n)}$$

endlich
$$\Theta = \sqrt[n]{\frac{n!}{(r+1)\ (r+2)\ .\ .\ .\ (r+n)}} \tag{59}$$

woraus ersichtlich ist, dass $\frac{1}{r+1} < \Theta < 1.$

Lemberg am 30. Juni 1879.

Ignaz Tychowicz.

Schulnachrichten.

I. Der Lehrkörper.

Direktor.

mbros von **Janowski**, Ph. Dr., k. k. Schulrath, Landtags- und Reichsraths-Abgeordneter.

Professoren.

chechtel Wilhelm, lehrte Deutsch, Geographie und Geschichte in der VII. Klasse; wöchentlich 6 Stunden.

mbros von **Rechtenberg Josef**, Custos des Naturalien-Cabinets, lehrte die Naturgeschichte in der I. a., I. b., I. c., I. d., V. a., V. b., VI. Kl., dann Mathematik in der IV. a. Kl, wöchentich 17 Stunden.

dlof Franz, lehrte Latein in der V b. Kl., Griechisch in der V. a. und VII. Kl., dann Deutsch in der V. a. Kl., wöchentlich 17 Stunden.

ayli Theophil, lehrte Latein in der V. a. und VII. Kl., dann Griechisch in der III. b. Kl., wöchentlich 16 Stunden.

harski Eugen, lehrte Geographie und Geschichte in der II. a., II. c., III. b, IV. a. und VIII. Kl., wöchentlich 19 Stunden.

erstmann Theophil, Ph. Dr., lehrte Deutsch in der V. b., VI. und VIII. Kl., Geographie und Geschichte in der I. c., V. b. und VI. Kl., wöchentlich 18 Stunden.

ewicki Josef, Dr. der Theologie, gr. kath. Weltpriester, Consistorial-Rath und Examinator bei den theolog. Rigorosen-Prüfungen an der hiesigen Universität, lehrte die Religion in allen acht Klassen und in der Vorbereitungs-Klasse, wöchentlich 18 Stunden.

rzegorczyk Franz, lehrte Polnisch in der V. a., VI., VII. und VIII. Kl., dann Propädeutik in der VII. und VIII. Kl., wöchentlich 16 Stunden.

Kiszakiewicz Manuel, lehrte Latein in der IV. a. Kl., Griechisch in der IV. a. und VI. Kl., Deutsch in der III. b. Kl., wöchentlich 18 Stunden.

Sywulak Nikolaus, Custos des physikalischen Cabinets, lehrte Math matik in der III. b., IV. b., VI. und VIII. Kl., Physik in der I b., VII. und VIII. Kl., wöchentlich 20 Stunden.

Zur Dienstleistung zugewiesen:

Morowski Andreas, Ph. Dr., Professor des Lemberger akademische Gymnasiums, lehrte Latein in der IV. b. und VI. Kl., Griechis in der III. a. Kl., wöchentlich 17 Stunden.

Krystyniacki Johann, Professor des Lemberger Franz-Joseph's-Gymna siums, lehrte Latein in der III. a. Kl., Griechisch in der IV. und VIII. Kl., Deutsch in der III. a. Kl., wöchentlich 18 Stunde

Lehrer.

Schnitzel Klemens, lehrte Latein in der VIII. Kl., Deutsch in der Vo bereitungs-Klasse, wöchentlich 15 Stunden.

Fischer Kornel, lehrte Latein in der III. b. Kl., Griechisch in der b. Kl., Deutsch in der IV. a. und IV. b. Kl., wöchentlich 17 S

Supplenten.

Korzeniowski Stanislaus, röm. kath. Weltpriester, Pfarrer hierselbs lehrte Religion in allen acht Klassen und in der Vorbereitung Klasse, wöchentlich 18 Stunden.

Domin Karl, lehrte Latein in der II. a. Kl., Deutsch in der II. a. K Polnisch in der I. c. und II. a. Kl., wöchentlich 18 Stunden.

Kostecki Johann, gr. kath. Weltpriester, lehrte Mathematik in der I. V. a., V. b. und VII. Kl., Physik in der III. b. und IV. a. K wöchentlich 19 Stunden.

Kubisztal Stanislaus, Ph. Dr., lehrte Polnisch in der IV. b. Kl., Ge graphie und Geschichte in der I. a., I. b., I. d., IV. b. und V. Kl., wöchentlich 20 Stunden.

Terlikowski Franz, lehrte Latein in der II. c. Kl., Deutsch in der I. und II. c. Kl., Polnisch in der II. c. Kl., wöchentlich 19 Stunde

Vetulani Roman, lehrte Latein und Deutsch in der II. b. Kl., Polnis in der I. d. Kl., wöchentlich 15 Stunden.

Drewnicki Hippolit, lehrte Ruthenisch in der Vorbereitungs- und I Kl., Mathematik in der II. c. Kl., wöchentlich 9 Stunden.

Kalitowski Emil, lehrte Ruthenisch in der V.—VIII. Kl., ferner Ge graphie und Geschichte in der III. a. Kl., wöchentlich 16 Stunde

Tychowicz Ignaz, lehrte Ruthenisch in der III. und IV. Kl., Math matik und Physik in der III. a. Kl., wöchentlich 11 Stunden.

Frank Stanislaus, lehrte Polnisch in der I. a. und III. a. Kl., da Mathematik in der I. a. Kl., wöchentlich 9 Stunden.

hramm Julian, lehrte Deutsch in der I. d. Kl., Naturgeschichte in der II. a., II. b. und II. c. Kl., ferner Mathematik in der Vorbereitungs-, I. c. und I. d. Kl., wöchentlich 19 Stunden.

rzycki Theophil, lehrte Ruthenisch in der I. Kl., dann Mathematik in der II. a. und II. b. Kl., wöchentlich 9 Stunden.

sson Anton, lehrte Deutsch in der I. b. Kl., Latein in der I. a. und I. b. Kl., wöchentlich 20 Stunden.

rys Karl, lehrte Deutsch in der I. c. Kl., Latein in der I. c. und I. d. Kl., wöchentlich 20 Stunden.

etiak Josef, lehrte Polnisch in der Vorbereitungs-, I. b., II. b., III. b., IV. a. und V. b. Kl., wöchentlich 18 Stunden.

Applikanten.

agilewicz Michael, lehrte Geographie und Geschichte in der II. b. Kl.· wöchentlich 4 Stunden.

lczycki Ladislaus, war am Unterrichte nicht betheiligt.

Nebenlehrer.

wenstein Bernhard, Landes-Rabbiner und Prediger, ertheilte den mosaischen Religions-Unterricht in der IV.—VIII. Klasse.

erling Jakob, mos. Religionslehrer, ertheilte diesen Unterricht in den drei untern Klassen.

ayli Theophil, lehrte Kalligraphie in den vier Klassen des Unter-Gymnasiums als relativ obligaten, in der Vorbereitungs-Klasse als obligaten Gegenstand, wöchentlich 4 Stunden.

chechtel Wilhelm, lehrte die Landesgeschichte in der VII. Kl., wöchentlich 1 Stunde.

erstmann Theophil, Ph. Dr., lehrte die Landesgeschichte in der VI. Kl., wöchentlich 1 Stunde.

harski Eugen, lehrte die Landesgeschichte in der III. Kl., wöch. 1 St.

ubisztal Stanislaus, Ph. Dr., lehrte die Landesgeschichte in der IV. Klasse, wöchentlich 1 Stunde.

eaubourg Adolf, lehrte die französische Sprache in 3 Abtheilungen, wöchentlich 6 Stunden.

oliński Josef, lehrte die Stenographie, wöchentlich 2 Stunden.

łodnicki Karl, lehrte das Zeichnen, wöchentlich 5 Stunden.

uszyński Hermenegild, ertheilte den Gesang-Unterricht in 2 Abtheilungen, wöchentlich 4 Stunden.

ie Lehrer des Turnvereines „Sokół“ ertheilten den Turn-Unterricht, wöchentlich 4 Stunden.

II. Lehrplan.

Erste a. Klasse.

Ordinarius: **Frank.**

Erste b. Klasse.

Ordinarius: **Lasson.**

Erste c. Klasse.

Ordinarius: **Sorys.**

Erste d. Klasse.

Ordinarius: **Schramm.**

Religion, 2 Stunden wöchentlich. Katholische Glaubens- und Sitten lehre nach Dr. Schuster, (für gr. k. Schüler in ruth. Uebersetzun v. Guszalewicz).

Latein, 8 St. wöchentlich. Formenlehre der wichtigsten regelmässige Flexionen nach der kl. lateinischen Sprachlehre von Dr. Schultz eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen nach dem Uebungs buche von Dr. Schultz.

Deutsch, 4 St. wöchentl. Formen- und Satzlehre, nach der Grammati der deutschen Sprache von A. Heinrich. Lesen und Vortrage aus dem Lesebuche von Neumann und Gehlen, I. Bd.

Polnisch, 3 St. wöchentlich. Das Nomen und die Satzlehre nach de Grammatik von Małecki. Lesen, Sprechen, Vortragen aus den Lesebuche: „Wypisy polskie" I. Bd.

Ruthenisch, 3 St. wöchentl. Das Nomen, die Satzlehre, das wichtigst vom Verbum, nach der Grammatik von Osadca. Lesen, Sprechen Vortragen aus dem ruthenischen Lesebuche für Untergymnasien I. Theil.

Geographie, 3 St. wöchentlich. Beschreibung der Erdoberfläche nac ihrer natürlichen Beschaffenheit; Meer und Land, Gebirgszüge und Flussgebiete, Hoch- und Tiefländer, mit Benützung der Sy dowschen Wandkarten Das Kartenlesen und Kartenzeichnen. Nac Bellinger.

Mathematik, 3 St. wöchentl. Arithmetik: Ergänzung zu den 4 Spe zies, Theilbarkeit der Zahlen, gemeine und Dezimalbrüche. Geo metrische Anschauungslehre: Linien, Winkel und Dreiecke. Nac Močnik.

Naturgeschichte, 2 St. wöchentl. Zoologie, Säugethiere und wirbellos Thiere. Nach Pokorny.

Zweite a. Klasse.

Ordinarius: **Domin.**

Zweite b. Klasse.

Ordinarius: **Vetulani.**

Zweite c. Klasse.

Ordinarius: **Terlikowski.**

ligion, 2 St. wöchentl. Religionsgeschichte des alten Bundes für röm. kath. Schüler nach Tyc, für gr. kath. Schüler nach Cybyk.

tein, 8 St. wöchentl. Formenlehre der selteneren und unregelmässigen Flexionen nach der kl. lat. Sprachlehre von Dr. Schultz, eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen nach dem Uebungsbuche von Dr. Schultz.

eutsch, 4 St. wöchentl. Ergänzung der Formenlehre des Nomen und Verbum. Das Wichtigste von dem zusammengesetzten Satze nach der Grammatik von Heinrich. Lectüre aus dem Lesebuche von Neumann und Gehlen, II. Band.

olnisch, 3 St. wöchentl. Lehre vom Verbum, Arten der Nebensätze nach der Grammatik von Małecki. Lesen, Vortragen aus dem Lesebuche: Wypisy polskie II. Band.

uthenisch, 3 St. wöchentl. Lehre vom Verbum. Arten der Nebensätze nach der Grammatik von Osadca. Lesen, Vortragen aus dem ruthenischen Lesebuche für Untergymnasien. I. Theil.

eographie und Geschichte, 4 St. wöchentl. A. Geographie 2 Stunden wöch. Spezielle Geographie von Asien und Africa. Eingehende Beschreibung der verticalen und horizontalen Gliederung Europas und seiner Stromgebiete; spezielle Geographie von Süd- und West-Europa. Lehrbuch: Leitfaden für den geog. Unterricht von Dr. Klun. B. Geschichte, 2 St. wöch. Uebersicht der Geschichte des Alterthums. Lehrbuch: Leitfaden der Geschichte von Gindely, I. Band.

lathematik, 3 St. wöchentl. Arithmetik: Verhältnisse und Proportionen, Regeldetrie, wälsche Praktik, Mass- und Gewichtskunde. Geometrische Anschauungslehre: Polygone, Flächenberechnung, Dreiecke. Nach Močnik.

Naturgeschichte, 2 St. wöch. I. Semester Zoologie: Vögel, Amphibien und Fische. II. Semester Botanik. Nach Pokorny.

Dritte a. Klasse.

Ordinarius: **Tychowicz.**

Dritte b. Klasse.

Ordinarius: **Fischer.**

Religion, 2 St. wöchentl. Religionsgeschichte des neuen Bundes für röm. kath. Schüler nach Tyc, für gr. kath. Schüler nach Cybyk.

Latein, 6 St. wöch. Die Casuslehre. Nach Dr. Meirings - Grammatik für die mittleren und oberen Klassen. Uebungsbuch von Meiring I. Abtheilung. Lectüre: Cornelius Nepos, Miltiades, Themistocles, Aristides, Lysander, Pelopidas, Phocion, Hannibal.

*

Griechisch, 5 St. wöchentl. Die regelmässige Formenlehre des Nomen und Verbs bis auf die Verba auf $\mu\iota$, nach der Grammatik vo Dr. Curtius, eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen nach de Uebungsbuche von Dr. Schenkl.

Deutsch, 3 St. wöchentl. Die Lehre von dem zusammengesetzten Satz mit steter Beziehung auf den einfachen erweiterten Satz, an de betreffenden Beispielen nach Heinrichs Grammatik eingeübt. Lec türe aus dem Lesebuche von Neumann und Gehlen, III. Band Erläuterung prosaischer und poetischer Lesestücke, Uebunge im Vortrage.

Polnisch, 3. St. wöch. Die Syntax nach der Grammatik von Małeck Lectüre aus Wypisy polskie III. Band mit sprachlichen und sach lichen Erklärungen. Nacherzählen und Vortrag von memorirte Gedichten und prosaischen Lesestücken.

Ruthenisch, 3 St. wöchentl. Ergänzung der Lehre vom Verbum, un Casuslehre nach der Grammatik von Osadca. Lectüre aus de Lesebuche für Untergymnasium II. Band mit sprachlichen un sachlichen Erklärungen. Nacherzählen und Vortrag von memo rirten Lesestücken.

Geographie und Geschichte, 4 St. wöchentlich. A. Geographie, 2 S Spezielle Geographie von Mittel-, Nord- und Ost-Europa (m Ausschluss der österreichisch-ungarischen Monarchie), dann Ame rika's und Australien's, nach Klun wie Kl. II.

B. Geschichte, 2 St. wöchentl. Uebersicht der Geschichte de Mittelalters; am Schlusse Recapitulation derselben mit Hervo hebung der charakteristischen Momente aus der Geschichte de betreffenden österreichischen Landes und ihrer Beziehungen z der Geschichte der übrigen Theile der Monarchie. Lehrbuch vo Gindely II. Band.

Mathematik, 3 St. wöchentl. Arithmetik: Die 4 Spezies in Buchstabe Klammern, Potenzen; Quadrat und Kubikwurzel, Permutatione Combinationen. Geometrische Anschauungslehre: der Kreis, Con struktionen etc., dessen Umfang- und Inhaltsberechnung. Nac Močnik.

Naturwissenschaften, 2 St. wöchentl. I. Semester Mineralogie. Nac Pokorny, II. Semester Physik. Allgemeine Eigenschaften der Kör per: Elemente der Chemie; Wärmelehre. Nach dem Lehrbuch der Physik für Untergymn. von Pisko.

Vierte a. Klasse.

Ordinarius: **Kiszakiewicz.**

Vierte b. Klasse.

Ordinarius: **Dr. Kubisztal.**

Religion, 2 St. wöchentl. Erklärung der Gebräuche und Ceremonie der kath. Kirche, nach Jachimowski für röm. kath. Schüler, nac Popiel für gr. kath. Schüler.

Latein, 6 St. wöchentl. Syntax: die Tempus und Moduslehre. Nach Mering eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen nach dem Uebungsbuche von Meiring. Lectüre: Caesar de bel. gal. l. I. II. III. c. 1—29.

Griechisch, 4 St. wöchentl. Die Formenlehre absolvirt, auch die wichtigsten Regeln der Syntax, nach der Grammatik von Dr. Curtius und dem Uebungsbuche von Dr. Schenkl.

Deutsch, 3 St. wöchentl. Lectüre aus dem Lesebuche von Neumann und Gehlen IV. Band. Elemente des Versbaues. Vortrag memorirter Stücke. Geschäftsaufsätze.

Polnisch, 3 St. wöchentl. Fortsetzung der Syntax und die Verslehre nach der Grammatik von Małecki. Lectüre aus dem Lesebuche IV. Band. Vortragen prosaischer und poetischer Lesestücke.

Ruthenisch, 3 St. wöchentl. Satzlehre und die Verslehre nach der Grammatik von Osadca. Lectüre aus dem Lesebuche für Unter-Gymn. II. Band. Vortragen prosaischer und poetischer Lesestücke.

Geographie und Geschichte, 4 St. wöchentl. I. Sem. Uebersicht der Geschichte der Neuzeit mit steter Hervorhebung jener Begebenheiten und Persöhnlichkeiten, welche für die Geschichte des Habsburgischen Gesammtstaates eine besondere Wichtigkeit besitzen. Nach Gindely III. Band.

II. Semester: Spezielle Geographie der österreichisch-ungarischen Monarchie nach Klun.

Mathematik, 3 St. wöchentl. Zusammengesetzte Verhältnisse und Proportionen: Interessen-, Termin-, Gesellschafts-, Allegations-, Ketten- und Zinseszinsrechnungen, Gleichungen des I. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Geometrische Anschauungslehre. Stereometrie. Lage der Linien und Ebenen, Körperwinkel, Hauptarten der Körper, ihre Gestalt, Bestimmung der Oberfläche und des Kubikinhaltes. Nach Močnik.

Physik, 3 St. wöchentl. Statik, Dynamik, Akustik, Magnetismus, Elektricität, Optik. Nach Pisko.

Fünfte a. Klasse.

Ordinarius: **Adlof.**

Fünfte b. Klasse.

Ordinarius: **Dr. Gerstmann.**

Religion, 2 St. wöchentl. Geschichte der Offenbarungen Gottes des alten und neuen Bundes, nach Dr. Martin; für gr. kath. Schüler nach Wappler in ruth. Uebezsetzung von Pełesz.

Latein, 6 St. wöchentl. Aus der Grammatik von Meiring im I. Sem. die Casuslehre, im II. Sem. die Lehre vom Gebrauche der Tempora, vom Indicativ und das Wichtigste vom Conjunctiv wiederholt. Aus dem Uebungsbuche Meiring's II. Th. wurden die bezüg-

lichen Uebungsstücke übersetzt. Lectüre, Liv. I und II; dann au Ovid eine Auswahl aus der Schulausgabe von Grysar.

Griechisch, 5 St. wöchentlich. Aus der Grammatik von Curtius wurd die Formenlehre wiederholt, daneben wurden die wichtigsten Re geln der griechischen Syntax erklärt und eingeübt. Vom Artike und vom Gebrauche der Casus. Dazu entsprechende Uebersetzungs stücke aus Schenkl's Uebungsbuche. Lectüre I. Semest. Aus de Chrestom. Xenoph. von Schenkl. II. Sem. Aus Homer's Ilias I. II vollständig.

Deutsch, 2 St. wöchentlich. Grundzüge der Metrik und Poëtik, Lec türe und Erklärung gewählter Musterstücke aus Eggers Lesebu che, I. Theil.

Polnisch, 3 St. wöchentl. I. Sem. Aus der Grammatik von Małecki die Lautlehre und ergänzende Wiederholung vom Verbum. Lectüre aus dem Lesebuche: Wypisy polskie, IV. Band für Unter-Gymn II. Sem. Uebersicht der wichtigsten grammat. Formen der alt- polnischen Sprache. Lectüre der ältesten schriftlichen Denkmale aus Wypisy polskie für Ober-Gymnasium I. B. I, Th. bis Baltazar Opeć.

Ruthenisch, 3 St. wöchentlich. I. Sem. Elemente der altslovenischen Laut- und Formenlehre nach Miklosich. Aus Głowacki's Chrestomatie die beiden Denkmale: Ostromirs Evangelium und die Sammlungen Swiatosłav's. II. Sem. Lectüre einiger Musterstücke aus Nestor's Chronik, Daniel's Beschreibung der Pilgerfahrt nach Jerusalem und der Schriften des Grossfürsten Wladimir Monomach. Nebstbei Uebersicht des Literarhistorischen vom XI.—XIII. J.

Geographie und Geschichte, 4 St. wöchentlich. Geschichte des Alterthums bis auf Augustus, mit stäter Berücksichtigung der hiermit im Zusammenhange stehenden geographischen Daten. Nach Gindely für Ober-Gymn. I. Band.

Mathematik, 4 St. wöchentlich. Algebra, 2 St. Das Zahlensystem, Begriff der Hauptoperationen nebst Ableitung der negativen etc. Grössen. Die vier Grundrechnungen in algebraischen Ausdrücken. Theilbarkeit der Zahlen, Theorie der Brüche, Verhältnisse und Proportionen. — Geometrie, 2 St. Longimetrie und Planimetrie. Nach Močnik.

Naturgeschichte, 2 St. wöchentlich. I. Sem, Mineralogie: Einleitung, morphologische, physikalische, chemische Kennzeichen und systematische Uebersicht der Mineralien nach Fölleker. II. Sem. Botanik; Phytotomie, Phytochemie, Organographie, systematische Uebersicht des Pflanzenreiches nach Bill.

Sechste Klasse.

Ordinarius: **Dr. Morowski.**

Religion, 2 St. wöchentl. Besondere Glaubenslehre nach Dr. Martin; für gr. kath. Schüler nach Wappler in ruth. Uebersetzung v. Pełesz.

Latein, 6 St. wöchentl. Aus Meiring's Grammatik. Wiederholung der Syntax. Daneben wurden aus Süpfle's stilistischem Uebungsbuche im I. Sem. 15 Absätze, im II. Sem. 14 Absätze übersetzt. Lectüre: I. Sem. Sall. Jugurtha. II. Sem. Vergil. Georg. Laudes Italiae und Laudes vitae rusticae; Aen. l. I. II. bis v. 150.

Griechisch, 5 St. wöchentl. Grammatik nach Curtius: im I. Semester. Casuslehre, im II. Sem. Die Lehre vom Gebrauche der Tempora und Modi, conditionale Sätze. Dazu Uebersetzungsstücke aus Schenkl's Uebungsbuche. Lectüre: I. Sem. Homeri Ilias II. XI. XVI. II. Sem. Homeri Odyssea I. VI. XII.

Deutsch, 3 St. wöchentl. Gedrängte Uebersicht des Literarhistorischen; das Wichtigste aus allen Perioden, die neuere Zeit des 17. und 18. Jahrhunderts bis inclus. Klopstock. Lectüre und Erklärung gewählter Musterstücke aus Eggers Lesebuch II. a.

Polnisch, 3 St. wöchentl. Lectüre gewählter Musterstücke mit literarhistorischen und grammat. Erklärungen aus den Lesebüchern für Ober-Gymn. Wypisy polskie I. B. I. und II. Th. Im I. Semester. von Baltazar Opeć bis J. Kochanowski; im II. Sem. von J. Kochanowski bis J. B. Zimorowicz.

Ruthenisch, 3 St. wöchentl. I. Semester. Lectüre des Denkmals: „Słowo o połku Ihorewi." Gedrängte Uebersicht der Literaturgeschichte vom XIV.—XVI. Jahrhund. II. Semester. Die ruthenische Volkspoesie auf Grundlage des Lesebuches für Ober-Gymnasien von Barwiński Th. I.

Geographie und Geschichte, 3 St. wöchentl. Es wurde die Geschichte des Alterthums und die Geschichte des Mittelalters absolvirt, nach Gindely II. für Ober-Gymn.

Mathematik, 3 St. wöchentl. Algebra: Verhältnisse, Proportionen, Regeldetrie, Teilregel, Kettenregel, Potenzen, Wurzel, Logarithmen, und die Gleichungen begonnen. — Geometrie: bis zur trigonometrischen Auflösung schiefwinkliger Dreiecke. Nach Močnik.

Naturgeschichte, 2 St. wöchentlich. Zoologie: I. Sem. Allgemeine Einleitung. Die Systeme der Bedeckungs-, Bewegungs-, Verdauungs- Blutumlaufs-, Athmungs-, Nerven-, und Sinnes-Organe. II. Sem. Systematische Uebersicht des gesammten Thierreiches. Eingehendere Betrachtung der Wirbelthiere. Nach Giebel.

Siebente Klasse.

Ordinarius: **B a y l i.**

Religion, 2 St. wöchentl. Katholische Sittenlehre, nach Dr. Martin.

Latein, 5 St. wöchentlich Aus Meiring's lat. Grammatik wurde auf Grund stilistischer Uebungen von Süpfle II. Th. die Lehre von dem Gebrauche des Ablativs, des Indicat. und Conjunct. in Hauptsätzen, Construction der Fragesätze, wiederholt. Lectüre. I. Sem.

Vergil. Aen. II. VI. II. Semester. Cicero Catil. I. und pro impe
C. Pompeji.
Griechisch, 4 St. wöchentl. Ergänzung der Syntax nach Curtius u
grammatische Uebungen nach Schenkl's Uebungsbuche. Wiede
holung der gesammten Formenlehre. Lectüre: Demosthenes: κατ
Φιλίππου γ' und aus Sophocles: Oedipus rex.
Deutsch, 3 St. wöchentl. Lectüre: Aus Wieland, Lessing, Göthe, na
dem Lesebuche von Egger II. a. — Göthe's Iphigenie auf Tauri
Polnisch, 3 St. wöchentl. Lectüre aus Wypisy polskie II. B. I. T
mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen und den dara
sich knüpfenden literar-historischen Notitzen, im I. Semester. vo
G. Knapski bis S. H. Konarski; im II. Semester von Konarsk
bis J. U. Niemcewicz.
Ruthenisch, 3 St. wöchentl. Lectüre nach dem Lesebuche von Ba
wiński Th. II. mit Erklärungen und den daran sich knüpfende
literar-historischen Notitzen, im I. Semester von Kotlarewski b
Metliński, im II. Sem. bis Maksymowicz.
Geographie und Geschichte, 3 St. wöchentlich. Im I. Sem. Geschich
des Mittelalters mit besonderer Berücksichtigung der Culturen
wickelung der einzelnen Völker und Staaten; im II. Sem. Ge
schichte der Neuzeit bis 1705 nach Gindely III. Bd., mit stäte
Benützung der Wandkarten von Spruner und Brettschneider.
Mathematik, 3 St. wöchentl. Algebra: Gleichungen des 1. und 2. Gra
des mit einer und mehreren Unbekannten. Progressionen. Zinses
zinsrechnung. Combinations-Lehre und binomischer Lehrsatz. Nac
Močnik. — Geometrie: Beendigung der Trigonometrie. Eben
Analytik bis zu der Lehre von der Hyperbel. Nach Močnik.
Physik, 3 St. wöchentl. I. Sem. Allgemeine Eigenschaften, die Lehr
vom Thermometer, Arten der Festigkeit, Krystallisation, Chemi
theilweise. — II. Sem. Chemie beendigt. Statik, Maschinenlehr
und Dynamik bis zur Hydrostatik, nach Pisko.
Philosophische Propädeutik, 2 St. wöchentl. Logik. Nach Drbal.

Achte Klasse.

Ordinarius: **Sywulak.**

Religion, 2. St. wöchentl. Geschichte der kath. Kirche; für röm. kath
Schüler nach Dr. Robitsch, für gr. kath. Schüler nach Dörfler.
Latein, 5 St. wöchentl. Lectüre Horat. von Grysar: Auswahl von Oden
und Epoden, I. Satire, Epistola ad Pisones. Aus Tacitus: Agri
cola, Annales lib. I. Stilist. Uebungen nach Süpfle II. Theil.
Griechisch, 6 St. wöchentl. Grammatik nach Curtius. Ergänzende Wie
derholung der Syntax, dazu Uebungsstücke aus Schenkl's Uebungs
buche. Lectüre: I. Sem. Soph. Antigone. II. Sem. Apologie de
Socrates und Criton.

utsch, 3 St. wöchentl. Wiederholung der biographischen und liter.-historischen Notitzen über die Dichter der zweiten Blüthenperiode, der romantischen Schule und der Dichter des 19. Jahrhunderts, zu welchem Behufe einzelne Musterstücke aus Egger's Lesebuche II. B. gelesen wurden. Hermann und Dorothea von Goethe als stat. Lectüre.

lnisch, 3 St. wöchentlich. Lectüre der in Wypisy polskie II. Band II. Th. enthaltenen, aus den Werken der Schriftsteller: Brodziński, Mickiewicz, Malczewski, Ossoliński, Gołębiowski, Witwicki, Kamiński, Fredro, Korzeniowski, Bielowski, Pol, B. Zaleski und Słowacki entlehnten Musterstücke, mit sprachlichen und sachlichen Erklärungen und daran geknüpften literar-historischen Notitzen. Ausserdem hat ein Theil der Schüler Pan Tadeusz von Mickiewicz, Marya Stuart, Ojciec zadżumionych und Balladyna von Słowacki privatim gelesen und sich daraus einer Prüfung unterzogen. Hauptarten der Dichtkunst nach H. Cegielski.

ıthenisch, 3 St. wöchentlich. Lectüre der in Barwiński's Lesebuche für Ober-Gymnasien Th. III. enthaltenen Musterstücke mit sprachlicher und sachlicher Erklärung in Verbindung mit literar-historischen Notitzen.

eographie und Geschichte 3 St. wöchentl. Abschluss der Geschichte der Neuzeit, nach Gindely III. Band. — Oesterreichische Vaterlandskunde nach dem Lehrbuche von Hannak, mit stäter Benützung der entsprechenden Wandkarten.

athematik, 1 St. wöchentl. Wiederholungen und Uebungen aus dem Gebiete der Algebra und Geometrie. Nach Močnik.

ıysik, 4 St. wöchentl. Hydrostatik, Aërostatik, Akustik, Magnetismus, Electricität, Optik. Nach Pisko.

hilosophische Propädeutik, 2 St. wöchentl. Empirische Psychologie nach Dr. Linder.

Vorbereitungs-Klasse.

Ordinarius: **Schnitzel.**

eligion, 2 St. wöchentlich. Das Wichtigste aus der kath. Glaubens- und Sittenlehre mit Berücksichtigung der biblischen Geschichte; für die röm. kath. Schüler nach dem grossen Katechismus der IV. Klasse der Volksschulen, für die gr. kath. Schüler teilweise nach dem Katechismus von Schuster in ruthen. Uebersetzung von Guszalewicz.

eutsch, 9 St. wöchentl. Das Wichtigste aus der Formen- und Satzlehre nach der Grammatik von A. Heinrich. Lesen, grammatische Analyse, Sprachübungen durch freies Wiedererzählen kleiner, zum Vortrag memorirter Fabeln, Erzählungen und Gedichte aus

dem Lesebuche für die IV. Kl. der Hauptschulen. Ortographisc Uebungen wöchentlich einmal.

Polnisch, 3 St. wöchentlich. Einübung der Formen nach der Gramm tik von Lercel; der nackte und umkleidete Satz und das Wi tigste vom zusammengesetzten Satze. Lesen und Nacherzähl Vortragen kleiner poetischer und prosaischer Stücke aus d Lesebuch für die IV. Kl. der Hauptschulen. Jede Woche e Dictandoübung und eine grammatische Hausübung; zwei M nate vor dem Ende des Schuljahres statt Dictandoübungen, Co positionen.

Ruthenisch, 3 St. wöchentl. Grammatik nach Osadca. Begriff der I deteile, Declination und Conjugation. Das Wichtigste vom e fachen Satz, Lesen in stäter Verbindung mit grammatisc Analyse, Nacherzählen und Memorien kurzer poetischer und p saischer Stücke aus dem ruth. Lesebuch für die IV. Klasse Hauptschulen. Jede Woche ein Dictando.

Rechnen, 4 St. wöchentl. nach Močnik. Lehrbuch der Arithmetik Unter-Gymn. I. Abt. Begriff und Bedeutung der Zahlen und Z fern. Richtiges Aufschreiben von zwei — drei — bis neunziffri Zahlen. Zählen, Kopfrechnen, die 4 Hauptrechnungsarten in g zen besonderen Zahlen.

Kalligraphie, 2 St wöchentlich als obligater Gegenstand.

Klasse	Latein	Griechisch	Deutsch	Polnisch oder ruthenisch	Mathematik
I.	Anfangs mündl. Ueb. Nach 6—8 W. jede W. 1/2 St. Comp. Im II. Sem. ausser der Comp. zuweilen(14 T.) Hs. schr. Arb.	—	Durch das ganze Jahr jede Woche ort. Ubungen. Alle 14 Tage abwechselnd eine Haus- und Schularbeit.	wie deutsch	Monatl. zwei Haus- und eine Schularbeit.
II	Wöchentlich eine Comp. und alle 14 Tage ein Pensum.	—	Durch das ganze Jahr alle 14 Tage Dictando. Alle Monate zwei Schul- u. eine Hausarbeit	wie deutsch	wie I.
III.	Im I. Sem. jede Woche, im II. „ alle 14 Tage ein Pensum. Alle 14 T. o. 3 W. eine Comp. v. 1 St.	Im II. Sem. alle 14 Tage ein Pensum. Alle 4 Wochen eine Composition.	Alle 14 Tage eine Hausarbeit; alle 4 Wochen eine Composition.	wie deutsch	wie I.
IV.	Alle 14 Tage ein Pensum alle 3 Wochen eine Comp.	wie III. im II. Sem.	wie III.	wie deutsch	wie I.
V.	Alle 14 Tage ein Pensum, alle 4 Wochen eine Comp.	Alle 4 Wochen ein Pensum od. eine Comp.	Alle Monate eine Hausaufgabe uud eine Comp.	wie deutsch	In jedem Monate eine Lehrstunde Ausarbeitung einer Composition.
VI.	wie V.	wie V.	wie V.	wie deutsch	wie V.
VII.	wie V.	wie V.	Alle 3 Wochen abwechselnd eine Haus- oder Schularbeit.	wie deutsch	wie V.
VIII.	wie V.	wie V.	wie VII.	wie deutsch	wie V.

Themata, die zu Haus- und Schularbeiten gegeben wurden.

A. In deutscher Sprache.

VIII. Klasse: I. Sem. 1. Der allgemeine Charakter der deutsch Literatur des 19. Jahrhundertes (nach dem Lesebuche). 2. Die Au nahme des Nibelungenliedes nach seiner Veröffentlichung im 18. Jah hundert. 3. Charakteristik Peter des Grossen. 4. Was ist von dem Sat zu halten: „Ubi bene, ibi patria". 5. Erklärung der Parabase von Plate

II. Sem. 1. Charakteristik des Löwenwirthes in Göthe's „Herm und Dorothea". 2. Die Ziele der schwäbischen Dichterschule nach Ul land's „freie Kunst" zu erklären. 3. Die Fälle des Lebens in der Nat (nach Alexander von Humboldt). 9. Das Leben und die dichterisc Thätigkeit Lenau's (nach der Lectüre). 5. Die Bedingungen der mat riellen Cultur in der österr.-ung. Monarchie. (Maturitätsprifungsarbei

VII. Klasse. I. Sem. 1. Die Stellung des Demosthenes in Athe als Einleitung zur Lectüre desselben. 2. Ueber die unrichtige Auffa sung der Lehre des Aristoteles von der dreifachen Einheit im Dra seitens der Franzosen. Beweisführung nach Lessing. 3. Ueber das R mantische in der Natur. 4. Abhandlung über den Ausspruch Schiller' „Wo rohe Kräfte sinnlos walten, Da kann sich kein Gebild gestalte 5. Die Macht der Begeisterung. 6. Abhandlung über den Ausspruc „Nulla dies sine linea". 7. Abhandlung über die Verse Göthe's: „D Edle lebt auch nach dem Tode fort, und ist so wirksam, als er lebte

II. Sem. 1. Die culturhistorische Bedeutung der Erfindung d Schiesspulvers. 2. Einfluss Klopstock's auf den Halle'schen Dicht verein. 3. Auf welcher Sage beruht das Drama des Sophokles: „Oe pus rex"? 4. Ueber die Bedeutung des griech. Chors. 5. J. G. He der's Stellung und Bedeutung in der deutschen Literatur. 6. Inhal angabe des ersten Monologs im Schauspiel Göthe's: „Iphigenie a Tauris. 7. Göthe's und Schiller's Jugend; eine Parallele.

VI. Klasse. I. Sem. Die Sitten und Lebensweise der alten G manen. 2. Die Abentheuer des Waltharius manu fortis. 3. Charakte stik Hagen's im Niebelungenliede. 4. Der Krieg, von seiner verderblich und wohlthätigen Seite betrachtet. 5. Die Bestrebungen der deutsch Könige aus dem sächsischen Hause zur Erhaltung der Reichseinh 6. Nach welchen Richtungen entfaltete sich die lyrsche Poesie in mittelhochdeutschen Periode.

II. Sem. 1. Die Entstehung der nhd. Schriftsprache und ihre B deutung für das deutsche Volk (nach der Lectüre). 2. Die Ritteror und ihre Bedeutung zur Zeit der Kreuzzüge. 3. Die Narrenlitera im 16. Jahrhunderte. 4. Der Streit um das babenbergische Erbe. 5. E wickelung der Macht Venedig's im Mittelalter.

V. b. Klasse: I. Sem. 1. Erklärung des Gedichtes: „Gudr Klage". 2. Die kolonisatorische Thätigkeit der Phönizier. 3. Die p

·he Beschaffenheit des alten Hellas. 4. Die Charakteristik der epi-en Dichtungsarten: Märchen, Sage, Mythe und Legende. 5. Inhalts-;abe des Gedichtes: „Erlkönig“ von Göthe. 6. Die Grundzüge der on'schen Gesetzgebung. 7. Die moralische Grundidee in dem Ge-hte: „Der Kampf mit dem Drachen“.

II. Sem. 1. Die Verdienste des Pericles um das athenische Ge-inwesen. 2. Ueber die Tropen und ihre Anwendung in der Schrift-ache. 3. Erklärung des Gedichtes: „Punschlied“ von Schiller. 4. „Das s des Lyrikers“, Gedicht v. Platen zu erklären. 5. „Gränzen der nschheit“, Ode vom Göthe zu erklären. 6. Die allmählige Erweite-ng der Competenz der Tributcommitien. 7. „Die Huldigung der Kün-“ v. Schiller zu erklären.

V. a. Klasse: I. Sem. 1. Vergleichung des menschlichen Lebens t den vier Jahreszeiten. 2. Wie habe ich die Ferien zugebracht? (Brief-m). 3. Nibelungenhort (Inhalt, Dichtungsart, Warum?) 4. Welche nstände beförderten bei den Phöniziern Schiffahrt und Handel? Das Eleusische Fest (Inhalt, Dichtungsart, Warum?). 6. Licht- und hattenseiten des Herbstes. 7. „Oberon“ (Inhalt, Dichtungsart, Warum?). Nutzen griechischer Mythen für die Geschichte Griechenlands? 9. Er-ehung bei den Persern (nach Xenoph. Kyropaedie).

II. Sem. 1. Licht- und Schattenseiten des Winters. 2. Schilderung r Lage der Griechen nach der Schlacht bei Kunaxa. 3. Naturfreuden ine Schilderung). 4. Gedankengang und Bedeutung des Prologes aus hill. „Jungfrau v. Orleans“. 5. Welche Aenderungen in der röm. Ver-ssung geschahen zu Gunsten der Plebejer seit 451—300 v. Chr. Bedeutung der Proemien in der epischen Poësie nachzuweisen an n den Schülern bekannten Epen. 7. Welche Fabel liegt der Ilias zu runde; (nach dem I. Gesange der Ilias). 8. Welche Vortheile brach-n dem röm. Volke die Reformen der beiden Gracchen? 9. Veran-ssung zur Rede des Nestor im I. Gesange der Ilias und ihre Analysis.

B. In polnischer Sprache.

VIII. Klasse: I. Sem. 1. Jakiém prawem nazywają się Grecy na-czycielami Rzymian? 2. Zasługi Stanisława Augusta około literatury olskiéj. 3. Czy odkrycie Ameryki słusznie uważane być może za wy-adek rozpoczynający historyą nowożytną? 4. Prolog do Antygony So-ɔklesa (treść). 5. Skutki bitwy pod Pułtawą r. 1709. 6. O tempera-ıentach (rozprawa psychologiczna). 7. Krótka osnowa powieści histo-ycznéj A. Mickiewicza p. t. „Grażyna“.

II. Sem. 1. Charakter Konrada Wallenroda (podług poematu Mic-iewicza). 2. Którémi sztukami i umiejętnościami Rzymianie zajmowali ię a które zaniedbywali? 3. Zasługi Kazim. Brodzińskiego około lite-atury polskiéj. 4. Rozmaite rodzaje śmiechu. 5. Najważniejsze przy-zyny wojen, które prowadziły z sobą Europa i Azya. 6. Jak możemy

okazywać wdzięczność zakładowi, któremu zawdzięczamy największ część wykształcenia? 7. Florencya, drugie Ateny dla Włoch i Europy oraz zasługi i znaczenie książąt Medyceuszów (zadanie do egzamin dojrzałości).

VII. Klasse: I. Sem. 1. Obraz spustoszenia po napadzie Tatarów 2. Zarozumiałość i jéj skutki. 3. Drogo kupuje, kto niepokojem płac 4. Unusquisque suae fortunae faber. 5. Walka stronnictw w Rzymi w r. 63. i 62. przed Chr. 6. Złe towarzystwa psują dobre obyczaj 7. O pamiętnikach historycznych polskich.

II. Sem. 1. Kogo zowiemy prawdziwie wykształconym? 2. Jaki zasługi Szymon Starowolski położył około literatury polskiéj? 3. O sztuc milczenia. 4. Jakie są przymioty dobrego tłómacza? 5. O życiu i pis mach Fr. Karpińskiego. 6. Charakterystyka Karola V. 7. Principii obsta, sero medicina paratur.

VI. Klasse: I. Sem. 1. Jaki był stan oświaty w Polsce od zapro wadzenia Chrześciaństwa aż do założenia akademii krakowskiéj? 2. At tyla, król Hunnów. 3. Wojna Oktawiana z Antoniusem. 4. Na czém polegała ustawa Serwiusa Tulliusa? 5. Osnowa idylli: „Philemon i Baucis“. 6. Jakie były powody wojny Rzymian z Pirrhusem? 7. Cha rakterystyka skąpca. 8. Kto się sparzy, ten i na zimno dmucha (po wieść). 9. Umarły a śpiący.

II. Sem. 1. Mowa Adherbala w Senacie (podług Sallustiusa 2. Które okoliczności wpłynęły na rozwój języka i literatury polski w 16. wieku? 3. Sąsiad dobry, to klejnot. 4. O Sobótce. 5. Przyczyn wojen krzyżowych. 6. Zestawienie M. Reja z Nagłowic z J. Kocha nowskim. 7. Myśli na widok nieba zasianego gwiazdami. 8. Przybyci Odysseusa do Feaków. 9. Dąb-obraz dzielnego męża. 10. Jaki cel maj wakacye i jak należy je przepędzać?

V. Klasse a.: I. Sem. 1. Wspomnienia ubiegłych wakacyj. 2. Za wojowanie Lidyi przez Cyrusa. 3. Życie pasterzy w Tatrach. 4. Skre ślić stan człowieka ubogiego a przytém chorego w celu wzbudzeni dla niego litości innych. 5. O sztuce budownictwa u Egipcyan. 6. C spowodowało powstanie Jończyków i jakie były jego skutki? 7. O tur niejach (na podstawie ustępu zawart. w Wyp. pols. t. IV.). 8. Przy czyny rozwoju handlu fenickiego. 9. Opis polowania.

II. Sem. 1. Pożytek z drzewa. 2. O powołaniu człowieka (na pod stawie ustępu zawart. w Wyp. polsk. t. IV.). 3. Obrona Częstochowy 4. W jakich razach używamy przysłowia: „Nie wszystko złoto, co si świeci“. 5. Obraz stosunków społecznych w Słowiańszczyźnie na pod stawie poematu: „Sąd Lubuszy“. 6. Zdobycie Troi. 7. Tok myśli po matu: „Wyprawa Igora na Połowców“. 8. Wyjście ludu na górę święta 9. Życiorys Owidego (podług 10. eleg. IV. ks. „Tristium“. 10. Ucze zawiadamia rodziców o wyniku odbytego egzaminu.

V. Klasse b.: I. Sem. 1. Wspomnienia ubiegłych wakacyj. 2. Roz winąć przysłowie A. M. Fredry: „Spokojna myśl najlepsze szczęści ludzkie“. 3. Rządy Psametycha w Egipcie. 4. Porównanie życia wie

ego z miejskiém. 5. O igrzyskach olimpijskich. 6. Burza letnia. Temistokles pod Salaminą. 8. Wpływ morza na klimat ziemi. 9. Rozząć przysłowie: „Jak sobie kto pościeli, tak się wyspi“.

II. Sem. 1. Dlaczego Filip Macedoński wyszedł zwycięsko z walki Grekami? 2. Uczta Wierzynka (na podstawie ustępu zawart. w Wyp. klas niż. t. IV.) 3. O religii pierwotnych Słowian. 4. Opis pożaru formie listu). 5. Obraz stosunków społecznych w Słowiańszczyźnie podstawie poematu: „Sąd Lubuszy“. 6. O władzy trybunów, jak wstała i na czém polegała. 7. Opowiedzieć treść poemetu: „Słowo połku Igora“. 8. Podobieństwo rzeki do życia ludzkiego. 9. Znaczenie szczu w przyrodzie. 10. Zywot św. Wojciecha (podług kroniki Chwalwskiego).

C. In ruthenischer Sprache.

VIII. Klasse: I. Sem. 1. Засловна гадка Горація оды III. 30: xegi monumentum“. 2. Важнôсть вѣка XV. 3. О розвою англійской нституціи пôдъ королями зъ роду Стуартôвъ. 4. Въ чôмъ до себе дôбнû, а въ чôмъ рôжнять ся ôтъ себе творы Стороженка и Марка вчка. 5. Попостояннôсть людского щастя. 6. Значѣнє хорôвъ въ станнôй трагедіи и ихъ ôтношенє до дѣлаючихъ осôбъ. 7. Теченє іслей въ „Carmen seculare“.

II. Sem. 1. Лѣтна недѣля на селѣ. 2. О звязи географичныхъ ношеній съ историчными фактами. 3. Бесѣда при посвященю дому. Длячого клясична литература є пôдставою нашого образованя. Историчный поглядъ на розвôй Австрійско-Угорской монархіи. (Матурне) Вплывъ моря яко сполучаючого елемента на розвôй одскости.

VII. Klasse: I. Sem. 1. Умѣетнôсть лучша чѣмъ богатство. 2. Якій житокъ приносить намъ знанє исторіи природы? 3. О скôлько приснивъ ся Котляревскій до розвою рус. литературы? 4. Подати котке содержанє повѣсти Квѣтки: „Перекотиполе“. 5. Правдива варсть грошей. 6. Якû гадки взбуджає въ насъ початокъ нового року. Длячого повиннисьмо поважати старôсть?

II. Sem. 1. Кто живе честно и годує ся трудами своими, тому кусокъ черствого хлѣба смачнѣйшій ôтъ мягкои булки, неправдою житои. (Котл. Нат. Полт. I. 6). 2. Поясненє казки: „Панъ та сока“. 3. Добрый пріятель — найбôльшій скарбъ. 4. Характеристика ловнѣйшихъ лицъ въ повѣсти Устыановича: „Месть Верховинця“, Сила слова. 6. Розвести и пояснити изреченє: „Sui cuique mores agunt fortunam hominibus“. 7. Розвôй рускои литературы ôтъ Осноиненка до Шевченка.

VI. Klasse: I. Sem. 1. Подати рôжницѣ помежи історіею станною а новѣйшою. 2. Якû гадки будить въ насъ поглядъ на небо, сѣяне звѣздами. 3. Исторична заснова „Слова о полку Игоревôмъ“. О правдивой и ложной скромности. 5. Подати причины паденя

литературы въ VIII. в. 6. Бѣгъ рѣки — образъ житя людско 7. Внутрѣшнѝ ôтношеня паньствъ германьскихъ до часôвъ панова Кароля Великого. 8. Нашѝ лѣсы. 9. Тôлько вытревалôсть веде цѣли. 10. О змыслѣ наслѣдовництва человѣка.

II. Sem. 1. Пращанє зъ родимою стрѣхою. 2. Що то є „Прав Руска" и яке єи значѣнє. 3. Длячого великдень є такъ прiємны и веселимъ праздникомъ. 4. Ростуча лявина. 5. Поезiя образователь людскости. 6. Выказати на думѣ: „Про бурю на чорному мори" х рактеристичнѝ цѣли козацкихъ думъ. 7. О змѣнахъ, котрѝ за содѣ ствiємъ чоловѣка въ природѣ повстали. 8. Прiємности прохода горахъ. 3. Пожитокъ морскои плавбы. 10. Подати причины взрос италiйскихъ городôвъ, именно Венецiи, въ середнихъ вѣкахъ.

V. Klasse: I. Sem. Длячого заняли Феникiяне важне становис помежи иншими народами старинности. 2. Вартôсть часу. 3. Що є языкъ старословеньскiй и яке мѣстце займає ôнъ помѣжь инши славяньскими языками. 4. Кôнь, его свойства и ужиточнôсть. 5. П ревôдъ зъ Ливiя. 6. Пожитокъ желѣза. 7. Якѝ заслуги положи Ликургъ около розвою Спарты. 8. О вплывѣ Царгорода на почат руского племенства. 9. Буря. 10. Наслѣдки перзiйскихъ военъ.

II. Sem. 1. Причины паденя Грецiи. 2. Дерево въ рôжныхъ п рахъ року. 3. Длячого важна Несторова лѣтопись? 4. Кто хоче рос зувати, мусить ся на передъ научити слухати. 5. Великiй князь Св тославъ Игоревичь, его характеръ и дѣла (пôсля Несторовои лѣт писи). 6. Важнôсть зная письма. 7. Якъ розширяла ся и рос власть трибуньска? 8. Злый примѣръ псує добрѝ обычаѣ. 9. Длячо стали Римляне въ вôйнахъ пуньскихъ побѣдителями? 10. Якъ дум кождый ужити вôльный часъ пôдчасъ вакацiй?

Chronik des Gymnasiums.

Das Schuljahr 1878/79 wurde am 9. September mit einem fei lichen Gottesdienste eröffnet.

In diesem Schuljahre bestand die I. Klasse aus vier, die II. a drei, die III.—V. Klasse aus je zwei parallelen Abtheilungen; die a dere Klassen des Ober-Gymnasiums blieben ungetheilt; die Vorber tungs-Klasse wurde von 56 Schülern besucht.

Im Lehrer-Status haben nachstehende Veränderungen stattg funden:

1. In Folge h. Präsid. Erl. des galiz. L. S. R. vom. 15. Febru 1878 Z. 19 wurden die Lehr-Supplenten Johann Kuczek und Valeri Wilusz vor Beginn des neuen Schuljahres ihrer fernern Dienstesve pflichtung an dieser Lehranstalt enthoben.

2. Zu Ende August ging Lehrsupplent Franz Terlikowski als R servelieutenant zum activen Militär-Dienst einberufen, auf den Krig

auplatz nach Bosnien und der Herzegovina ab, kehrte jedoch nach
lauf von zwei Monaten auf seinen Lehrerposten glücklich wieder
ück. Während seiner Abwesenheit vertrat ihn der Lehramtskandidat
rtin Pach.

3. Mit Erlass des h. galizisch. L. S. R. vom 7. September 1878
7917 wurde dem röm. kath. Gymnasial-Katecheten Michael Rodecki
Wiederherstellung seiner Gesundheit ein mehrwöchentlicher Urlaub
illigt. Leider kehrte derselbe aus dem Curorte Gleichenberg in noch
enderem Zustand zurück und starb endlich am 27. November 1878,
Lehrkörper und der Gymnasial-Jugend, die er stets mit geistli-
r Milde und väterlichem Wohlwollen behandelte, tiefbetrauert, was
nentlich bei dessen feierlichem Leichenbegängnisse sich manifestirte.

4. Da mit Beginn des Schuljahres 1879 drei neue Parallelklassen
ffnet werden mussten, und da die an der Anstalt befindlichen Lehr-
fte hiefür nicht ausreichten, wurden derselben mit Erl. des h. galiz.
S. R. v. 17. September 1878 Z. 8786 als Gymnasial-Lehrsupplenten
Dienstleistung neu zugewiesen: Die Lehramtskandidaten Anton
sson, Josef Tretiak, Julian Schramm und Martin Pach, letzterer, wie
n erwähnt, an die Stelle Terlikowski's.

5. Mit Erl. des h. galiz. L. S. R. vom 2. Oktober 1878 Z. 9375
rde die Direktion ermächtigt, den Applikanten Marzel Białobrzeski,
seit den Ferien an der Lehranstalt nicht mehr erschienen war,
nlich zu entheben.

6. Dem Gymnasium wurde noch eine Lehrkraft in der Person des
ernannten Lehrsupplenten Karl Sorys zugewiesen, u. z. mit Erl.
h. galiz. L. S. R. v. 11. Oktober 1878 Z. 10142.

7. Als unentgeltliche Applikanten traten in Dienstesverwendung
rselbst die Lehramstkandidaten: Ladislaus Kulczycki und Michael
gilewicz, im Grunde Erl. des h. galiz. L. S. R. v. 23. Oktob. 1878
10395.

8. Statt des schwer kranken und später mit Tod abgegangenen
techeten Michael Rodecki wurde über Vorschlag des Lemberger röm.
h. Metropolitan-Consistorium's vom h. galiz. L. S. R. mit dem De-
t v. 16. November 1878 Z. 11334 dem röm. kath. Weltpriester und
rortigen Pfarrer Stanislaus Korzeniowski das Amt eines Religions-
rers für die röm. kath. Gymnasialjugend bis zur definitiven Besetzung
ser Stelle übertragen.

9. Mit h. Präsid. Erl. v. 10. Febr. 1879 Z. 16 wurde der Lehr-
tskandidat Theophil Iskrzycki als Lehrsupplent mit der Hälfte der
terrichtsstunden diesem Gymnasium zur Dienstleistung zugewiesen.

10. Der h. galiz. L. S. R. genehmigte mit dem Erl. v. 13. März
79 Z. 2212 den Antrag des hiesigen israelit. Gemeindevorstandes,
mit für die Vorbereitungs- und für die drei unteren Gymnasialklassen
rr Jakob Sperling zum Religionslehrer bleibend ernannt, dem Herrn
bbiner und Prediger Bernhard Löwenstein dagegen der Unterricht
in den fünf obern Gymnasialklassen belassen wurde.

11. S. Exzellenz der Herr Minister für C. und U. ernannte m
h. Decrete von 18. Mai 1879 Z. 19573 den bisherigen Professor d
hiesigen Franz-Josef-Gymnasiums, Johann Krystyniacki, welcher dies
Lehranstalt in letzter Zeit zur Dienstleistung zugewiesen war, in gle
cher Eigenschaft zum Lehrer an dem neu eröffneten k. k. IV. Staats
Gymnasium in Lemberg (h. Präsid. Erl. des galiz. L. S. R. v. 8. Ju
l. J. Z. 156).

12. S. Exzellenz der Herr Minister für C. und U. ernannte m
h. Dekrete vom 21. Juni l. J. Z. 8378 den bisherigen Lehrsupplent
Franz Terlikowski zum wirklichen Lehrer des k. k. Franz-Josef-Gym
nasiums in Lemberg (h. Präsid. Erl. des galiz. L. S. R. v. 15. Ju
l. J. Z. 238).

13. S. Exzellenz der Herr Minister für C. und U. ernannte m
h. Dekrete v. 21. Juni l. J. Z. 8484 den bisherigen Lehrsupplenten u
gr. kath. Weltpriester Johann Kostecki zum wirklichen Lehrer am k.
Ober-Gymnasium in Sambor (h. Präsid. Erl. des galiz. L. S. R. v.
Juni l. J. Z. 239).

Auch in diesem Jahre versah die Amtsobliegenheiten eines Dire
tor-Stellvertreters das dienstälteste Mitglied des Lehrkörpers, Wilhel
Schechtel, welcher auch die Herausgabe des vorliegenden Programm
besorgte.

Der k. k. Schulrath und wirkliche Direktor dieses Staats-Obe
gymnasiums, Herr Ph. Dr. Ambros von Janowski, welcher als Abg
ordneter den Reichsraths- und Landtagssitzungen in Wien und Le
berg ununterbrochen beiwohnte, wurde von Seiner k. und k. Aposto
schen Majestät Allergnädigst in den Adelstand erhoben. Der Lehrkörp
beeilte sich, demselben aus Anlass dieser Allerhöchsten Auszeichnu
seine lebhafteste Theilnahme auszusprechen und seine Glückwünsc
darzubringen.

Zur Feier des glorreichen Namensfestes unseres Allergnädigst
Kaisers und Herrn Franz Josef I. am 4. Oktober wurde ein Festgo
tesdienst abgehalten, an dem alle katholischen Schüler und sämmtlic
Lehrer Theil nahmen; ein gleiches fand statt bei den Trauerandacht
für weiland Seine Majestät Kaiser Franz I., Kaiser Ferdinand I. u
Seine kaiserliche Hoheit den Erzherzog Franz Karl.

Im Monate November besuchte der Herr k. k. Gymn.-Schulinspe
tor Anton Czarkowski mehrmals die Lehranstalt nnd wohnte in einig
Klassen und Gegenständen dem Unterrichte bei, seine besondere Sor
falt dem Gedeihen der Lehranstalt zuwendend.

Das erste Semester wurde Donnerstag den 30. Jänner geschloss
das zweite begann Montag den 3. Februar.

Am 24. April beging die Lehranstalt in solenner Weise das Hoc
zeits-Jubiläum des Allerhöchsten Kaiserpaares, und galt dieser Tag, w
in ganz Oesterreich, auch dem Lehrkörper und der studirenden Juge
als ein hoher Festtag. Um 8 Uhr Morgens begab sich die Jugend d
röm. und gr. kath. Ritus, wie auch die mosaischen Schüler aller Kla
sen, in die betreffenden Kirchen und in den Tempel. In der röm. ka

irche wurde von den Sängern und Musikern der Lehranstalt eine chubert'sche Messe in gelungener Weise durchgeführt und mit der Abngung der Volkshymne geschlossen.

Hierauf begaben sich die röm. kath. Schüler in den sonntäglichen xhortations-Saal, woselbst der stellvertretende Gymnasial-Katechet Staislaus Korzeniowski an dieselben in polnischer Sprache eine Anrede ielt, in welcher er Seiner Majestät huldvolles Wirken für die Senticklung von Schule und Wissenschaft, Allerhöchst Dessen besondere iebe für die studirende Jugend und seine Verdienste um das Kronind Galizien mit begeisterten Worten hervorhob und zuletzt seine Zuörer zur treuen Anhänglichkeit an das Kaiserhaus und zum unermüdchen Fleisse aufforderte, damit sie der kaiserlichen Wohlthaten sich tets würdig erweisen möchten.

In der ruthenischen Stadtpfarrkirche, woselbst die gr. kath. Schüer sämmtlicher Mittelschulen Lemberg's versammelt waren, hielt der ymnasial-Katechet, Th. Dr. Josef Lewicki, eine der Bedeutung des 'ages entsprechende, schwungvolle Rede, desgleichen im neuen israeitischen Tempel der Landesrabbiner und Prediger, Hr. Bernhard Löenstein.

Nach dieser dreifachen kirchlichen Feier begaben sich alle Schüler vieder in das Schulhaus zurück und mit dem gesammten Lehrkörper ind unter Vorantritt des k. k. Gymnasialinspektors Herrn Anton Czarowski in das Festlokale, welches mit den zu diesem Behufe neu angechafften, in gesehmackvollen Goldrahmen prangenden Bildnissen Ihrer Majestäten des Kaisers und der Kaiserin, mit Teppichen, Blumen, Fetons aus grünem Reisig und den Wappenschilden der Kronländer chön ausgeschmückt war. Hierselbst wurden abwechselnd Reden gealten und Musik- und Gesangstücke executirt, u. z. nach folgendem Programme: a) Metrisch verfasste Fest-Ode des Direktor-Stellvertreters, von ihm selbst vorgetragen; b) Hochzeits-Marsch von Mendelssohn, für Pianoforte und acht Violinen (gespielt vom Schüler der VIII. Klasse Adolf Zach und acht Schülern der Lehranstalt); c) Lateinische Rede (gehalten vom Schüler der VIII. Kl. Jakob Gelber); d) Siebentes Concert v. Beriot, Violin-Solo (ausgeführt vom Schüler der VIII. Klasse Philipp Schmelkes); e) Rede in polnischer Sprache (gehalten vom Schüler der VIII. Klasse Leo Rosenstein); f) Chor aus der ruthenischen Oper „Podhorjane" (gesungen von den Gymnasial-Sängern); g) Rede in ruthenischer Sprache (gehalten vom Schüler der VII. Klasse Hippolit Fedorowicz); h) Zum Schluss: feierliche Schulhymne von Kremser (gesungen vom gesammten Sängerchor des Gymnasiums).

Nach dieser erhebenden Feier, die allen Schülern gewiss als eine der schönsten Jugenderrinnerungen noch in späten Lebensjahren vorschweben wird, begaben sich mit den Spitzen der Behörden auch die Direktoren aller Mittelschulen Lemberg's zu S. Exzellenz dem Herrn Statthalter Grafen Alfred Potocki, um, nach Darbringung der ehrfurchtsvollsten Glükwünsche für das Allerhöchste Kaiserpaar, die ergebene

Bitte auszusprechen, diese Huldigung im Wege des hohen k. k. Stat halterei-Praesidium's an die Stufen des Allerhöchsten Thrones gela gen zu lassen.

Mit h. Präsid. Erl. des galiz. L. S. R. v. 25. Mai 1879 Z. 13 wurde der Direktion bekannt gegeben, dass Seine Majestät der Kaise die zahlreichen Kundgebungen aufrichtiger Liebe und treuer Anhäng lichkeit der verschiedenen Lehranstalten aus Anlass der silbernen Hoch zeitsfeier Ihrer Majestäten mit Wohlgefallen zur Kentniss zu nehme geruht habe, und dass zu den hiedurch ausgezeichneten Lehranstalte auch dieses Gymnasium gehört.

In der ersten Hälfte des Monates Juni besuchte mehrmals di Lehranstalt als Delegat des Lemberger röm. kath. Metropolitan-Consi storiums S. Hochwürden Herr Kanonikus Dr. Ludwig Jurkowski un wohnte in mehreren Klassen dem Religionsunterrichte, wie auch de sonntäglichen Exhorten im Ober- und Untergymnasium bei.

Die regelmässigen gottesdienstlichen Uebungen bestanden für di katholischen Schüler in Anhörung der heil. Messe und der Exhorte a jedem Sonn- und Feiertage und in den Recollectionen zur österliche Zeit. In diesem Jahre unterzogen sie sich viermal der heil. Beicht und der Communion, nämlich zu Anfang des Schuljahrs, vor dem Oster feste, aus Anlass der päpstlichen Ablassverkündigung und vor de Schulschluss.

Das Orgelspiel bei dem Gottesdienste in der röm. kath. Kirch versah der Septimaner Franz Neuhauser, welcher eine anerkennens werthe musikalische Ausbildung besitzt.

Was den Gesundheitszustand des Lehrer-Collegium's anbelang kamen sonstige längere Erkrankungen nicht vor.

Gegen Ende des Schuljahres, nämlich am 23. Juni, verlor die VI Klasse ihren besten Schüler, Rubin Schulbaum, welcher einem rasc umsichgreifenden Brust- und Lungenleiden im 20. Lebensjahre erlag an seinem Leichenbegängnisse betheiligten sich nicht nur die mosaische Glaubensgenossen, sondern in würdiger Collegialität die Schüler alle Confessionen und Mitglieder des Lehrkörpers.

Die schriftlichen Maturitäts-Prüfungen wurden in den Tagen vo 16. bis 21. Juni, die mündlichen vom 9. bis 14. Juli unter dem Vor sitze des Herrn Gymnasialinspektors Anton Czarkowski abgehalten.

Am 21. Juni begannen die mündlichen Versetzungsprüfungen un dauerten bis zum 12. Juli.

Am 15. Juli wurde das Schuljahr um 9 Uhr Morgens mit einen feierlichen Hochamte geschlossen, worauf die Veröffentlichung des Clas sifications-Resultates und die Vertheilung der Zeugnisse erfolgte.

Unterstützung armer Schüler.

a) Es haben eine unentgeltliche Verpflegung genossen:

1) Im Stauropigian-Institute	7 Schüler
2) Im ruthenischen Nationalhause	11 „
3) Im Institute des Torosiewicz	5 „

b) Das Stipendium aus dem „Kaiser Franz-Joseph Wohlthätig-eitsfond“ im Betrage von 50 fl. öst. W., — vom Lehrkörper dieses ymnasiums zum immerwährenden Andenken an das 25-jährige Re-ierungs-Jubiläum S. kaiserl. und königl. Apostolischen Majestät Kaiser ranz-Josef I. gestiftet, und demgemäss alljährlich am 2. Dezember als em Regierungs-Antrittstage Allerhöchst dessen zu vergeben, — wurde ı diesem Schuljahre dem Schüler der III. Kl. Viktor Caspary verliehen.

Aus der Michael Wolf'schen Stiftung wurden abermals als Lohn ir sittliches Wohlverhalten und fleissige Verwendung zwei Schüler ıos. Glaubens mit Gebetbüchern in hebräischer Sprache beschenkt.

Statistik des Gymnasiums.

In der Klasse	Oeffentliche Schüler beim Beginn des Schuljahres	Am Ende des II. Semesters waren Schüler: öffentliche	Privatisten	im Ganzen	Ergebnisse der Klassification am Ende des II Semesters (öffentliche Schüler): entspr.: Eminenz	entspr.: I. Klasse	nicht entspr.: zur Wiederholungsprüfung zugelassen	nicht entspr.: II. Klasse	nicht entspr.: III. Klasse	ungeprüft
Ia.	47	39	1	40	3	20	4	1	11	
Ib.	46	38	1	39	4	24	3	—	7	
Ic.	49	42	—	42	7	24	4	2	5	
Id.	48	41	1	42	4	24	10	—	3	
IIa	46	34	1	35	3	22	7	—	2	
IIb.	45	37	1	38	3	27	5	2	—	
IIc.	47	43	1	44	1	24	9	3	6	
IIIa.	51	46	1	47	7	26	8	1	4	
IIIb.	53	50	3	53	5	23	12	1	9	
IVa.	42	38	1	39	3	19	11	—	5	
IVb.	41	40	2	42	4	26	10	—	—	
Va.	32	29	—	29	4	18	5	—	2	
Vb.	36	33	1	34	2	23	4	—	4	
VI.	46	44	—	44	7	34	3	—	—	
VII.	31	27	1	28	1	17	5	—	4	
VIII.	24	24	1	25	3	21	—	—	—	
					Privatisten der gesammten Anstalt					
					6	7	3	—	—	
	684	605	16	621	67	379	103	10	62	
					621					
Vorb. Kl.	58	56	—	56	5	48	3	—	—	

a) der am Ende des II. Semesters an der Anstalt befindlichen öffentlichen und Privat-Schüler

Muttersprache		Religionsbekenntniss	
Deutsch . . .	342	Kathol. lateinischen Ritus	144
Czecho-slavisch .	3	Kathol. griechischen Ritus	90
Polnisch . . .	187	Kathol. armenischen Ritus	10
Ruthenisch . .	84	Griechisch-orient.	2
Rumänisch . .	2	Evangelisch, Augsburger-Konfession	20
Ungarisch . . .	3	Israelitisch . .	355
	621		621

b) der Schüler der Vorbereitungs-Kl.

Muttersprache		Religionsbekenntniss	
Deutsch . . .	11	Kath. lateinischen Ritus	26
Polnisch . . .	37	Kath. griechischen Ritus	7
Ruthenisch . .	6	Evangelisch . .	1
Ungarisch . . .	2	Israelitisch . . .	22
	56		56

Unterrichtssprache und Abgränzung derselben nach Klassen und Lehrgegenständen.

Unterrichtssprache in allen Klassen und in allen Lehrgegenständen mit Ausnahme der Religion und der Muttersprache ist die deutsche Sprache.

Der Unterricht in der Religion wird den röm. kath. Schülern in der polnischen, den griech. kath. Schülern in der ruthenischen und den Israeliten in der deutschen Sprache ertheilt.

Ebenso wird der polnische Sprachunterricht in der polnischen, der ruthenische Sprachunterricht in der ruthenischen Sprache ertheilt.

Der Unterricht in der Landesgeschichte wurde in der polnischen Sprache ertheilt.

Freie Lehrgegenstände.	Schülerzahl am Ende des II. Semesters	Betrag des Honorars monatl. aus der k. k. Hauptkasse fl.	kr.
Französische Sprache	92	25	
Landesgeschichte	82	22	
Turnen	130	25	
Freihandzeichnen	61	22	
Gesang	31	15	
Stenographie	51	8	
Kaligraphie I—IV. Kl.	86	pr. 52*	50
„ Vorber. Kl.	56		

*) halbjährig.

Von der gesammten Schülerzahl Ende des II. Semesters waren:

Zur Schulgeldzahlung Verpflichtete	483		
Von der „ Befreite ganz	194		
Von der „ Befreite halb	—		
Bruttobetrag des im II. Semest. eingehobenen Schulgeldes	4645 fl.	— kr.	
Gesammtbetrag der Aufnahmstaxen	441 „	— „	
Beiträge für die Bibliothek	845 „	50 „	
Zahl der Stipendisten	9 „	— „	
Gesammtbetrag der Stipendien	1234 „	50 „	

Lebensalter der Schüler
am Ende des II. Semesters.

I. Klasse.		Oberste Klasse.	
mit 9 Jahren	5	mit 17 Jahren	2
„ 10 „	46	„ 18 „	9
„ 11 „	61	„ 19 „	3
„ 12 „	32	„ 20 „	4
„ 13 „	12	„ 21 „	4
„ 14 „	5	„ 22 „	1
„ 15 „	1	„ 23 „	1
„ 16 „	1	„ 24 „	1

Prüfung-Ergebnisse		Oeffentliche Schüler	Privat Schüler	Externist
Zur Maturitätsprüfung gemeldet		24	1	10
Zurückgetreten		—	—	1
Approbirt	vorzüg reif	5	1	—
	reif	10	—	4
Reprobirt	auf ½ Jahr	3	—	—
	auf 1 Jahr	1	—	1
	auf immer	—	—	2
Zur Wiederholungsprüfung aus einem Gegenstande best.		5	—	2
Von den reif Erklärten wendeten sich zu:				
Rechts- und Staatswissenschaft		12	1	2
Medizin		2	—	2
Technischen Studien		—	—	—
Theologie		1	—	—

Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

In der Lehrer-Conferenz vom 11. Dezember 1878 wurden de Lehrkörper vom stellvertretenden Direktor die zur Vermehrung de Lehrmittelsammlungen vorhandenen Geldmittel zur Verfügung gestell und zwar:

1. Der Rest vom Jahre 1878	23 fl.	54 k
2. Die Aufnahmstaxe pro 1879. . . .	441 „	— „
3. Die Schülerbeiträge pro 1879 . . .	845 „	50 „
Zusammen .	1310 fl.	04 k

Der Lehrkörper beschloss, diese Gelder in nachstehender Weis zu verwenden:

a) Für das physikalische Kabinet	300 fl.	— k
b) für das naturhistorische Kabinet . . .	250 „	— „
c) für Wandkarten	100 „	— „
d) für die Schülerbibliothek	200 „	— „
e) für die Lehrbibliothek sammt Fortsetzungen .	300 „	— „
f) für den Büchereinband	160 „	4 „

Der h. galiz. L. S. R. genehmigte diese Beschlüsse mit dem h Erl. von 4. Jänner 1879 Z. 12874.

A. Die Bibliothek wurde vermehrt: I. Durch Ankauf. a) Die Leh rerbibliothek. 1) Gretschel und Wunder, Jahrbuch der Erfindunge 2) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. 3) Barte, Samm lung von Rechnungsaufgaben aus der Planimetrie und Stereometri 4) Smets, Geschichte der österr.-ungar. Monarchie. 5) Menge, Repeti der lat. Grammatik und Stilistik. 6) Falke, Hellas und Rom. 7) Szkoła pedag. Zeitschrift, Fortsetzung. 8) Das Ausland, Fortsetzung. 9) Fried Müller, allgem. Ethnographie, 2. Aufl. 10) Simrock, Handbuch der deut schen Mythologie, 5. Aufl. 11) Sammlung gemeinnütziger Vorträg II. Bd. 12) Mittheilungen aus der hist. Literatur, Fortsetzung. 13) Neu jahrbücher für Philolog. und Pädagogik, Forts. 14) Schmidt, Encyklo pädie des Erziehungs- und Unterrichtswesens, Schlusshefte. 15) Mer guet, Lexicon zu den Reden des Cicero, I. Bd. 16) Zeitschrift für di österr. Gymnasien, Fortsetzung. 17) Stoy, Encyklopäd., Methodologi und Literatur der Pädagogik. 18) Meisner, lat. Phraseologie. 19) Stol Meister der griech. Literatur. 20. Kuher, Grammatik der lat. Sprach 21) Minkwitz, der Tempel — die Mythol. der vorzüglichsten Cultur völker bis zum Christenthum. 22) Jagič, Archiv f. slavische Philologie 23) Osterwald, griech. Sagen als Vorschule zum Studium der Tragike 24) Petiscus, Olimp. (mitologia grec. i rzym.) 25) Pescher-Löwenberg Abhandlungen zur Erd- und Völkerkunde. 26) Johann Kvicala, Vergil' Studien. 27) Autenrieth, Grundzüge der lat. und griech. Moduslehr 28) Delitsch, Beiträge zur Methodik des geogr. Unterrichts. 29) Schu bart, Pausaniae descriptio Graeciae, 2 Bd. 30) Peschel's Geschicht der Erdkunde bis auf Alex. Humboldt. 31) Umlauft, Wanderungen durc

e österr.-ungar. Monarchie. 32) Jahrbuch der geologischen Reichs-
ıstalt, Fortsetzung. 33) Schlömilch, Zeitschrift für Mathem. und Phy-
k, 1. und 2. Heft. 34. Grillparzer, Sappho, Schulausgabe. 35) Brat-
ssevic, Katechismus der österr.-ungar. Monarchie. 36) Oesterr. Gymn.
eitschrift, Fortsetzung. 37) Das Ausland, Forts. 38) Hellas und Rom,
orts. 39) Das Ausland, Forts. 40) Strahalm, politisch stat. Tafel der
ster.-ungar. Monarchie. 41) Das Ausland, Forts. 42) Umlauft, Wan-
erungen durch die öster.-ung. Monarchie, Forts. 43) Hoffmann, Zeit-
hrift für math. und naturwiss. Unterricht. Forts. 44. Jahrbuch der
ologiscben Reichsanstalt, XXVIII. Bd. 45. Roscoc und Schorlemmer,
ehrbuch der Chemie. 46) Dr. Reis, Telephon und s. Anrufapparat.
7) Baraniecki, teorya wyznaczników, zesz. I. i II. 48) Dölp, die De-
rminanten. 49) Bobrzyński, dzieje Polski. 50) Merguet, Lexicon zu
en Reden Cicero's, II. Bd. 51) Mittheilungen aus der histor. Literatur.
II. Jahrg. 52) Zeitschrift für österr. Gymnasien, Forts. 53) Neue Jahr-
icher für Philolog. und Pädag., Forts. 54) Mathiessen, Grundzüge
er antik. und modern. Algebra. 55) Müller, alg. Ethnographie, Forts.
6) Marquardt, Handbuch der röm. Alterthümer, Forts. 57) Osterwald,
rzählungen aus der deutsch. Welt, 3 Bände. 58) Dr. Munk, griech.
iteratur, 2 Hft. 59) Hartl, Demosth. Studien. 60) Bambach, Neuge-
altung der lat. Ortographie. 61. Ciceronis opera von Baiter und Kay-
r, 11 Bände. 62) Cic. Catilin. Reden von Richter. 63) Demosthenes
eden von Westermann, 3 Bände. 64) Giesecke, homerische Vorschule.
5) Herbart's pädagog. Schriften, 2 Bände. 66) Horatii opera ed. Kel-
r et Holber. 67) Jochmann, Grundriss der Experimentalphysik. 68) Li-
us, L. XXI. und XXII. von Wölfflin. 69) Platons Phaedon v. Woll-
ab. 70) Taciti Agricola v. Peter. 71) Taciti Agricola v. Draegerth.
2) Vergil's Aeneis v. Cappes. 73) Vergil's Gedichte v. Ladewieg. 74. Ber-
er, Sallust's Catillina und die catillin. Reden des Cicero. 75) Caesar
e bell. gal. v. Rheinhard. 76) Cicero's Cato maior und Caelius Tüc-
ng. 77) Hermann, die formale Technik der homer. Reden. 78) Prel-
r, röm. Mythologie. 79) Vergil's Bucolica v. Glaser. 80) Vergil's Ge-
gica v. Bockmüller. 81) Ihne, römische Geschichte 5. Bd.

b) Jugendbibliothek. 1) Narbuttówna, w Ameryce. 2) Wiśniowski,
zieci królowéj Oceanu. 3) Hübner, podróż naokoło świata, 3 tomy.
) Hübner, podroż naokoło ziemi, 3 tomy. 5) Böcker, unter dem Halb-
ond. 6) Meyne-Reid, porwana siostra. 7) Tatomir, geografia dawnéj
olski. 8) Becker, oblężenie Troji. 9) Becker, powrót Ulissesa. 10) Ta-
mir, O Kazimierzu Wielkim. 11. Zawadzki, grody polskie. 12. Mach-
zyńska, powieści. 13) Die „Franklin-Expedition". 14) Hauff's Märchen.
5) Die Busch-Jäger. 16) Festgabe f. 1862. 17) Jugendgabe. 18) Opo-
iadania historyczne. 19) Die jnngen Boers. 20) Die Wunder der Stern-
elt. 21) Wieczory czwartkowe. 22) Das Buch wunderb. Erfindungen.
3) Der Jugend liebste Stunden. 24) Der kühne Malaye. 25) Natur-
lder und Reise-Skizzen. 26) Der Jugendfreund. 27) Sawczyński „Frank-
n". 28) Neues Märchenbuch. 29) Das Buch der Welt, I. u. II. Band.

30) Abenteuer und Reisen. 31) Obrazy natury. 32) Ein Weltfahre 33) Kosmos für die Jugend. 34) Jagd-Skizzen, 2 Bände. 35) Der Ju gend Lust und Lehre. 36) Jugendalbum 1858. 37) Gulliver Reise 38) Der Erdball. 39) Po szkolnym roku. 40) Hoffmann, biblia dl młodzieży.

II. Durch Schenkung. a) Für die Lehrerbibliothek: 1) Vom k. k Schulrath und Gymnasialdirektor Herrn Dr. Ambros von Janowski ein sehr nahmhafte Spende von 116 Werken, meist philologisch-historische Inhaltes, nebst einer Anzahl von wissenschaftlichen Broschüren, wofü der Lehrkörper dem Herrn Geschenkgeber hiemit seinen wärmste Dank auszusprechen die Ehre hat. 2) Von der verehrlichen Firm „Himmelblau" in Krakau: Przykłady i wzory poetów i proz. pol. prze Mecherzyńskiego, tom I. i II. 3) Von der verehrlichen Buchhandlun Graeser in Wien: Pokorny, neuer Grundriss der Logik und Hübe Uebungsbuch für den Lateinunterricht. 4) Von der verehrl. Firma „Ber mann" in Wien: Hauler, lat. Uebungsbuch. 5) Von der verehrl. Firm Bädeker: Spiess, Uebungsbuch z. Uebersetzen aus dem Griech. un viceversa. 6) Vom hohen Landes-Ausschuss: Rylski, narzędzia i ma chiny rolnicze. 7) Von der verehrl. Firna Neff in Stuttgart: Jul. Cae sar von Reinhard. 8) Von Dr. Gerstmann: Wajgel, o zębach żab kra jowych. 9) Vom hohen Unterrichts-Ministerium, Bericht über das öste Unterrichtswesen aus Anlass der Weltausstellung 1873, 2 Theile un 1 Heft statist. Tafeln. 10) Vom Secretär der Lemberger Handelskam mer, Herrn Maximilian Bodyński: Grosse statistische Wand-Karte Ga lizien's und der Bukowina in 10 Blättern.

b) Für die Jugendbibliothek: 1) Von der Hochgebornen Fra Gräfin Neipperg eine grössere Anzahl von Werken über deutsche Spra che und Literatur, Aesthetik und Mathematik, wofür Hochderselbe im Namen der armen studirenden Schüler der tiefgefühlteste Dank aus gesprochen wird. 2) Vom Schüler der IV. Kl. Thaddäus Gorecki, vo dem ausserordentl. Schüler der VI. Kl. Ladislaus von Micewski un von den Abiturienten Graf Arthur von Russocki und Wladimir Sołty kiewicz eine nahmhafte Anzahl von lat. und griech. Textausgaben un sonstigen Lehrbüchern für das Ober-Gymnasium. Die Direktion ha ihnen für diesen Beweis collegialer Theilnahme für die mittellose stu dirende Jugend gebührenden Dank und Anerkennung ausgedrückt.

B. Die Lehrmittelsammlung für den geogr.-historischen Unterrich wurde durch Ankauf nachbenannter Kartenwerke vermehrt. 1) Kieper Asien, das röm. Reich, alte Welt, Alt-Italien, Alt-Griechenland (in j 2 Exemplaren) 2) Hölzel, Planiglobien, 2 Exempl. 3) Chavanne, Africa 1 Exemplar.

C) Das physikalische Kabinet wurde durch Ankauf um nachste hende Apparate vermehrt: 1) Savart's Sirenenscheibe. 2) Universal areometer. 3) Hydraulische Presse. 4) Mariotte's Ausflussapparat. 5) Ace ometer. 6) Glastropfen für Dichtebestimg. der Fl. 7) Glasballon mi Hahn für die Luftpumpe. 8) Zwei Zungenpfeifen. 9) Stimmorgan de

Menschen. 10) Stimmgabelapparat nach Melde. 11) Thermophon. 12) App. für die Leitungsfähigkeit der Fl. 13) Heron's rotirende Dampfkugel. 14) Dunkelkammer. 15) Anlegegoniometer. 16) Offenes Fernrohr. 17) Bumsen's Photometer. 18) $\lambda/4$ Platte. 19) Ein Daniel'sches und ein Callan'sches Element. 20) Apparat zur Zerlegung der Salze. 21) Batterie von 4 Flaschen. 22) Henley's allgem. Auslader. 23) Motor nach Froment. 24) Apparat für Lichtenbergische Figuren. 25) Eudiometer. 26) Retorte aus Blei. 27) Verbrennungsofen nach Siebig. 28) Trockenapparat. 29) Hähne aus Glas und Metall. 30) Pnizetten. 31) Blasebalg.

D. Für das Naturalien-Kabinet wurden angeschafft: 1) Eine Kryptogamen-Sammlung bestehend aus 155 Algen und Tangen, 45 Flechten, 81 Moosen und 54 Farnen. 2) Theils ausgestopft, theils Spirituspräparate: Cynocephalus mormon; Sorex fodiens. Mustella martes. Mustella erminea. Hypudaeus amphibius. Hypudaeus arvalis. Dipus telum. Falco peregrinus. Corvus corax. Sturnus vulgaris. Turdus musicus. Turdus viscivorus. Alauda arvensis. Pyrrhula vulgaris. Troglodytes parvulus. Hirundo urbica. Hirundo rustica. Cypselus murarius. Caprimulgus europaeus. Coracias garrula. Alcedo ispida. Upupa epops. Columba livia fera. Columba turtur. Columba migratoria. Phasianus colchicus. Perdix cinerea. Perdix coturnix. Himantopus rufipes. Vanellus cristetus. Fulica atra. Procellaria glacialis. Colymbus atrogularis. Lacerta viridis. Draco volans. Crocodilus vulgaris. Python sp. Hyla viridis. Rana esculenta et temporaria. Bufo cinereus. Bombinator igneus. Larve von Salamandra esculenta. Triton punctatus. Perca fluviatilis. Scomber scombrus. Dentex vulgaris. Trigla hirundo. Salmo salar. Gadus sp. Solea, Acipenser ruthenus. Squalus catulus. Haifischei. Larve von Dytiscus, Gruppe von Ameisen, (Larve, Puppe etc.). Gruppe einer Fliege (Made, Cocon, Imago). Larve von Myrmecoleon formicarius, Gruppe von Blatta orientalis (Ei, Larve etc.). Gruppe von Pentatoma. Gruppe von Notonecta glauca, Scorpio mexicanus, Chelifer concroides, Epeira diadema, Mygale avicularia, Nephrops norvegicus, Pagurus Bernhardus, Carcinus maenas, Serpula sp., Lumbricus agricola, Ascaris lumbricoides, Filaria, Cysticercus cellulosa, Botriocephalus latus, Cetopus vulgaris. Ei eines Cephalopoden, Limax sp., Arion empiricorum, Chiton siculus, Vermetus gigas, Clio borealis, Medusa sp. und Pennatula rubra. 3) Dr. Oscar Fraas, geologische Wandtafeln für den Anschauungsunterricht. 4) Dr. W. Ahles, botanische Wandtafeln für den Anschauungsunterricht.

An Geschenken giengen ein: 1) 148 Stück Mineralien, Geschenk des Betriebs-Inspektor der Lemberg-Czernowitz-Jassy Eisenbahn, Herrn Franz Lipp. 2) 70 Kristalmodelle aus Pappe, Geschenk des Schülers der V. Klasse Eugen Schindler. 3) Das Schädeldach eines Kindes, Geschenk des Schülers der VI. Klasse Elias Feuerstein. 4) Emys europaea (Steingeispräparat), Geschänk des Schülers der II. Klasse Ernst Winkler.

Wichtigere Erlässe

der höheren Schulbehörden im Laufe des Jahres 1878/9.

1. Durch Erl. des h. k. k. Unt. Minist. v. 21. September 1878 Z. 15551 wird angeordnet, dass Frauen die Ablegung der Maturitäts-Prüfung nicht zu verweigern und nach derselben ein „Zeugniss" (nicht aber ein Maturitäts-Zeugniss) auszustellen und anstatt der sonst vorgeschriebenen Schlussclausel mit der Anmerkung zu versehen ist, dass „Examinandin denjenigen Anfornungen genügt habe, welche bei einer Maturitäts-Prüfuug an die männliche Jugend gestellt werden".

2. Mit dem h. Unterrichts-Minist. Erl. v. 4. November 1878 Z. 17722 werden die Normen festgestellt, unter welchen in Hinkunft die Schüler von der Zahlung des ganzen oder halben Unterrichtsgeldes befreit werden können.

3) Der Erl. des h. galiz. L. S. R. v. 4. Jänner 1879 Z. 12173 verordnet, dass jeder in die I. Gymnasial-Klasse eintretende Schüler sich mit dem Tauf oder Geburtsscheine auszuweisen hat.

4) Mit Erl. des h. galiz. L. S. R. vom 18. Jänner 1879 Z. 10719 wird das in polnischer Sprache verfasste Werk des Dr. Isidor Szaraniewicz „Geographisch-statistische Beschreibung der österreichisch-ungarischen Monarchie" beim Unterrichtsgebrauche für zulässig erklärt.

5) Laut Erlasses des h. k. k. Minist. für C. und U. v. 22. Jänner 1879 Z. 803 werden in Hinkunft diejenigen Abiturienten, deren Durchschnittsleistungen aus den vier letzten Semestern in der Geschichte und in der Physik durch die Noten „lobenswert", „vorzüglich" oder „ausgezeichnet" charakterisirt werden können, von der Prüfung aus diesen beiden Gegenständen losgezählt und ihnen die zukommenden Durchschnittsnoten aus diesen beiden Gegenständen mit Einfluss auf den Gesammtcalcül in das Maturitäts-Zeugniss eingetragen.

Diese Bestimmung hat nach h. Min. Erl. v. 5. Februar 1879, Z. 1921 auch für die Privatisten eines Gymnasiums zu gelten, wenn dieselben ihrer Verpflichtung nachgekommen sind und durch die vorgeschriebenen Semestral-Prüfungen über sämmtliche vier Semester der siebenten und achten Gymnasial-Klasse staatsgiltige Zeugnisse erworben haben.

6) Mit Erl. des h. L. S. R. v. 23. Februar 1879, Z. 1976 wird den Schülern der Mittelschulen der Eintritt in die Gerichtssäle in der Absicht, öffentlichen Verhandlungen beizuwohnen, untersagt.

7) Nach der h. Unt. Minist. Verordnung v. 8. Mai l. J. Z. 2177 hat jeder Maturitätsprüfungs-Kandidat, welcher als öffentlicher Schüler einer Staatsmittelschule im Genusse der halben Schulgeldbefreiung steht, auch nur die Hälfte der vorgeschriebenen Maturitätsprüfungs-Taxe zu erlegen.

8) Mit Erl. des h. galiz. L. S. R. v. 30. Juni l. J. Z. 5718 werden bezüglich des Kanzlei-Pauschales und der Art der Verrechnung desselben neue Normen gegeben.

Bestimmungen, das nächstfolgende Schuljahr betreffend.

Das neue Schuljahr beginnt am 1. September 1879 mit dem feierlichen Hochamte zur Anrufung des heiligen Geistes.

Schüler, welche in die erste Klasse aufgenommen werden wollen, haben mittelst eines Tauf- oder Geburtsscheines nachzuweisen, dass sie das 9. Lebensjahr entweder schon vollendet haben oder es im ersten Quartal desselben Schuljahres vollenden werden. Zugleich wird im Sinne der neuen Unterrichts-Ministerial-Verordnung vom 7. April 1878 Z. 5410 von ihnen bei der Aufnahme ein Frequentationszeugniss derjenigen Volksschule, welcher sie zuletzt angehört haben, gefordert werden; dieses hat die ausdrückliche Bezeichnung, dass es zum Zwecke des Eintrittes in eine Mittelschule ausgestellt wurde, ferner die Noten aus den einzelnen Lehrgegenständen zu enthalten. Doch bleibt bei der Entscheidung über die Aufnahme nur die gut bestandene Aufnahmsprüfung massgebend. Bei dieser Prüfung werden folgende Anforderungen gestellt: Fertigkeit im Lesen und Schreiben der (deutschen) Unterrichtssprache und einer Landessprache, Kenntniss der Elemente aus der Formenlehre, Fertigkeit im Analisiren einfacher, bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Ortographie, richtige Anwendung der Unterscheidungszeichen beim Diktandoschreiben, Uebung in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

Jeder neu eintretende Schüler zahlt eine Aufnahmstaxe von 2 fl. 10 kr. und einen Beitrag von 1 fl. zu dem Lehrmittelfonde; letzteren zahlen auch die dem Gymnasium bereits angehörenden Schüler bei der Wiederaufnahme.

Von andern Lehranstalten kommende Schüler müssen das Studienzeugniss vom letzten Semester mit der Entlassungsklausel, sowie auch etwaige Schulgeldbefreiungs- oder Stipendiendekrete vorweisen.

Die Aufnahme der Privatisten unterliegt denselben Bedingungen, wie die der öffentlichen Schüler.

Glechzeitig findet die Einschreibung von Schülern in die Vorbereitungs-Klasse statt; jene, welche kein Zeugniss der Volksschule besitzen, müssen einer Aufnahmsprüfung unterzogen werden.

Verspäteten Meldungen zur Aufnahme oder zum Wiedereintritte kann keine Folge gegeben werden.

Lemberg, am 26. Juli 1879.

Wilhelm Schechtel,
Direktor-Stellvertreter.

FEST-ODE,

verfasst und vorgetragen vom Direktor-Stellvertreter bei Aufstellung der neu angeschafften Bildnisse Ihrer Majestäten des Kaisers und der Kaiserin aus Anlass der Feier der silbernen Hochzeit Allerhöchst derselben am 24. April 1879.

Horch, welch' Jubel ergiesst weit durch das Reich sich hin,
Hell wie Silbergetön, wallend wie Opferrauch!
Immer mächtiger schallt freudiges Jauchzen in
Tausendstimmigen Chören:

„Heil dem Kaiser, o Heil Ihr auch, der Kaiserin,
Heut' nach zwanzig und fünf Jahren des Ehebund's!
Heil Elisabeth, Heil Ihm, der da lieber sich
Vater nennet, als Kaiser!"

Also jubeln auch wir! Herzen und feurige
Seelen wallen Euch zu, beten um Segen für
Euch, um Segen zu Gott! Wie an der Donau fern,
Tönt Gebet längs der Weichsel!

Dankdurchdrungen an Euch hänget Galizia's
Auge, froh im Genuss besserer Zeiten des
Wohlstand's unter dem Schild wahrer Gerechtigkeit —
Wonne strahlt in dem Auge!

Segentriefende That ist ja Dein Wirken, Herr!
Aus dem Borne des Rechts, kräftiger Weisheit fliesst
Wohlthun reichlich dem Volk, Perlen des Thaues gleich:
Habsburg's Scepter ist — Milde!

Darum Heil Euch, Heil uns! Seht, wie die Wolken längst
Flohn, die Schleier der Nacht! Goldener Schimmer strahlt
Auf Galizia's Land, klar in die Lüfte baut
Iris Bogen des Friedens!

Mutig regt sich das Volk, Handel Gewerbe und Kunst;
Aufflammet der Fleiss, spannt jede Nerve an,
Kraft erstehet um Kraft, tausendfach emsige
Hände schaffen nun rastlos.

Selbst das krieg'rische Schwert und der Liktoren Stahl
Wird zur Pflugschar gemacht; nimmer in Blut getaucht,
Furcht sie friedlich das Feld, lockert den Boden auf,
Reichlich Samen zu fassen.

Wie erblühet das Land, Felder und Fluren, gleich
Tempe! Herdengeläut', friedlicher Hirtensang
Und im wohnlichen Dorf heitere Tänze, sie
Künden Wohlfahrt im Lande!

Also segnende That ist hier dein Wirken, Herr!
Aus dem Borne des Rechts, kräftiger Weisheit fliesst
Wohlthun reichlich dem Volk, Perlen des Taues gleich:
Mächtig führst Du das Ruder!

D'rum mit Adlereil trug weit durch die Gaue hin
Dankbar kündender Ruf, ruhmvoll und segensvoll,
Eu'rer Thaten Gepräg staunend von Munde zu
Munde — Enkeln noch teuer!

O, so rufet zum Schluss, weihevoll huldigend,
Ruf't in Liebe und Dank, tief aus des Herzens Grund:
„Hoch dem Kaiser und Herrn! Hoch uns'rer Kaiserin!
„Langes Leben den Herrschern!"

Classification und Location der Schüler.

I. A. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Gross Samuel.
Chuvis Kelman.
Ax Abraham.

Erste Klasse:

Czerski Maryan.
Buchstab Jakob.
Braun Karl Leopold.
Czerlunczakiewicz Cyrill.
Fasan Johann Ludwig.
Baczyński Johann.
Bermes Wladimir.
Biesiadecki Franz Xawer.
Baranowski Johann.
Baczes Mechel.
14. Antoniewicz Josef.
15. Czyrski Miecislaus.
16. Chachamowicz Hersch.
17. Darmann Moses.
18. Bogdanowicz Andreas.
19. Klimke Josef.
20. Bisikiewicz Alexander.
21. Bodek Schame.
22 Negrusz Michael.
23. Kałużniacki Julius.

4 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.
1 Schüler erhielt die zweite Kl.
11 Schüler erhielten die dritte Kl.

I. B. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Kraus Emil.
Flecker Osias.
Lilien Norbert.
Kaufmann Karl.

Erste Klasse:

Königsberger Ludwig.
Hansel Arnold.
Horowitz Abraham.
Lehr Simon.
Kéler Ludwig.
Herzig Joseph.
Landau Abraham.
Jabłoński Miecislaus.
Kurzer Berl
Hiss Chaim.
Kiebel Salomon.
16. Eberhard Maximilian.
17. Koblížek Joseph.
18. Gruder David.
19. Helfer Getzel.
20. Grünberg Lazarus.
21. Korkes David.
22. Herforth Ferdinand.
23. Godlewski Eduard.
24. Herzer Berisch.
25. Mesuse Mechel.
26. Haschka Johann.
27. Duda Basil.
28. Kostrakiewicz Stanislaus.

3 Schülern wurde gestatttet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.
7 Schüler erhielten die dritte Kl.

I. C. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Metzger Josef.
2. Ortyński Michael.
3. Rochmiss Meylech.
4. Malinowski Kasimir.
5. Nosek Wladimir.
6. Pižl Bronislaus.
7. Pieńczykowski Meliton.

Erste Klasse:

8. Matkowski Karl.
9. Roth Josef.
10. Rentschner Wolf.
11. Lipp Oskar.
12. Piasecki Nicolaus.
13. Mayer Alexander.
14. Nestel Isaak.
15. Meisels Isaak.
16. Łopatyński Leon.
17. Pensias Simon.
18. Nass Maylech.
19. Raschkes Arnold.
20. Hojwanowicz Johann.
21. Posthorn Israel.
22. Obst Samuel.
23. Ron Max.
24. Mikołajewicz Wladimir.
25. Mitter Raimund.
26. Luka Arnold.
27. Reizes Samuel.
28. Rothberg Elkune.
29. Paczosiński Adam.
30. Mayer Jakob.
31. Rappaport Dawid.

4 Schülern wurde gestattet, d Prüfung aus einem Lehrg genstande zu wiederholen.
2 Schüler erhielten die zweite K
5 Schüler erhielten die dritte K

I. D. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Schellenberg Leopold.
2. Tappert Fridolin.
3. Völker Alfred.
4. Witz Leopold.

Erste Klasse:

5. Selzer Isidor.
6. Tartik Jakob.
7. Walder Dawid.
8. Zipper Oskar.
9. Rosner Abraham.
10. Schmidt Adolf.
11. Smutny Alexander.
12. Stepler Abraham.
13. Zipper Karl.
14. Węgrzynowicz Wladimir.
15. Sygall Berisch.
16. Torbe Wilhelm.
17. Wolken Abraham.
18. Wosmek Johann.
19. Schnerch Karl.
20. Sokal Moses.
21. Stark Dawid.
22. Senyk Nikolaus.
23. Winnicki Josef.
24. Strański Emil.
25. Seller Josef.
26. Wołos Anton.
27. Wysocki Kornel.
28. Stauber Edmund.

10 Schülern wurde gestattet, d Prüfung aus einem Lehrg genstande zu wiederholen.
3 Schüler erhielten die dritte K

II. A. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Bock Wilhelm.
2. Gebhardt Heinrich.
3. Auerswald Eduard.

Erste Klasse:

4. Czabański Johann.
5. Czech Arnold.
6. Negrusz Ladislaus.

Bohin Jakob.
Gutt Bernhard.
Gall Heinrich.
Freiberger Meyer.
Grüner Moses.
Floch Johann.
Kuncewicz Isidor.
Bernstein Moses.
Caspary Ludwig.
Cavanna Johann.
Bikeles Abraham.
Bilwin Josef.

19. Giselt Adolf.
20. Fritz Marzell.
21. Dutczyński Alfred.
22. Fraenkel Josef.
23. Berger Leo.
24. Baraun Salomon.
25. Graf Jakob.

7 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.
2 Schüler erhielten die dritte Kl.

II. B. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Horn Franz.
Kroch Salomon.
Korkis Abraham.

Erste Klasse:

Hescheles David.
Grossfeld Josef.
Łopuszański Eugen.
Kroch Joseph.
Kormann Jakob.
Kreiter Moses.
Meschel Josef.
Kéler Alfred.
Koch Max.
Szulakiewicz Sigmund.
Mańkowski Johann.
Korol Wladimir.
Katz Samuel.

17. Komora Ernst.
18. Hutter Joseph.
19. Łoziński Anton.
20. Modlinger Osias.
21. Hossmann Sigmund.
22. Kugel Ignaz.
23. Kugel Anton.
24. Medyński Thomas.
25. Kobylański Nicolaus.
26. Miłaszewski Peter.
27. Luft Moses.
28. Moldauer Adolf.
29. Krug Egmont.
30. Maýr Karl.

5 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.
2 Schüler erhielten die zweite Kl.

II. C. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Schmos Mendel.

Erste Klasse:

Przybyła Julius.
Passakas Josef.
Prager Samuel.
Schermant Julius.
Winckler Ernst.
Palacka Emil.
Skrocki Michael.

9. Szczęsnowicz Stanislaus.
10. Sawczyński Boleslaus.
11. Tichy Franz.
12. Sumper Ludwig.
13. Nebenzahl Samuel.
14. Urich Samuel.
15. Pollak Richard.
16. Wohl Heinrich.
17. Nick Isaak.
18. Zachariewicz Vigo.
19. Schulbaum Markus.

20. Steffel Oskar.
21. Koblížek Adolf.
22. Rosenberg Aron.
23. Morgenstern Wilhelm.
24. Nick Osias.
25. Schimmel Moses.

3 Schüler erhielten die zweite K
6 „ „ „ dritte K

III. A. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Fundalewicz Anton.
2. Hornstein Bernhard.
3. Korczyński Anton.
4. Chiger Moses.
5. Dębicki Orest.
6. Dorf Salmen.
7. Decykiewicz Isidor.

Erste Klasse:

8. Brill Edmund.
9. Krzyżanowski Stanislaus.
10. Bohin Salomon.
11. Caspary Viktor.
12. Fischer Heinrich.
13. Kałamuniecki Emil.
14. Iwańcew Johann.
15. Hausser Adalbert.
16. Charmann Abraham.
17. Herz Ludwig.
18. Diamant Wilhelm.
19. Barb Heinrich.
20. Czerlunczakiewicz Miron.
21. Kalwach Franz.
22. Birnbaum Gustav.
23. Fluhr Isaak.
24. Błażek Franz.
25. Feldstein Emanuel.
26. Fasan Michael.
27. Hift Josef.
28. Kwoczyński Roman.
29. Körber Anton.
30. Łękawski Wladimir.
31. Hlebowicki Severin.
32. Bisikiewicz Hieronim.
33. Boscovics Anton.

8 Schülern wurde gestattet, d
Prüfung aus einem Lehrg
genstande zu wiederholen.
1 Schüler erhielt die zweite K
4 Schüler erhielten die dritte K

III. B. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Sołowij Peter.
2. Willer Abraham.
3. Reuter Jakob.
4. Rechtsamer Jakob.
5. Podhorodecki Ludwig.

Erste Klasse:

6. Zion Lazar.
7. Rifczes Philipp.
8. Seliger Wolf.
9. Mussyj Theophil.
10. Maschler Abraham.
11. Reich Jakob.
12. Łahoła Elias.
13. Meth Meschulem.
14. Lityński Wladimir.
15. Koniuszecki Michael.
16. Lierhammer Theodor.
17. Menkes Leib.
18. Schnapek Moses.
19. Urich Emil.
20. Hanakowski Wladimir.
21. Licht Samuel.
22. Kurzer Bernhard.
23. Spiegel Abraham.
24. Hulles Samuel.
25. Luft Leib.
26. Neumann Adolph.
27. Zucker Moritz.
28. Kiszelka Eugen.

12 Schülern wurde gestattet, d
Prüfung aus einem Lehrg
genstande zu wiederholen.
1 Schüler erhielt die zweite K
9 „ erhielten die dritte K

IV. A. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Gelber Lasor (Ludwig gen.)
Gorecki Thaddäus.
Bruckmann Alois.

Erste Klasse:

Awerbach Josef Isaak.
Dawidczak Theodor.
Buber Raphael.
Meller Meiser.
Bloch Leib.
Krajewski Josef.
Oliynyk Basilius.
Brendel Aaron.
Ehrlich David.
13. Feuerstein Samuel.
14. Aker Salomon.
15. Herzer Rubin.
16. Brill Menasche.
17. Łojewski Adam.
18. Lauterstein Josef Max.
19. Bolechiwski Nicetas.
20. Dubs Jakob.
21. Hochfeld Wilhelm.
22. Glasgall Manfred.

11 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.
5 Schüler erhielten die dritte Kl.

IV. B. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Mikiewicz Boleslaus.
Sokal Klemens.
Mojżeszowicz Nicolaus.
Schaff Emil.

Erste Klasse:

Weigl Friedrich.
Pokorny Friedrich.
Singer Manele.
Procyk Gregor.
Schön Abraham.
Menkes Arnold.
Łopuszański Stephan.
Rozner Isaak.
Zion Oswald.
Zach Max.
Sokal Rubin.
16. Weiss Ludwig.
17. Spiegel Meyer.
18. Sack Oskar.
19. Menkes Pinkas.
20. Nestorowicz Theophil.
21. Parnes Bendit.
22. Reinhold Jonas.
23. Modlinger David.
24. Popiel Moses.
25. Lewicki Eugen.
26. Reinhold Sigmund.
27. Präger Leon.
28. Rauch Bernhard.
29. Stauber Georg.
30. Stücker Wolf.

10 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.

V. A. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

Decykiewicz Wladimir.
Klarfeld Heinrich.
Last Berl.
Elster Josef.

Erste Klasse:

5. Follender Markus.
6. Last Chaskel.
7. Kuryłowicz Basil.
8. Berger Max.

9. Linie Abraham.
10. Kuhn Adolf.
11. Laufer Max.
12. Dzerowicz Alexander.
13. Jasser Itzig.
14. Frey David.
15. Feuerstein Nathan.
16. Goldwasser Moritz.
17. Barb Leopold.
18. Gallasch Bronislaus.
19. Feld Itzig.
20. Cukier Xaverius.
21. Gottlieb Osias.
22. Fluhr Leiser.

5 Schülern wurde gestattet, di Prüfung aus einem Lehrge genstande zu wiederholen.

2 Schüler erhielten die dritte K

V. B. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Neumann Adolf.
2. Schindler Eugen.

Erste Klasse:

3. Schirmer Eduard.
4. Masckler Leo.
5. Strański Adolf.
6. Szafrański Wladimir.
7. Pohl Leib.
8. Paneth Sewerin.
9. Mazer Isaak.
10. Schaff Süsche.
11. Rifczes Nathan.
12. Mayer Josef.
13. Pawlików Konstantin.
14. Mesch Kalmen.
15. Rawski Thomas.
16. Schenk Ernst.
17. Strański Arthur.
18. Petak Adolf.
19. Strzelbicki Anton.
20. Rifczes Adolf.
21. Orzechowski Maryan.
22. Möser Julius.
23. Schiefer Sigmund.
24. Rappaport Isaak.
25. Rapp Leon.

4 Schülern wurde gestattet, d Prüfung aus einem Lehrg genstande zu wiederholen.

4 Schüler erhielten die dritte K

VI. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Tomaszewski Johann.
2. Witz Julius.
3. Nossig Alfred.
4. Menkes Moses.
5. Niger Gustav.
6. Schechtel Rudolf.
7. Romanowski Basil.

Erste Klasse:

8. Knauer Alexander.
9. Kraus Max.
10. Urech Markus.
11. Paternos Maximilian.
12. Grünstein Emil.
13. Hanicki Wladimir.
14. Boscovics Albert.
15. Janowicz Moses.
16. Telichowski Josef.
17. Lilien Adolf.
18. Offe Jakob.
19. Offe Mechel.
20. Mann Josef.
21. Bohosiewicz Josef Bogdan.
22. Frisch Josef.
23. Boscovics Karl.
24. Stawniczy Julian.
25. Haralewicz Theophil.
26. Adlerstein Max.
27. Rosenthal Mayer.
28. Jurkiewicz Josef.
29. Sternal Thomas.
30. Brendel Moses.
31. Goldfarb Josef.

. Smoleński Bronislaus.
. Wittlin Max.
. Rastawiecki Marian.
. Hansel Fischel.
. Lubich de Milovan Adolf.
. Landau Salomon.
. Feuerstein Elias.

39. Humiecki Julian.
40. Mitrofanowicz Eugen.
41. Dreschowitz Josef.

3 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.

VII. Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

. Fedorowicz Hippolit.

Erste Klasse:

. Schulbaum David.
. Bernfeld Samuel.
. Gratzka Josef.
. Heller Samuel.
. Reyzner Miecislaus.
. Decykiewicz Johann.
. Brunicki Zdzislaus.
. Jednaki Michael.
. Tymczyszyn Michael.

11. Senyk Kornel.
12. Rosenbusch Leon.
13. Erben Theophil.
14. Morawski Bronislaus.
15. Prodziewicz Stefan.
16. Roman Israel.
17. Kretz Isucher.
18. Bodyński Miecislaus.

5 Schülern wurde gestattet, die Prüfung aus einem Lehrgegenstande zu wiederholen.

4 Schüler erhielten die dritte Kl.

VERZEICHNISS

r am Schlusse des Schuljahres 1879 für reif erklärten Abiturienten:

a) Von den 24 öffentlichen Schülern der VIII. Klasse:

1. Balas Johann.
2. Bück David.
3. Bylina Karl.
4. Epstein Josef.
5. Flecker Osias (mit Auszeichnung).
6. Gelber Jakob (mit Auszeichnung).
7. Jastrzębski Kasimir.
8. Klarfeld Leon (mit Auszeichnung).
9. Löwenherz Araham (mit Auszeichnung).
10. Lubieniecki Nikolaus.
11. Rosenstein Leon.
12. Scherer Wilhelm.
13. Sołtykiewicz Wladimir.
14. Szkirpan Witold.
15. Weber Antschel (mit Auszeichnung)

5 wurden zur Wiederholungsprüfung aus einem Gegenstande nach n Ferien bestimmt, 3 auf ein halbes, 1 auf ein ganzes Jahr reprobirt.

b) von den 11 Privatisten und Externisten:

1. Błonarowicz Augustin.
2. Graf Gołuchowski Josef (mit Auszeichnung).
3. Pełłech Theodosius.
4. Graf Russocki Artur.
5. Tymiński Titus.

2 wurden zur Wiederholungsprüfung aus einem Gegenstande nac den Ferien bestimmt; 1 wurde auf ein Jahr, 2 ohne Bestimmung ein Termins, weil zum zweiten mal reprobirt; 1 Externist hat sich d mündlichen Prüfung nicht unterzogen.

Vorbereitungs - Klasse.

Erste Klasse mit Vorzug:

1. Schell Abraham.
2. Dzięedzielewicz Josef.
3. Horwath Alois.
4. Loster Anton.
5. Białoruski Bogdan.

Erste Klasse:

6. Glanz Benjamin.
7. Margulies Max.
8. Kroch Osias.
9. Modlinger Oswald.
10. Stankiewicz Bronislaus.
11. Hescheles Eisig.
12. Czarnecki Julian.
13. Markow Demeter.
14. Kozakiewicz Wladimir.
15. Kiciński Kasimir.
16. Gutter Edmund.
17. Mayer Ladislaus.
18. Bunzel Adolf.
19. Płoszczański Alexander.
20. Sternal Thaddäus.
21. Maly Kasimir.
22. Rubinstein Moses.
23. Mamczura Josef.
24. Popiel Julius.
25. Strutyński Bronislaus.
26. Humiecki Julian.
27. Janicki Vinzenz.
28. Soffer Josef.
29. Feuerstein Neumann.
30. Menkes Leon.
31. Gliniański Eduard.
32. Maschler Berl.
33. Sobolewski Adam.
34. Kräutterblüth Josef.
35. Mayer Julius.
36. Baram Max.
37. Berger Heinrich.
38. Strojnowski Alfred.
39. Jełowicki Felix.
40. Tencza Viktor.
41. Thom Ludwig.
42. Jełowicki Georg.
43. Thom Max.
44. Olszewski Adam.
45. Neuwelt Israel.
46. Steffel Leo.
47. Wierzbicki Franz.
48. Krakauer Jakob.
49. Sekler Chaim.
50. Demczuk Josef.
51. Wiche Josef.
52. Baczyński Julian.
53. Wank Dawid.

3 Schülern wurde gestattet, d Prüfung aus einem Lehrg genstande zu wiedorholen.

Buchdruckerei des Stauropigianischen Instituts.
Geschäftsleiter: *Stefan Huczkowski.*

Beitrag zum Integral-Calcul.

Von **Lorenz Żmurko**,

Professor der Mathematik an der k. k. technischen Akademie in Lemberg.

(Vorgelegt in der Comité-Sitzung des technischen Vereins am 15. April 1867.)

In meiner Abhandlung desselben Titels (Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Juni- und Juli-Heft 1849) habe ich die Integration der Differentialien:

$$\mathrm{I}\ldots dy = \cos^m \varphi \sin^n \varphi \; d\varphi$$

$$\mathrm{II}\ldots dy = (ax^2 + bx + c)^{\frac{k}{2}} x^r \, dx$$

für zulässige Combinationen der Exponenten m, n, k und r dargestellt und gezeigt — wie man sich zu benehmen habe, um ohne mechanischer Zuziehung einer Formelsammlung mittelst eines geregelten, alle Fälle erschöpfenden Verfahrens die Lösung der vorgelegten Aufgaben herbeizuführen.

Um einem vielseitig ausgesprochenen Wunsche entgegenzukommen, habe ich mich entschlossen, die gedachte Arbeit in practischer Kürze wiederzugeben, und insbesondere dadurch zu vervollständigen, dass ich meine Methode auf die Integration einer zusammengesetzteren Differenzialformel

$$\mathrm{III} \quad dy = Pe^{ax} x^r \, dx$$

ausdehne, wobei für ganze und positive k, s und r, sonst aber für beliebige Werthe von a, m, n die Be-

deutung des mit P bezeichneten Ausdruckes aus der Relation:

$$P = (\cos m_1 x)^{k_1} (\cos m_2 x)^{k_2} \ldots (\sin n_1 x)^{s_1} (\sin n_2 x)^{s_2} \ldots$$

zu schöpfen ist.

§. 1

Ueber einige, die angeführten Differentialien betreffenden Transformationen.

A) *Wegschaffung der mit negativen Exponenten versehenen Potenzen der Grundvariablen in dem Differenzial II.*

Die betreffende Transformation bezieht sich zunächst auf die Differentialien:

(1) $$A = \frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{k}{2}} dx}{x^r};\ B = \frac{dx}{x^r (ax^2+bx+c)^{\frac{k}{2}}},$$

in welcher k und r positive ganze Zahlen andeuten.

Ist in A k ungerad, so kann man schreiben:

(2) $$A = \frac{(ax^2+bx+c)^{\frac{k+1}{2}} dx}{x^r (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}} = A_1 + A_2, \text{ wo}$$

$$A_1 = \frac{a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots a_{r-1} x^{r-1}}{x^r (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}} dx$$

(3) $$A_2 = \frac{a_r + a_{r+1} x + a_{r+2} x^2 + \ldots}{(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}} dx,$$

sobald man in (2) die nun mit ganzen Exponenten $\frac{k+1}{2}$ versehene Potenz entwickelt und das erhaltene Polynom in zwei Parthieen zerfällt, von denen die erstere vom Grade (r — 1) den Zähler von A_1 — die zweite hingegen nach Wegschaffung des allen Glie-

dern gemeinschaftlichen Faktors x^r den Zähler von A_2 ausmacht. (4)

Aus (2) und (3) ersieht man, dass es immer möglich sei den Ausdruck A in zwei andere A_1 und A_2 zu zerfällen, von denen der eine (A_2) im Nenner keine Potenz von der Grundvariablen beherbergt — der andere (A_1) hingegen der Form B angehört.

Durch Anwendung der reciproken Substitution

$$x = \frac{1}{z},\ dz = -\frac{dz}{z^2} \tag{5}$$

erhält man:

$$B = -\frac{z^{r'}\,dz}{(a+bz+cz^2)^{\frac{k}{2}}} \text{ wobei } r' = r + k - 2\,; \tag{6}$$

hier ist r' ganz gewiss nicht negativ, weil von den Exponenten r und k jeder wenigstens eine Einheit ausmacht.

In Bezug auf die erste Parthie (3) findet man mit Hilfe (5);

$$A_1 = -\frac{(a_0 z^{r-1} + a_1 z^{r-2} + \ldots + a_{r-2} z + a_{r-1})\,dz}{(a + bz + cz^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

woraus hervorgeht, dass man die in (1) angeführten Differenzialien A und B auf andere zurückführen kann, in welchen die Potenzen der Grundvariablen blos im Zähler vorkommen.

Auch überzeugt man sich leicht, dass im Falle (8) $(k+2) \gtreqless r$ das Differential A sich mit Umgehung der in (2) angedeuteten Zerfällung unmittelbar mittelst der reciproken Substitution (5) auf ein anderes zurückführen lässt, welches im Nenner keine Potenz der Grundvariablen enthält.

𝔅) *Zurückführnng des Differentials* $(ax^2+bx+c)^{\frac{k}{2}} x^r dx$ *auf eines oder mehrere Differentiale, welche der Form:* $[m, n] = \cos^m\varphi \sin^n\varphi\, d\varphi$ *angehören.*

Hier möge die goniometrische Einrichtung sich blos auf positive ganze Werthe von r beziehen, weil wir mittelst der Transformation 𝔄) diesen Zustand immer herbeiführen können.

Sei

$$
(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{T} = ax^2 + bx + c \\ \alpha^2 = 4ac - b^2 \quad \ldots \; 4ac > b^2 \\ \beta^2 = b^2 - 4ac \quad \ldots \; 4ac < b^2 \end{cases}
$$

$$\mathfrak{T}_1 = 2ax + b = \frac{d\mathfrak{T}}{dx}; \quad \frac{\alpha^{k+1}}{2^{k+r+1}\, a^{\frac{k}{2}+r+1}} = N_\alpha;$$

$$\frac{\alpha^{k+1}}{2^{k+r+1}(-a)^{\frac{k}{2}+r+1}} = N'_\alpha,$$

so erhält man:

für $a > o$ und $4ac > b^2$,

$$\mathfrak{T}_1 = \alpha \tang\varphi \text{ setzend:}$$

(10)

1) $$x = \frac{\alpha \sin\varphi - b\cos\varphi}{2a\cos\varphi}; \quad dx = \frac{\alpha\, d\varphi}{2a\cos^2\varphi};$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{T}_1{}^2 + \alpha^2}{4a} = \frac{\alpha^2}{4a\cos^2\varphi}$$

$$\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}} x^r dx = \frac{N_\alpha (\alpha \sin\varphi - b\cos\varphi)^r d\varphi}{\cos^{k+r+2}\varphi}; \text{ hieraus}$$

2) $$\tang\varphi = \frac{\mathfrak{T}_1}{\alpha}; \quad \sin\varphi = \frac{\mathfrak{T}_1}{\sqrt{4a\mathfrak{T}}}; \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{4a\mathfrak{T}}};$$

$$[\tang\tfrac{1}{2}\varphi]^{\pm 1} = \operatorname{cossec}\varphi \mp \operatorname{cott}\varphi = \frac{\sqrt{4a\mathfrak{T}} \mp \alpha}{\mathfrak{T}_1};$$

$$[\tang\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)]^{\pm 1} = \sec\varphi \mp \tang\varphi = \frac{\sqrt{4a\mathfrak{T}} \mp \mathfrak{T}_1}{\alpha};$$

für $a > o$ und $4ac < b^2$,

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{T}_1 = \beta \sec\varphi \text{ setzend:} \\
1) \quad x = \dfrac{\beta - b\cos\varphi}{2a\cos\varphi}; \quad dx = \dfrac{\beta\sin\varphi\, d\varphi}{2a\cos^2\varphi}, \\
\mathfrak{T} = \dfrac{\mathfrak{T}_1{}^2 - \beta^2}{4a} = \dfrac{\beta^2\sin^2\varphi}{4a\cos^2\varphi} = \dfrac{\beta^2\tang^2\varphi}{4a}, \\
\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}} x^r dx = \dfrac{N_\beta(\beta - b\cos\varphi)^r d\varphi}{\cos^{k+r+2}\varphi}; \text{ hieraus} \\
2) \quad \tang\varphi = \dfrac{\sqrt{4a\mathfrak{T}}}{\beta}; \quad \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{4a\mathfrak{T}}}{\mathfrak{T}_1}; \quad \cos\varphi = \dfrac{\beta}{\mathfrak{T}_1} \\
[\tang\tfrac{1}{2}\varphi]^{\pm 1} = \dfrac{\mathfrak{T}_1 \mp \beta}{\sqrt{4a\mathfrak{T}}}; \quad [\tang\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)]^{\pm 1} = \dfrac{\mathfrak{T}_1 \mp \sqrt{4a\mathfrak{T}}}{\beta}
\end{array}\right\} (11);$$

für $a < o$ und $4ac > b^2$,

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{T}_1 = \alpha \tang\varphi \text{ setzend:} \\
1) \quad x = \dfrac{b\cos\varphi - \alpha\sin\varphi}{2(-a)\cos\varphi} \; dx = -\dfrac{\alpha\, d\varphi}{2(-a)\cos^2\varphi}, \\
\mathfrak{T} = -\dfrac{\mathfrak{T}_1{}^2 + \alpha^2}{4(-a)} = -\dfrac{\alpha^2}{4(-a)\cos^2\varphi}, \\
\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}} x^r dx = (-1)^{\frac{k}{2}+r+1} \dfrac{N'_\alpha(b\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)^r d\varphi}{\cos^{k+r+2}\varphi}; \\
\text{hieraus} \\
2) \quad \tang\varphi = \dfrac{\mathfrak{T}_1}{\alpha}; \quad \sin\varphi = \dfrac{\mathfrak{T}_1}{\sqrt{4a\mathfrak{T}}}, \quad \cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{4a\mathfrak{T}}},
\end{array}\right\} (12);$$

& & . . .

für $a < o$ und $4ac < b^2$

(13)

$\mathfrak{T}_1 = \beta \sin\varphi$ setzend:

1) $$x = \frac{b - \beta\sin\varphi}{2(-a)},\ dx = -\frac{\beta\cos\varphi\, d\varphi}{2(-a)},$$

$$\mathfrak{T} = \frac{\beta^2 - \mathfrak{T}_1{}^2}{4(-a)} = \frac{\beta^2\cos^2\varphi}{4(-a)},$$

$$\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}} x^r dx = (-1) N'^{\frac{k}{2}+r+1}_{\beta} (b - \beta\sin\varphi)^r \cos^{k+1}\varphi\, d\varphi;$$ hieraus

2) $$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{T}_1}{\beta},\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{-4a\mathfrak{T}}}{\beta},\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathfrak{T}_1}{\sqrt{-4a\mathfrak{T}}}$$

$$(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)^{\pm 1} = \frac{\beta \mp \sqrt{-4a\mathfrak{T}}}{\mathfrak{T}_1},\ [\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)]^{\pm 1} = \frac{\beta \mp \mathfrak{T}_1}{\sqrt{-4a\mathfrak{T}}}$$

(14)

Endlich erhält man für $4ac = b^2$

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathfrak{T}_1{}^2}{4a},\ x = \frac{\mathfrak{T}_1 - b}{2a},\ dx = \frac{d\mathfrak{T}_1}{2a},$$

$$\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}} x^r dx = \frac{(\mathfrak{T}_1 - b)^r \mathfrak{T}_1{}^k d\mathfrak{T}_1}{2^{k+r+1} \alpha^{\frac{k}{2}+r+1}},$$

$$\mathfrak{T}_1 = 2ax + b.$$

Aus (9) — (14) ersieht man den Gang, wie man sich zu benehmen habe, um das algebraische Differential II in das goniometrische I zu verwandeln, so wie um in die zu erhaltenden Resultate, die ursprüngliche Variable wieder einzuführen. Für $b = o$ geht für beliebiges r das Differential II in ein einziges der Form I angehöriges Differential über.

(15) Beim geraden positiven k und sonst beliebigem r lässt sich durch Entwicklung der nun mit positiven

ganzen Exponenten versehenen Potenz $\mathfrak{T}^{\frac{k}{2}}$ das Differential II als eine Summe von Differentialien darstellen, welche der Form $Nx^s dx$ angehören und somit ohne weitere Anwendung der in $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{B}$) angeführten Transformationen integrabel sind.

$\mathfrak{C}$) *Einige die Formen II und III betreffende Transformationen.*

Es ist für ganze positive m und n und $2m > n$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin^{2m}\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi = \frac{(1-\cos^2\varphi)^m}{\cos^n\varphi}\,d\varphi = S_1 + S_2,\ \text{wobei}\\
&\text{a) } S_1 = \frac{1-\binom{m}{1}\cos^2\varphi+\binom{m}{2}\cos^4\varphi-\ldots+(-1)^{\sigma}\binom{m}{\sigma}\cos^{2\sigma}\varphi}{\cos^n\varphi}\,d\varphi,\\
&S_2 = (-1)^{\sigma+1}\Big\{\binom{m}{\sigma+1}\cos^{2\sigma+2-n}\varphi-\binom{m}{\sigma+2}\cos^{2\sigma+4-n}\varphi+\ldots+\\
&\qquad+(-1)^{m-\sigma-1}\binom{m}{m}\cos^{2m-n}\varphi\Big\}\,d\varphi,\\
&\qquad\text{hier ist } 2\sigma < n,\ 2\sigma+2 \geqq n.
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Eben so erhält man bei derselben Annahme über die Exponenten m und n.

$$\frac{\cos^{2m}\varphi}{\sin^n\varphi}\,d\varphi = S_1' + S_2' \ldots \qquad (17)$$

d. h. Findet man in der goniometrischen Differential-Formel im Zähler einen geraden und höheren Exponenten als im Nenner, so lässt sich nach (16) und (17) die betreffende Differentialform in zwei Parthieen zerfällen. (18)

Die erstere (S_1) besitzt im Nenner höhere Exponenten als im Zähler — die andere (S_2) ist vom Nenner frei.

b) Es ist für positive ganze Werthe von m und n

(19) $$\frac{d\varphi}{\sin^m\varphi \cos^{2n+1-m}\varphi} =$$

$$= \frac{d\varphi\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^n\, d\varphi}{\sin^m\varphi \cos^{2n+1-m}\varphi} = p_1 + p_2.$$

Nach Entwicklung der Potenz $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^n$ erhält man zwei Gruppen von Gliedern, von denen die erste den gemeinschaftlichen Faktor $\sin^m\varphi$ — die zweite
(20) hingegen den gemeinschaftlichen Faktor $\cos^{2n+1-m}\varphi$ besitzt.

Die erste dieser Gruppen wird zur Bildung von p_1 verwendet und bewirkt, dass p_1 im Nenner blos $\cos^{2n+1-m}\varphi$ besitzt, und in Bezug auf die Exponenten, im Nenner um eine Einheit mehr erhält als im Zähler.

Die zweite Gruppe wird zur Bildung der Parthie p_2 verwendet, und bewirkt, dass p_2 im Nenner blos $\sin^m\varphi$ besitzt, und in Bezug auf die Exponenten, im Nenner um eine Einheit mehr erhält als im Zähler.

Die in (19) eingeführte Potenz $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^n$
(21) könnte man die integrirende Einheit nennen, weil hiedurch die Integration der in (19) gegebenen Differentialform vermittelt wird.

c) Es ist für $w = e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$,

(22) $$\cos r\varphi = \frac{w^r + w^{-r}}{2}, \quad \sin r\varphi = \frac{w^r - w^{-r}}{2\sqrt{-1}},$$

weil $w^r = \cos r\varphi + \sin r\varphi\sqrt{-1}$.

Auf Grund (22) findet man den in III ersichtlichen Ausdruck P in folgender Gestalt:

$$P = \frac{(w^{m_1}+w^{-m_1})^{k_1}(w^{m_2}+w^{-m_2})^{k_2}..(w^{n_1}-w^{-n_1})^{s_1}(w^{n_2}-w^{-n_2})^{s_2}..}{a\ (\sqrt{-1})^{s_1+s_2+s_3+\dots}} \quad (23)$$

$$a = 2^{k_1+k_2+\dots+s_1+s_2+s_3+\dots}$$

Entwickelt man in (23) die angezeigten Potenzen, so erhält man nach Ausführung der Multiplicationen der Potenzpolynome mit einander den Ausdruck P in folgender Gestalt:

$$P = \frac{Aw^{\alpha} + Bw^{\beta} + \dots A' w^{-\alpha'} + B' w^{-\beta'} + \dots\dots}{a\ (\sqrt{-1})^{s_1+s_2+s_3+\dots}} \quad (24)$$

Mit Rücksicht auf (22) ist:

$$P = \frac{P_1}{a\,(\sqrt{-1})^{s_1+s_2+\dots}} + \frac{P_2\sqrt{-1}}{a\,(\sqrt{-1})^{s_1+s_2+\dots}},\ \text{wo} \quad (25)$$

$$P_1 = A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi + \dots + A'\cos\alpha'\varphi + B'\cos\beta'\varphi + \dots$$
$$P_2 = A\sin\alpha\varphi + B\sin\beta\varphi + \dots - A'\sin\alpha'\varphi - B'\sin\beta'\varphi - \dots \quad (26)$$

Der Ausdruck P ist ein primärer, darf somit in Folge der eben angedeuteten Transformation keine complexe Form annehmen — dem gemäss muss von den Ausdrücken P_1 und P_2 derjenige den Nullwerth annehmen, welcher zur Bildung des secundären Theils von P beiträgt. Es wird somit

$$P = \frac{A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi + \dots + A'\cos\alpha'\varphi + B'\cos\beta'\varphi + \dots}{a\ (-1)^{\frac{1}{2}(s_1+s_2+\dots)}} \quad (27)$$

wenn die Summe $(s_1+s_2+s_3+\dots)$ eine gerade, hingegen wird

$$P = \frac{A\sin\alpha\varphi + B\sin\beta\varphi + \dots - A'\sin\alpha'\varphi - B'\sin'\beta\varphi - \dots}{a\ (-1)^{\frac{1}{2}[(s_1+s_2+\dots)-1]}} \quad (28)$$

wenn die Summe $[s_1+s_2+s_3+\dots]$ eine ungerade Zahl vorstellt.

Im nächsten Paragraphe wird unser Bestreben sein, eine möglichst einfache Methode zu begründen — mittelst welcher wir vor Allem die Differentialform I für zulässige Combinationen der Exponenten m und n zur unmittelbaren Integration vorbereiten. Bezüglich
(29) des Differentials II brauchen wir nur zu bemerken, dass es sich immer durch Vermittlung der Instructionen in 𝔄) und 𝔅) auf Eines oder mehrere Differentiale der Form I zurückführen lässt, dass somit aus den Integralien der letzteren des Integral von II zusammengesetzt wird.

Schliesslich werden wir zeigen, wie man auf Grund der Transformation ℭ) die Integrationen:

(30) $$\int P dx; \int P x^r dx, \int P x^r e^{ax} dx$$

zu bewerkstelligen hat. —

Hier mögen noch einige Beispiele folgen:

Es ist

1) $$A = \frac{(2x+3x-1)}{x^7}^{3/2} dx = -(2+3z-z^2)^{3/2} z^2 dz =$$

$$= -\frac{(17-[3-2z]^2)^{3/2} z^2 dz}{4} = -\tfrac{17^2}{32}(3-\sqrt{17}\sin\varphi)^2 \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= -\tfrac{17^2}{32}(9\cos^4\varphi - 6\sqrt{17}\cos^4\varphi\sin\varphi + 17\cos^4\varphi\sin^2\varphi) d\varphi.$$

In dem sub 1) vorgelegten Differential A ist wegen $k+2 < r$ zuerst die Substitution $x = \frac{1}{z}$, und dann wegen $a < o$, $4ac < b^2$ die Substitution $3 - 2z = \sqrt{17}\sin\varphi$ effectuirt, um A als eine Summe von goniometrischen Differentialien darzustellen.

Es ist wegen $k+2 > r$

2) $$A = \frac{(2x^2-7x+2)^{3/2} dx}{x^4} = \frac{(2x^2-7x+2)^2 dx}{x^4 (2x^2-7x+2)^{1/2}} = A_1 + A_2;$$

$$A_1 = \frac{4dx}{(2x^2-7x+2)^{\frac{1}{2}}};\ A_2 = \frac{(-28x^3+57x^2-28x+4)\,dx}{x^4(2x^2-7x+2)^{\frac{1}{2}}}$$

oder

$$A_2 = -\frac{(-28+57z-28z^2+4z^3)}{(2-7z+2z^2)^{1/2}}\,dz\,,\ \text{wo } z = \frac{1}{x}\ .$$

Da hier in A_1 und A_2 $4ac < b^2$ und $a > o$, so erhält man mittelst Substitution $4x-7=\sqrt{33}\sec\varphi$ und $4z-7=\sqrt{33}\sec\psi$ den Ausdruck A_1 nach φ und den Ausdruck A_2 nach ψ goniometrisch eingerichtet.

3) $P=\sin^2 2x\cos^3 4x = -\frac{1}{32}(w^2-w^{-2})^2(w^4+w^{-4})^3 =$

$=-(w^{16}-2w^{12}+4w^8-6w^4+w^{-16}-2w^{-12}+4w^{-8}-6w^{-4}+6):32=$

$=-(2\cos 16\varphi-4\cos 12\varphi+8\cos 8\varphi-12\cos 4\varphi+6):32.$

4) Wegen $a > o$ und $4ac > b^2$ ist

$A=(3x^2+5)^{5/2}x^r dx = \frac{\sqrt{5^{r+6}}}{\sqrt{3^{r+1}}}\cdot\frac{\sin^r\varphi}{\cos^{r+7}\varphi}d\varphi$, sobald man

$$\sqrt{3}\,.\,x=\sqrt{5}\,.\,\tang\varphi \text{ setzt.}$$

Die Durchführung von diesen und anderen ähnlichen Beispielen möge sich der Leser in der Art angelegen sein lassen, dass er ohne Zuhilfenahme der in diesem Paragraphe niedergelegten Formeln — blos mittelst Beobachtung des eben begründeten Verfahrens, die nöthigen Transformationen selbstständig und geläufig zu effectuiren vermöge.

§. 2.

Integration der goniometrischen Differentialien.

Sind in

$$[m, n] = \cos^m\varphi\ \sin^n\varphi\ d\varphi \tag{1}$$

beide Exponenten ganze positive Zahlen, so ist es genügend den Ausdruck $P=\cos^m\varphi\sin^n\varphi$ nach C) §. 1 auf eine der eventuell möglichen Formen (27) oder (28) zu bringen, um die Differentialformel [m, n] unmittelbar integrabel einzurichten.

(2) A. *Dieser Methode wird man sich jedesmal bedienen müssen, wenn die Exponenten m und n beide ganz positiv und gleichzeitig gerade Zahlen sind.*

Man erhält etwa zur Bestimmung von [2, 4]

$$P = \cos^2\varphi \sin^4\varphi = \frac{(w^1+w^{-1})^2(w^1-w^{-1})^4}{64} =$$

$$= [w^6+w^{-6}-2(w^4+w^{-4})-(w^2+w^{-2})+4]:64 =$$

$$= (\cos 6\varphi - 2\cos 4\varphi - \cos 2\varphi + 2):32 \quad \text{hiemit}$$

(3) $$\int [2,4] = \tfrac{1}{32}\left\{\frac{\sin 6\varphi}{6} - \frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + 2\varphi\right\}.$$

Die Differentialformel [m, n] nimmt auf der Stelle eine algebraische Form an, sobald man in derselben irgend eine der goniometrischen Functionen:

(4) $$\sin\psi,\ \cos\psi,\ \text{tang}\,\psi,\ \text{cott}\,\psi,\ \sec\psi,\ \text{cosec}\,\psi$$

wobei man unter ψ einen der drei Werthe: φ, $\frac{1}{2}\varphi$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$ versteht, — als Grundvariable ansieht, und die gegebene Differentialformel nach dieser Grundvariablen einrichtet.

Von den 18 in (4) angesagten Transformationen haben sich diejenigen als die vornehmlich practischen herausgestellt — welche man auf Grund einer der Functionen

(5) $$\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ \text{tang}\,\varphi,\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi,\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)$$

effectuirt. Ihre Anwendung wird uns die charakteristisch von einander verschiedenen Combinationen der Exponenten m, n als diejenigen erkennen lassen, welche erschöpfend die Möglichkeitsfälle beurkunden, in welchen dem vorgelegten Differential [m, n] ein Integral in endlicher Form entspricht.

Die bei diesen Untersuchungen gemachten Wahrnehmungen lassen sich in folgenden drei Sätzen ausprägen:

B) *Ist in* [m, n] *der Sinus- oder Cosinusexponent eine ungerade positive Zahl — so mache man die Cosinus- und beziehungsweise die Sinusgrösse des Winkels* φ *zur Grundvariablen, um das Differential* [m, n] *als unmittelbar integrabel darzustellen.* (6)

C) *Ist in* [m, n] *die Exponentensumme* $= m + n$ *eine negative gerade Zahl, so mache man die Tangentengrösse des Winkels* φ *zur Grundvariablen — und die Formel* [m, n] *wird ersichtlich integrabel.* (7)

D) *Ist in* [m, n] *die Exponentensumme* $= m + n$ *negativ, und die einzelnen Exponenten ganz und entgegengesezt, so mache man die Tangentengrösse des halben Winkels* φ, *oder der Hälfte seines Complements zur Grundvariablen, je nachdem der negative Exponent dem Sinus oder Cosinus angehört, — um das vorgelegte Differential* [m, n] *ersichtlich integrabel darzustellen.* (8)

In diesen eben sub A, B, C, D angeführten Gesetzen sind anscheinend die Differentiale:

$$\frac{\sin^{2m}\varphi\; d\varphi}{\cos^{n}\varphi} = [-n, 2m]\,,\quad \frac{\cos^{2m}\varphi\; d\varphi}{\sin^{n}\varphi} = [2m, -n] \qquad (9)$$

wo m und n ganz positiv und $2m > n$
und ebenso das Differential

$$\frac{d\varphi}{\sin^{m}\varphi\;\cos^{2n+1-m}\varphi} = [-(2n-m+1), -m]$$

nicht einbegriffen. — — Es lassen sich jedoch diese Formen nach C) §. 1 je in solche zwei Parthieen zerlegen — welche ganz gewiss in den sub A), B), C), D) angeführten Gesetzen einer gehörigen Vertretung sich erfreuen.

Zur Bethätigung des in B) ausgesprochenen Gesetzes erhält man bei einem ganzen positiven m und beliebigem n:

$$\text{(10)} \qquad \left.\begin{array}{l} \text{für } \sin\varphi = u]: \cos\varphi = \sqrt{1-u^2},\ d\varphi = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ \cos^{2m+1}\varphi \sin^n\varphi = (1-u^2)^m u^n du \end{array}\right\}$$

und ebenso für:

$$\text{(11)} \qquad \left.\begin{array}{l} \cos\varphi = u]: \sin\varphi = \sqrt{1-u^2},\ d\varphi = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ \sin^{2m+1}\varphi \cos^n\varphi\, d\varphi = -(1-u^2)^m u^n du, \end{array}\right\}$$

wo man zum Behufe der Integration bloss nöthig hat die angezeigte Potenz $(1-u^2)^m$ zu entwickeln.

So ist etwa:

$$\int \cos^m\varphi \sin^5\varphi\, d\varphi = -\int (1-u^2)^2 u^m du =$$

$$= -\left(\frac{u^{m+1}}{m+1} - \frac{2u^{m+3}}{m+3} + \frac{u^{m+5}}{m+5} + \text{const.}\right) =$$

$$= -\left\{\frac{\cos^{m+1}\varphi}{m+1} - \frac{2\cos^{m+3}\varphi}{m+3} + \frac{\cos^{m+5}\varphi}{m+5} + \text{const.}\right\}.$$

Ebenso: $$\int \cos^3\varphi \sin^n\varphi\, d\varphi = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{n+1} - \frac{\sin^{n+3}\varphi}{n+3} + \text{const.}$$

Die Anwendung des Gesetzes C) ergiebt sich beim ganzen positiven n und beliebigem m im Folgenden:

$$\text{für } \operatorname{tang}\varphi = u]: \sin\varphi = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ d\varphi = \frac{du}{1+u^2};$$

$$\text{(12)} \qquad \cos^m\varphi \sin^{-m-2n}\varphi\, d\varphi = (1+u^2)^{n-1} \cdot u^{-(m+2n)} du;$$

$$\sin^{m}\varphi \, \cos^{-m-2n}\varphi \, d\varphi = (1+u^2)^{n-1} \, u^{-(m+2n)} \, du.$$

z. B. $$\int \frac{\sin^{\frac{3}{7}}\varphi}{\cos^{\frac{31}{7}}\varphi} \, d\varphi = \int (1+u^2)^3 . \; u^{\frac{3}{7}} \, du =$$

$$= 7 \, \frac{u^{\frac{10}{7}}}{10} + 3.7. \, \frac{u^{\frac{24}{7}}}{24} + 3.7. \, \frac{u^{\frac{38}{7}}}{38} + 7 \, \frac{u^{\frac{52}{7}}}{52} + \text{const.}$$

Endlich erhalten wir zur Bewahrheitung des Gesetzes D) für ganze positive m und n und für

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = u]: \; \sin\varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \; \cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \; d\varphi = \frac{2du}{1+u^2} \\ &\cos^{m}\varphi \, \sin^{-m-n}\varphi \, d\varphi = \frac{(1-u^2)^m (1+u^2)^{n-1} du}{2^{m+n-1}}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi\right) = u, \; \cos\varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \\ &\sin\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \; d\varphi = \frac{-2du}{1+u^2} \\ &\sin^{m}\varphi \, \cos^{-m-n}\varphi \, d\varphi = - \frac{(1-u^2)^{m} \, (1+u^2)^{n-1} \, du}{2^{m+n-1}}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

z. B. $$\int \frac{\sin^4\varphi}{\cos^5\varphi} \, d\varphi = - \frac{1}{2^4} \int (1-u^2)^4 \, du =$$

$$= - \tfrac{1}{16} \left\{ u - \frac{4u^3}{3} + \frac{6u^5}{5} - \frac{4u^7}{7} + \frac{u9}{9} + \text{const} \right\}.$$

$$\int \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{\sin^5\varphi} = \tfrac{1}{16} \int (1-u^2)^2 (1+u^2)^2 du =$$

$$= \tfrac{1}{16} \left(u - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^9}{9} + \text{const.} \right).$$

Um zum Integral der Differentialform III, nämlich

$$dy = P\varphi^r \; e^{\alpha\varphi} \, d\varphi \qquad (15)$$

zu gelangen, wissen wir, dass auf Grund der in C) §. 1 angedeuteten Transformation von P, dieser Ausdruck in lauter Glieder zerfällt, welche der Form $N \cos q\varphi$ oder $N \sin q\varphi$ angehören. Demgemäss lässt sich das Integral

$$(16)\qquad y = \int P\varphi^r e^{p\varphi} d\varphi$$

als eine Summe von Integralen darstellen, welche in den Formen:

$$(17)\qquad N\int \cos(q\varphi)\, e^{p\varphi}\varphi^r\, d\varphi;\; N\int \sin(q\varphi)\, \varphi^r\, e^{p\varphi}\, d\varphi$$

erscheinen, und es wird die Angabe des Integrals als erledigt anzusehen sein, sobald es uns gelingt, die Angabe der sub (17) angedeuteten Integrale zu bewerkstelligen.

Zu diesem Behufe haben wir:

$$(18)\qquad d\left(\frac{e^{a\varphi}\varphi^r}{a}\right) = e^{a\varphi}\varphi^r\, d\varphi + \frac{e^{a\varphi}}{a} r\varphi^{r-1}\, d\varphi,$$

durch beiderseitige Integration und Transposition der Glieder erhält man:

$$(19)\qquad J_r = \int \varphi^r\, e^{a\varphi}\, d\varphi = \frac{e^{a\varphi}\varphi^r}{a} - \frac{r}{a}\int e^{a\varphi}\varphi^{r-1} d\varphi \quad \text{oder}$$

$$(20)\qquad J_r = \frac{e^{a\varphi}\varphi^r}{a} - \frac{r}{a} J_{r-1}$$

Setzt man in der vorstehenden Gleichung an die Stelle von r den Werth r — s,

und multiplicirt die erhaltene Gleichung mit $\frac{(-1)^s r!}{a^s(r-s)!}$

so erhält man:

$$(21)\qquad \frac{(-1)^s r!}{\alpha^s(r-s)!} J_{r-s} = \frac{(-1)^s r!}{a^{s+1}(r-s)!}\varphi^{r-s} e^{a\varphi} + \frac{(-1)^{s+1} r!}{\alpha^{s+1}[r-(s+1)]!} Jr-(s+1).$$

Durch Specialisirung der vorstehenden Gleichung für

$$s = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ r-1,\ r$$

erhält man (r+1) Gleichungen, welche durch Addition verbunden, nach Weglassung der beiderseits in der Summen-Gleichung vorkommenden gleichen Glieder folgende Relation bieten:

$$J_r = \left[\frac{(-1)^s r!\ \varphi^{r-s}\ e^{a\varphi}}{(r-s)!\quad a^{s+1}} \right]_{s=0}^{s=r}, \tag{22}$$

wo die rechte Seite der Gleichung eine Summe von (r + 1) Gliedern andeutet, welche man aus dem eingeklammerten Ausdrucke erhält, sobald man darin Statt s nach und nach die Werthe: 0, 1, 2, 3, ... (r—1), r setzt.

Sei nun a ein complexer Ausdruck und durch $(p+q\sqrt{-1})$ bestimmt, so kann man schreiben:

$$a = p + q\sqrt{-1} = g\, e^{\psi\sqrt{-1}} = g\cos\psi + g\sin\psi\sqrt{-1}, \tag{23}$$

hieraus:

$$g^2 = p^2 + q^2;\ \mathrm{tang}\ \psi = q:p;$$

demgemäss ist:

$$e^{\alpha\varphi} = e^{p\varphi}\, e^{q\varphi\sqrt{-1}} = e^{p\varphi}\,(\cos q\varphi + \sin q\varphi\sqrt{-1})$$

$$a^{s+1} = g^{s+1}\, e^{(s+1)\psi\sqrt{-1}} \quad \text{hiemit:}$$

$$J_r = \int \cos\,(q\varphi)\,\varphi^r\, e^{p\varphi}\, d\varphi + \sqrt{-1} \int \sin\,(q\varphi)\,\varphi^r\, e^{p\varphi} d\varphi, \tag{24}$$

und

$$\frac{e^{a\varphi}}{a^{s+1}} = \frac{\cos(q\varphi - (s+1)\,\psi)}{g^{s+1}} + \frac{\sqrt{-1}\,\sin(q\varphi - (s+1\psi)}{g^{s+1}}.$$

Wenn man die hier angedeuteten Werthe von $e^{\alpha\varphi}$ und a^{s+1} in die Gleichung (22) einführt, und dann die primären Glieder unter sich, und ebenso die

secundären Glieder unter sich ausgleicht, so erhält man:

$$\int \cos(q\varphi)\,\varphi^{r}\,e^{p\varphi}\,d\varphi =$$

$$= e^{p\varphi}\left[\frac{(-1)^{s}\,r!}{g^{s+1}(r-s)!}\,\varphi^{r-s}\cos[q\varphi-(s+1)\psi]\right]_{s=0}^{s=r},$$

(2

$$\int \sin(q\varphi).\,\varphi^{r}.\,e^{p\varphi}\,d\varphi =$$

$$= e^{p\varphi}\left[\frac{(-1)^{s}\,r!}{g^{s+1}(r-s)!}\,\varphi^{r-1}\sin[q\varphi-(s+1)\psi]\right]_{s=0}^{s=r}.$$

wobei die Werthe von g und ψ mittelst (23) aus den bekannten Werthen von q und p berechnet werden.

In den sub (25) aufgestellten Relationen ist die Angabe der in (17) verlangten Integrale vollständig erledigt.